Matemáticas Discretas

Lógica

Cursos Propedéuticos 2010
Ciencias Computacionales
INAOE

Dr. Luis Villaseñor Pineda
villasen@inaoep.mx
http://ccc.inaoep.mx/~villasen

Lógica

- Fundamentos de Lógica
- Cálculo proposicional
- Cálculo de predicados

Generalidades

- Lógica: estudio del razonamiento correcto
- Se enfoca a la relación entre enunciados o proposiciones y no en el contenido de ellos
- Empleo de la Lógica
  - En matemáticas:
    - Demostración de teoremas
  - En Ciencias Computacionales:
    - Demostración de la funcionalidad correcta de programas
    - En IA – representación del conocimiento

Proposiciones

- **Definición**: una ***proposición*** es la mínima unidad del lenguaje con contenido de información sobre la que es posible determinar su veracidad (V) o falsedad (F)
- Las proposiciones más sencillas posibles se denominan ***atómicas***
- Las proposiciones son de naturaleza declarativa

Ejemplos

- La tierra es un planeta del sistema solar
- 8 es un número par
- 8 es un número impar
- Juan es un programador
- Desearía conocer las proposiciones
- x – y = y – 2
- * ¿Es esto verdadero?

5

Proposiciones compuestas

- **Definición**: las proposiciones constituidas por proposiciones atómicas y otras partículas que sirven de nexos se llaman ***compuestas***
- Ejemplos:
  - Las manzanas son verdes ***o*** rojas
  - París es una ciudad ***y*** una capital

6

Conectivos lógicos

- **Definición**: un ***conectivo lógico*** es una partícula que se utiliza para formar las proposiciones compuestas, es decir, es un elemento de lenguaje que permite construir proposiciones nuevas a partir de las existentes, obteniendo así nuevos significados.

7

Conectivos lógicos

- Si **p** y **q** son proposiciones, se pueden formar proposiciones compuestas con los siguientes conectivos:
  - Conjunción (Y - AND): $p \wedge q$
  - Disyunción (O - OR): $p \vee q$
  - Disyunción exclusiva (XOR): p xor q
  - Negación (NO - NOT): $\neg p$
  - Implicación (SI-ENTONCES, IF-THEN): $p \rightarrow q$
  - Implicación doble (SI-Y-SOLO-SI, IF-AND-ONLY-IF): $p \leftrightarrow q$

8

Tablas de verdad

- Los valores de verdad de las proposiciones compuestas pueden ser descritos por *tablas de verdad*
- **Definición**: una ***tabla de verdad*** de una proposición presenta los valores de verdad de la proposición para todas las asignaciones posibles de la proposiciones atómicas

Tabla de verdad conjunción

- Una conjunción es verdadera cuando p y q, ambas, son verdaderas

p	q	p ^ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Tabla de verdad disyunción

- Una disyunción es verdadera cuando al menos una de sus proposiciones constituyentes es verdadera

p	q	p v q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tabla de verdad disyunción exclusiva

- Una disyunción exclusiva es verdadera cuando p es verdadera y q falsa o bien cuando p es falsa y q verdadera

p	q	p xor q
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Tabla de verdad implicación

- Una implicación es verdadera cuando p y q son verdaderas o cuando p es falsa

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Proposición condicional

- Una ***proposición condicional*** es de la forma "Si p, entonces, q"
- Notación: $p \to q$
- Ejemplo:
  - p = "Juan es un programador"
  - Q = "Pedro es abogado"
  - $p \to q$: Si Juan es programador entonces Pedro es abogado

Hipótesis y conclusión

- En una proposición condicional $p \to q$:
  - p se denomina antecedente o hipótesis
  - q se denomina consecuente o conclusión
- Una condición necesaria es expresada por la conclusión
- Una condición suficiente es expresada por la hipótesis

Equivalencia lógica

- Dos proposiciones son equivalentes lógicamente si y solo si sus valores de verdad (tablas de verdad) son idénticos

p	q	$\sim p \vee q$	$p \to q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

Doble implicación

- La doble implicación "p si y sólo si q" es lógicamente equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	**q**	**p ↔ q**	**(p → q) ^ (q → p)**
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

Tautología

- ***Definición***: una proposición es una ***tautología*** si su tabla de verdad contiene sólo valores verdaderos para cada caso

p	**q**	**p → p v q**
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

Contradicción

- ***Definición***: una proposición es una ***contradicción*** si su tabla de verdad contiene sólo valores falsos para cada caso

p	p ^ (~p)
T	F
F	F

Ejemplo de equivalencia

- Probar que "$q \wedge (\neg r \rightarrow p) \Leftrightarrow (r \wedge q) \vee (p \wedge q)$"

p	q	r	¬r	¬r → p	q ∧ (¬r → p)	r ∧ q	p ∧ q	(r ∧ q) ∨ (p ∧ q)
F	F	F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	F	F
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	T	T	F	T	T	T	T	T

Precedencia de operadores

- Proposiciones compuestas
  - $r \vee p \rightarrow q$
- ¿Cuál es el orden de aplicación de los operadores lógicos?
  - Se usan paréntesis para especificar el orden
  - $r \vee (p \rightarrow q)$
- Si no se emplean paréntesis, se emplea la lista de precedencia

Operador	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Leyes de equivalencia

- *Identidad*: $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$ $\quad p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$
- *Dominante*: $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\quad p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$
- *Ídem potencia*: $p \vee p \Leftrightarrow p$ $\quad p \wedge p \Leftrightarrow p$
- *Doble negación:* $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- *Conmutatividad:* $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $\quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
- *Asociatividad:* $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
  $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Leyes de equivalencia

- *Distributiva*: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- *De Morgan's*:
  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
  $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- *Trivialidad tautológica/contradicción*:
  $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ $\quad p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$

Razonamientos y demostraciones

- Una demostración es un argumento correcto (bien razonado, lógicamente válido) y completo (claro, detallado) que rigurosamente establece la veracidad de una proposición matemática
  - Teoremas
  - Axiomas
  - Reglas de inferencia

Reglas de inferencia

- Una ***regla de inferencia*** es
  - Un patrón que establece que si se conocen un conjunto de proposiciones antecedentes verdaderas, entonces se puede deducir que cierta proposición consecuente relacionada es verdadera
  - *antecedente 1*
    <u>*antecedente 2 ...*</u>
    $\therefore$ *consecuente* "$\therefore$" significa "entonces"

Razonamiento

- Un razonamiento es una implicación en donde el antecedentes es una conjunción de un número finito de proposiciones p_1, p_2, …, p_n, llamadas premisas del razonamiento; el consecuente se llama conclusión del razonamiento:
  - $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow r$
  - Un razonamiento es válido si tal implicación es una tautológica, en otro caso se denomina falacia
  - Cuando el razonamiento es válido, la veracidad de la conclusión solo se garantiza cuando las premisas son verdaderas

Algunas reglas de inferencia

- p Regla de adición $\therefore p \vee q$
- $p \wedge q$ Regla de simplificación $\therefore p$
- p Regla de conjunción $q \therefore p \wedge q$

Regla de inferencia

- $p \rightarrow q$ Regla de *modus ponens*
  $\underline{p}$
  $\therefore q$

p	q	p→q	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Métodos de demostración

- Demostraciones directas
  - Si t es una proposición de la cual se desea demostrar su veracidad entonces construimos un razonamiento válido donde t sea la conclusión del conjunto de premisas verdaderas dado.
- Demostraciones indirectas
  - *Reducción al absurdo o contradicción*: Si se demuestra que una proposición $\neg t \to s$ es verdadera, donde s se asegura es falsa, esto justifica que t es verdadera.

29

Prueba formal de validez

- Consiste en obtener la conclusión, a partir de las premisas utilizando las reglas de inferencia.
  - Se numeran las premisas, así como los pasos resultantes de las inferencia.
  - Terminamos al hallar la conclusión deseada

30

Prueba formal de validez

- **Ejemplo**
  - Hallar la siguiente conclusión $\vdash p \to q$, a partir de las premisas: 1. $(q \vee p) \to q$
    2. $q \vee p$
  - 3. $\neg(q \vee p) \vee q$ Sustitución de la implicación en 1.
  - 4. $(\neg q \wedge \neg p) \vee q$ Ley de Morgan en 3.
  - 5. $\neg p \vee q$ Ley simplificativa en 4.
  - 6. $p \to q$ Sustitución de la implicación en 5.
- Así demostramos que el razonamiento es válido.

31

Lógica de predicados

- La lógica de predicados es una extensión de la lógica proposicional que permite razonar acerca de clases o entidades
- La lógica proposicional trata proposiciones simples como unidades atómicas
- La lógica de predicados distingue el sujeto de una sentencia de su predicado

32

Cálculo de predicados

- Expresiones tales como “3+x=5”, “$a^n+b^n=c^n$” no son proposiciones debido a que contienen variables “libres”
- Este tipo de expresiones se llaman ***predicados*** o expresiones abiertas
- Si existen ***n*** variables libres, se considera como un predicado de orden ***n***
- Un predicado es modelado como una función $P(\cdot)$ de objetos a proposiciones

Cálculo de predicados

- Si los valores de la variables se especifican o delimitan, los predicados se convierten en proposiciones
- Las preguntas centrales para los predicados son: ¿es un predicado satisfecho para todas, algunas o ninguno de sus posibles valores?

Aplicaciones de la lógica de predicados

- Es la notación formal para escribir en una forma clara, concisa, y no ambigua definiciones, axiomas y teoremas en matemáticas
- Es la base para realizar claramente especificaciones formales de cualquier sistema complejo

Universo de discurso y cuantificadores

- La potencia de distinguir objetos de predicados es lo que permite establecer propiedades relacionadas a varios objetos de forma concisa
- La colección de valores que una variable x puede tomar se llama el ***universo de discurso*** de x
- Los cuantificadores proporcionan una notación que permite cuantificar cuantos objetos en el universo de discurso satisfacen un predicado dado

Cuantificadores

- Dado un predicado P(x):
  - El ***cuantificador universal*** ∀ describe "Para toda x", esto es: "∀x: P(x)" representa "Para toda x, P(x) se cumple"
  - El ***cuantificador existencial*** ∃ describe "Existe una x": "∃x: P(x)" representa "Existe una x tal que P(x) se cumple"
- Es crucial determinar a priori el universo o dominio

Reglas de lógica de predicados

- Relación entre cuantificadores universales y existenciales:
  - $\neg\exists x: P(x) \Leftrightarrow \forall x: \neg P(x)$
  - $\neg\forall x: P(x) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$
- Asumiendo un domino no vacío para x:
  - $\forall x: P(x)$ implica $\exists x: P(x)$
- No confundir:
  - $\neg\exists x: P(x)$ with $\exists x: \neg P(x)$
  - $\neg\forall x: P(x)$ with $\forall x: \neg P(x)$

Variables libres y determinadas

- Una expresión P(x) se dice que tiene una variable libre, i.e., x no está definida
- Un cuantificador opera sobre una expresión que tiene una o más variables libres y determina una o más de estas variables para producir una expresión con una o más variables determinadas

Leyes de equivalencia

- Definición de cuantificadores con universo de discurso {a, b, c, …}
  - $\forall x\, P(x) \Leftrightarrow P(\mathrm{a}) \wedge P(\mathrm{b}) \wedge P(\mathrm{c}) \wedge \ldots$
    $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow P(\mathrm{a}) \vee P(\mathrm{b}) \vee P(\mathrm{c}) \vee \ldots$
  - $\forall x\, \forall y\, P(x,y) \Leftrightarrow \forall y\, \forall x\, P(x,y)$
    $\exists x\, \exists y\, P(x,y) \Leftrightarrow \exists y\, \exists x\, P(x,y)$
  - $\forall x\, \mathbf{(}P(x) \wedge Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\forall x\, P(x)\mathbf{)} \wedge \mathbf{(}\forall x\, Q(x)\mathbf{)}$
    $\exists x\, \mathbf{(}P(x) \vee Q(x)\mathbf{)} \Leftrightarrow \mathbf{(}\exists x\, P(x)\mathbf{)} \vee \mathbf{(}\exists x\, Q(x)\mathbf{)}$