Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

Eduardo Morales, Jesús González, Hugo Jair Escalante

INAOE

Contenido

1. Introducción
2. Bases Matemáticas
3. Un clasificador simple
4. Máquinas de Soporte Vectorial
5. SVM caso no lineal
6. Regularización y generalización
7. Extensiones
8. Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Se presentó en COLT-92 (Boser, Guyon, Vapnik)
- Por un tiempo “desbancó” a las redes neuronales artificiales.
- Herramienta popular de aprendizaje con buenos resultados
- Desarrollo teórico
- Robusto a problemas con muchas variables y pocos datos
- Popularizó el *kernel trick*

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Se puede usar para:

- Clasificación binaria (aplicación original)
- Clasificación multiclase
- Regresión
- Selección de variables
- Identificación de casos anómalos (*outliers*)
- *Clustering*

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

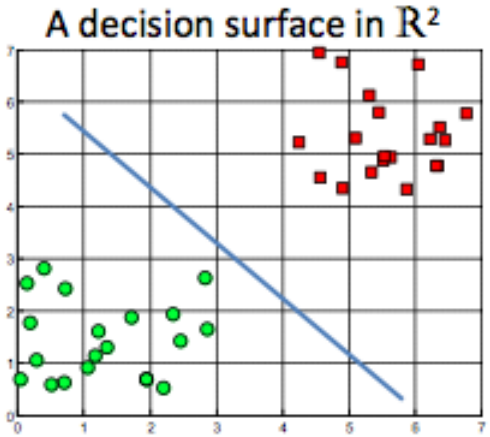
Máquinas de Soporte Vectorial

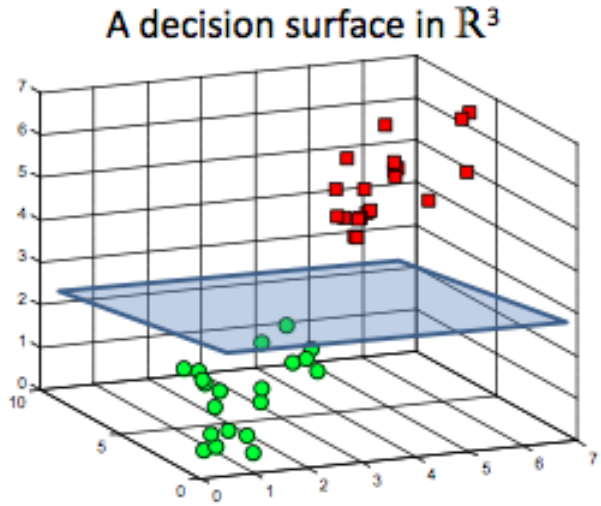
- Supongamos que tenemos un problema de clasificación binaria donde tenemos un conjunto de ejemplos $\mathcal{D} = \{(\vec{x}_1, y_1), \ldots, (\vec{x}_m, y_m)\}$ donde $y \in \{+1, -1\}$
- En ML, lo que queremos es generalizar para datos no vistos. Esto es, cuando nos llega un nuevo ejemplo $\vec{x}_i$, queremos saber si pertenece a una de dos posibles clases etiquetadas como $\{+1, -1\}$
- En términos generales, seleccionamos la clase y_i tal que $(\vec{x}_i, y_i)$ se parezca de alguna forma a los ejemplos de entrenamiento.

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Los ejemplos los vamos a representar como vectores en un espacio m-dimensional (m = número de atributos)
- La ventaja de representarlos como vectores es que podemos usar una representación geométrica de lo que es una "superficie de decisión" que separa a dos grupos





Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Algunas operaciones:

- Dado un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$
- L2-norma: $||\vec{a}||_2 = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2)}$ (nos mide la longitud del vector)
- Producto punto: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_m b_m = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$
- Notación equivalente: $< \mathbf{x}, \mathbf{x}' >= \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{x}]_i [\mathbf{x}']_i$ donde $[\mathbf{x}]_i$ representa el i-ésimo elemento del vector $\mathbf{x}$

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La interpretación geométrica del producto punto es que calcula el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{x_1}$ y $\vec{x_2}$ si están normalizados a una longitud de 1
- En general $< \vec{x_1}, \vec{x_2} >= (\vec{x_1} \cdot \vec{x_2}) = ||\vec{x_1}|| * ||\vec{x_2}|| cos(\theta)$
- Por lo mismo, cuando dos vectores son perpendiculares: $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La interpretación geométrica del producto punto es que calcula el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{x_1}$ y $\vec{x_2}$ sii están normalizados a una longitud de 1
- En general $< \vec{x_1}, \vec{x_2} >= (\vec{x_1} \cdot \vec{x_2}) = ||\vec{x_1}|| * ||\vec{x_2}|| cos(\theta)$
- Por lo mismo, cuando dos vectores son perpendiculares: $\vec{x_1} \cdot \vec{x_2} = 0$

Producto punto como medida de similitud!

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- El producto punto también nos sirve para calcular la longitud o norma del vector como: $||\vec{x}|| = \sqrt{<\vec{x}, \vec{x}>}$
- De la misma forma, la distancia entre dos vectores se puede calcular también como la longitud del vector diferencia

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernels

Definamos una medida de similitud genérica k, tal que dadas dos instancias, x y x', k nos regresa un valor real que caracteriza su similitud:

$$k : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, x') \rightarrow k(x, x')$$

con:

$$k(x, x') = k(x', x)$$

A la función k la denominamos *kernel*.

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Como $\mathcal{X}$ es el espacio de los *"objetos"*, necesitamos transformar los objetos originales a un espacio de producto punto $\mathcal{H}$.
Para ello, usamos el siguiente mapeo:

$$\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$x \rightarrow \vec{x} := \Phi(x)$$

Nota: Aun y cuando los *"objetos"* originales ya estén en $\mathbb{R}^m$ puede ser conveniente el mapeo.
Así, podemos definir el siguiente kernel:

$$k(x, x') := \langle \vec{x}, \vec{x}' \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle$$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

- Con estos elementos, podemos construir un clasificador simple. Una idea es tener dos clases y asignar la clase de un nuevo ejemplo al que tenga la media más cercana al ejemplo.
- La media de las dos clases es:

$$\mathbf{c}_+ = \frac{1}{m_+} \sum_{\{i|y_i=+1\}} \mathbf{x}_i$$

$$\mathbf{c}_- = \frac{1}{m_-} \sum_{\{i|y_i=-1\}} \mathbf{x}_i$$

donde m_+ y m_- son el número de ejemplos positivos y negativos.

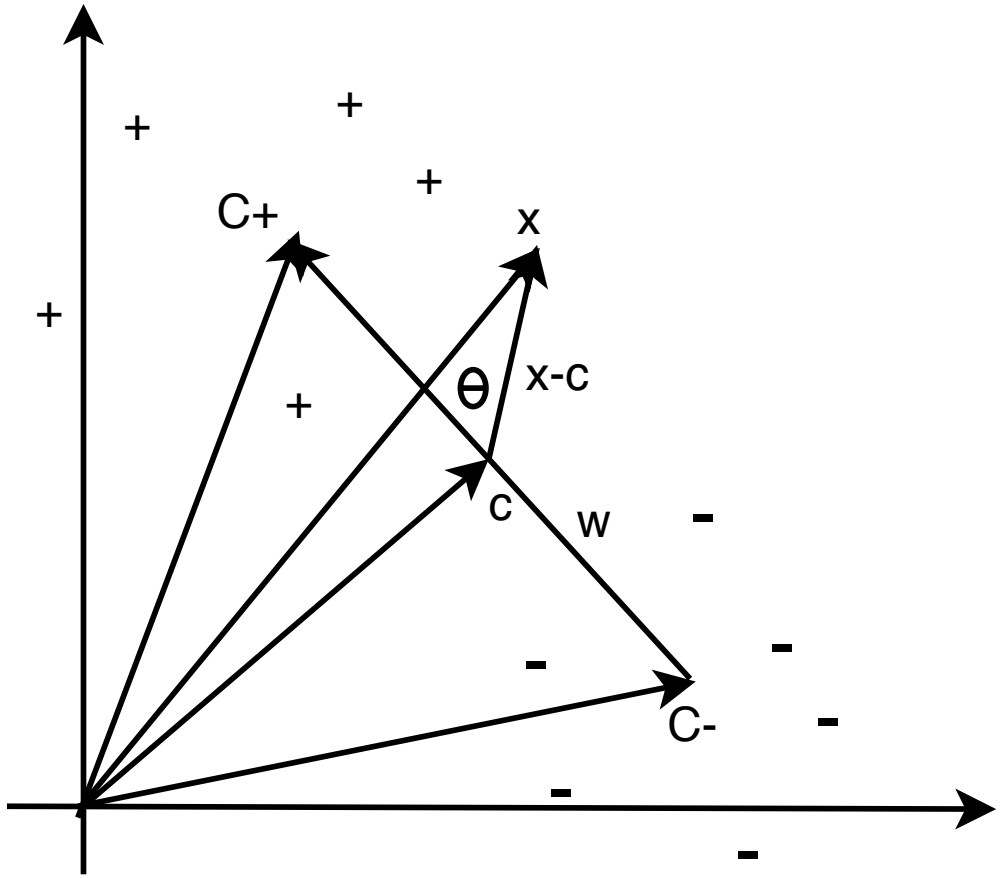
Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Asignamos la clase del nuevo punto a la clase promedio más cercana.
- Se puede hacer en forma geométrica mediante el producto punto
- Sea **c** el punto medio entre las dos medias $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_+ + \mathbf{c}_-)/2$
- Revisamos si el vector $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ que conecta a **c** con **x** tiene un ángulo menor a $\pi/2$ con el vector $\mathbf{w} = \mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-$ que conecta a las dos medias
- Si es menor se asigna la clase $+1$ y si es mayor, entonces se asigna -1

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Esto se puede hacer con el producto punto entre $(\mathbf{x} - \mathbf{c})$ y $(\mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-)$ ó $\mathbf{w}$
- Si el coseno es positivo el ángulo es menor a 90^o y si es negativo, el ángulo es mayor a 90^o.

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

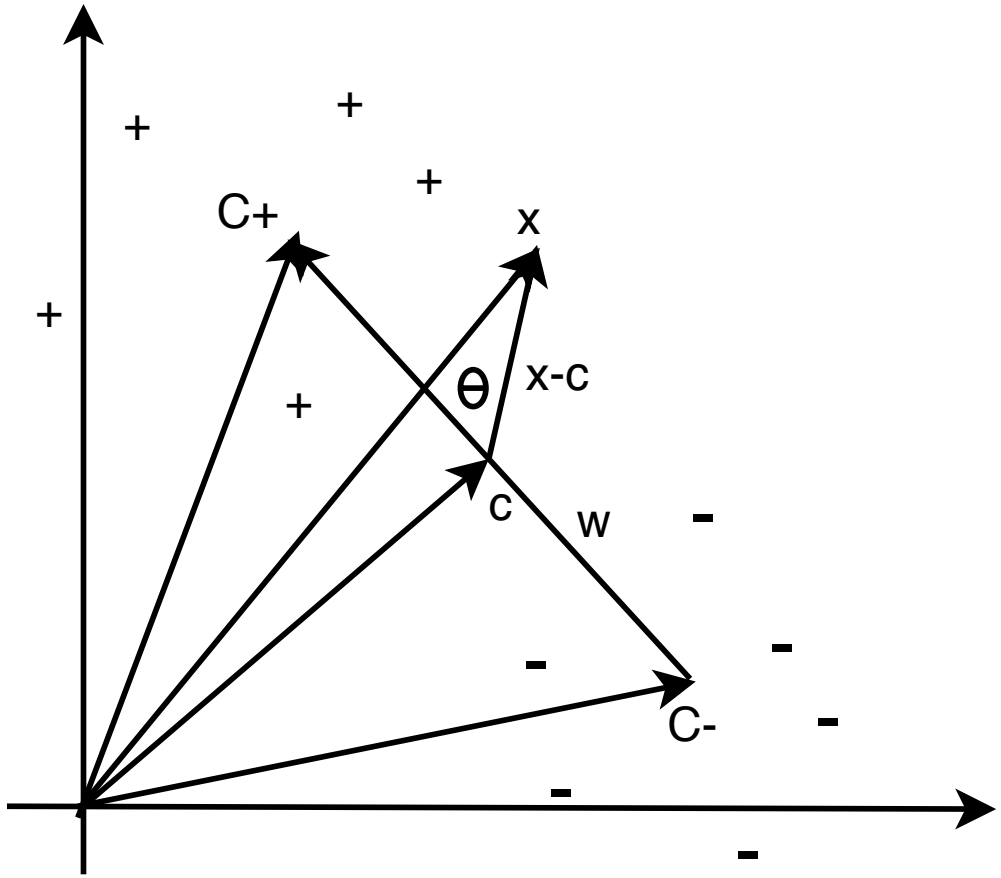
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

$$
\begin{aligned}
y &= sgn < (\mathbf{x} - \mathbf{c}), \mathbf{w} > \\
&= sgn < (\mathbf{x} - (\mathbf{c}_+ + \mathbf{c}_-)/2, \mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_- > \\
&= sgn((\mathbf{x} - \frac{\mathbf{c}_+ + \mathbf{c}_-}{2}) \cdot \mathbf{c}_+ - (\mathbf{x} - \frac{\mathbf{c}_+ + \mathbf{c}_-}{2}) \cdot \mathbf{c}_-) \\
&= sgn((\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_+) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{c}_-) + \frac{\mathbf{c}_+ - \mathbf{c}_-}{2} \cdot (\mathbf{c}_- - \mathbf{c}_+)) \\
&= sgn(< \mathbf{x}, \mathbf{c}_+ > - < \mathbf{x}, \mathbf{c}_- > + b)
\end{aligned}
$$

donde: $b = \frac{1}{2}(||\mathbf{c}_-||^2 - ||\mathbf{c}_+||^2)$ y la norma $||\mathbf{x}|| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}$. b vale cero si las medias de las clases tienen la misma distancia al origen.

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Entre más pequeño el ángulo entre **x** y el centro de la clase, más grande es el coseno y la clase se vuelve positiva
- Lo anterior nos representa una frontera en forma de hiperplano que satisface una restricción que se puede expresar como una ecuación lineal

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

- Si substituimos las definiciones de $\mathbf{c}_+$ y $\mathbf{c}_-$ en:

$$y = sgn(< \mathbf{x}, \mathbf{c}_+ > - < \mathbf{x}, \mathbf{c}_- > + b)$$

- Obtenemos:

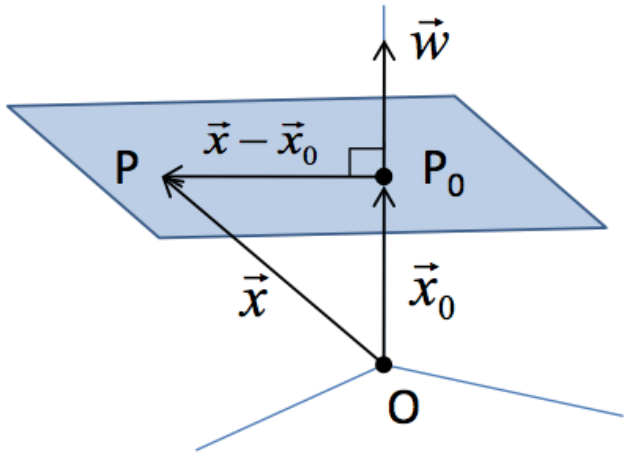
$$y = sgn(\frac{1}{m_+} \sum_{\{i|y_i=+1\}} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_i > - \frac{1}{m_-} \sum_{\{i|y_i=-1\}} < \mathbf{x}, \mathbf{x}_i > + b)$$

- Una solución en términos de producto punto!
- No necesitamos conocer las $\mathbf{x}$ de manera explícita!

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

- La ecuación de un hiperplano la podemos definir con un punto P_0 y un vector perpendicular al plano $\vec{w}$ en ese punto:

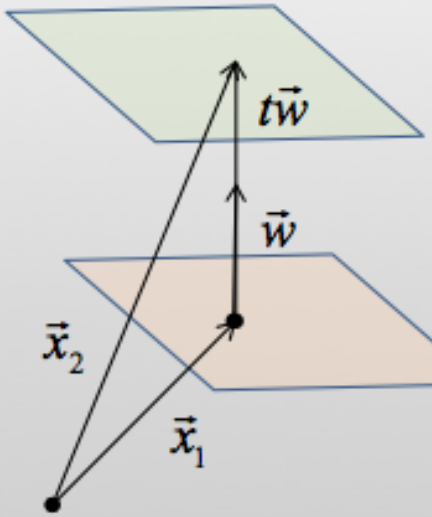


- Si definimos el vector $\vec{x_0} = \vec{OP}$, donde P es un punto arbitrario en el hiperplano
- Una condición para que P esté en el plano es que el vector $\vec{x} - \vec{x_0}$ sea perpendicular a $\vec{w}$
- Osea: $\vec{w} \cdot (\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$ ó $\vec{w} \cdot \vec{x} - \vec{w} \cdot \vec{x_0}) = 0$
- Si definimos: $b = -\vec{w} \cdot \vec{x_0}$, entonces: $\vec{w} \cdot \vec{x} + b = 0$

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

La distancia entre planos la podemos calcular como:



$$\vec{w}\cdot\vec{x}+b_2=0$$

$$\vec{w}\cdot\vec{x}+b_1=0$$

$$\vec{x}_2=\vec{x}_1+t\vec{w}$$

$$D=\|t\vec{w}\|=|t|\|\vec{w}\|$$

$$\vec{w}\cdot\vec{x}_2+b_2=0$$

$$\vec{w}\cdot(\vec{x}_1+t\vec{w})+b_2=0$$

$$\vec{w}\cdot\vec{x}_1+t\|\vec{w}\|^2+b_2=0$$

$$(\vec{w}\cdot\vec{x}_1+b_1)-b_1+t\|\vec{w}\|^2+b_2=0$$

$$-b_1+t\|\vec{w}\|^2+b_2=0$$

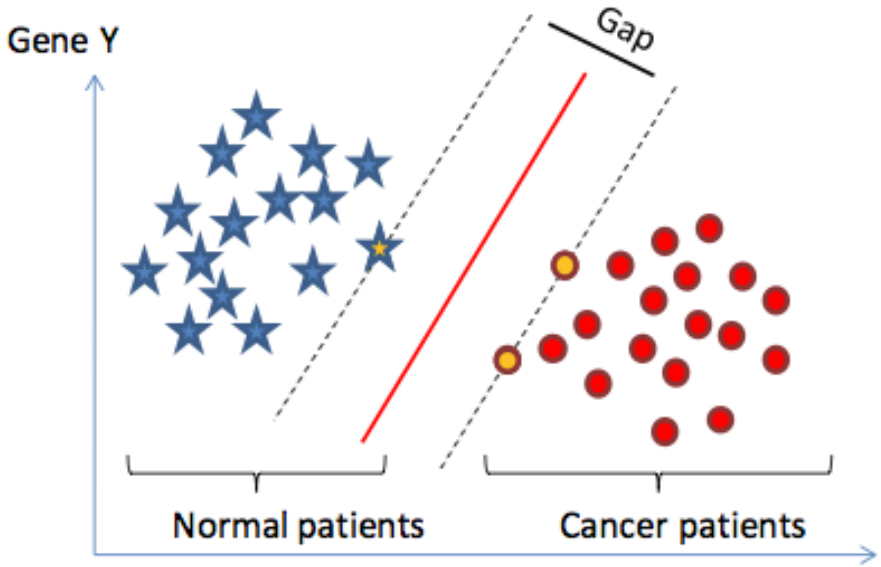
$$t=(b_1-b_2)/\|\vec{w}\|^2$$

$$\Rightarrow D=|t|\|\vec{w}\|=|b_1-b_2|/\|\vec{w}\|$$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

- Representando los ejemplos como vectores
- Sabiendo como calcular hiperplanos
- Sabiendo como calcular la distancia entre planos
- La pregunta es cómo podemos construir el hiperplano que separa dos clases con la máxima distancia entre los ejemplos de las clases?



Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

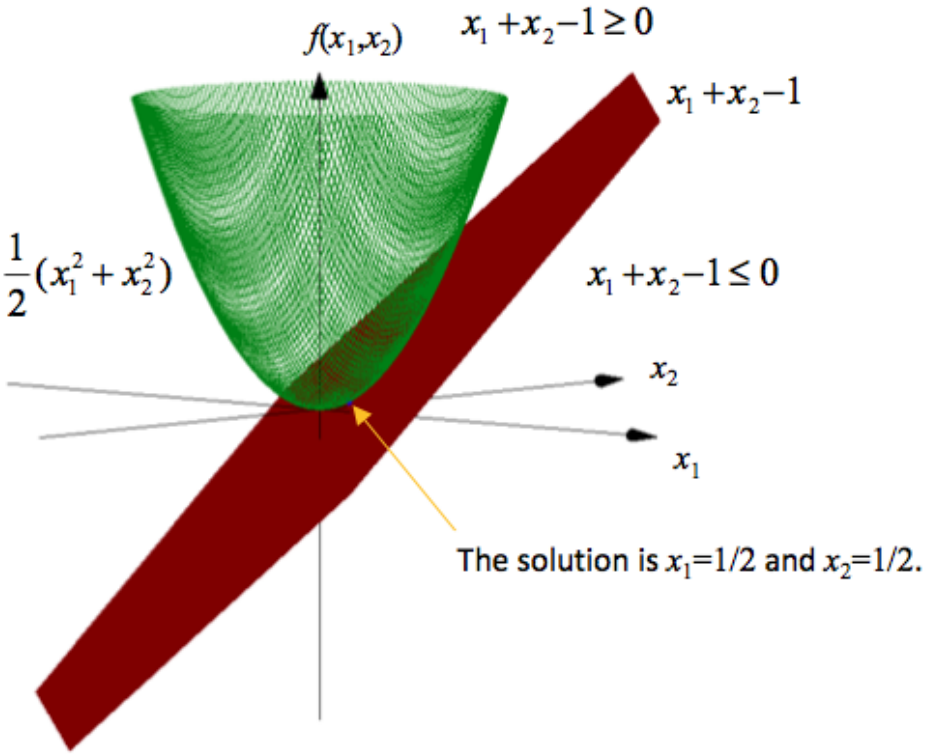
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Si tenemos una función convexa el mínimo local es igual al óptimo
- Un problema de optimización cuadrátivo es aquel en donde la función objetivo es cuadrática y está sujeta a restricciones lineales
- Estos problemas tienen un espacio de solución convexa y se pueden resolver de forma eficiente usando un enfoque voraz

Máquinas de Soporte Vectorial: Bases

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

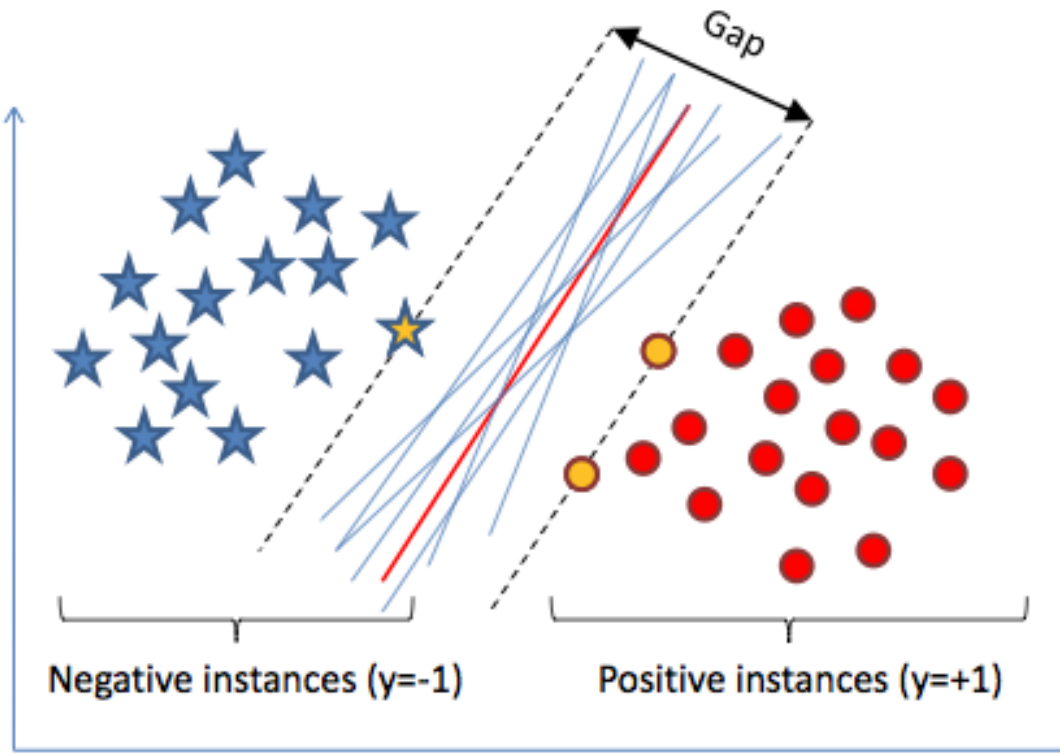
- Por ejemplo, si tenemos un problema con 2 atributos: $\vec{x} = (x_1, x_2)$
- El problema es: $\min \frac{1}{2}||\vec{x}||_2^2$ (o $\min \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$) sujeto a $x_1 + x_2 - 1 \geq 0$



Máquinas de Soporte Vectorial

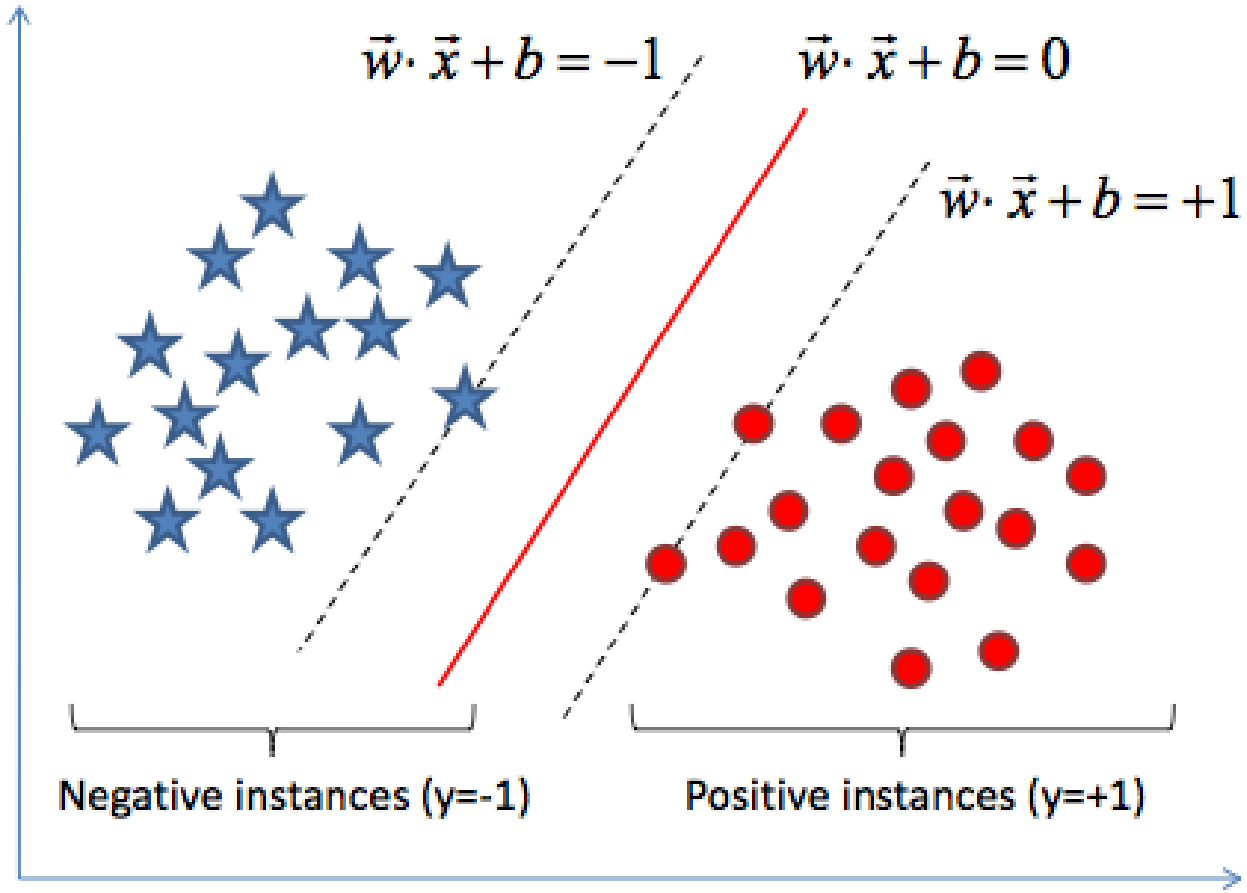
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Dado un conjunto de datos de entrenamiento: $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_N}\} \in \mathbb{R}^M$ y $y_1, y_2, \ldots, y_N \in \{-1, +1\}$



Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

- Nos interesa la distancia entre los hiperplanos:

$$\vec{w} \cdot \vec{x} + b = -1, \vec{w} \cdot \vec{x} + b = +1$$

- o de forma equivalente:

$$\vec{w} \cdot \vec{x} + (b + 1) = 0, \vec{w} \cdot \vec{x} + (b - 1) = 0$$

- Sabemos que $D = \frac{b_1 - b_2}{||\vec{w}||}$
- Por lo tanto $D = 2/||\vec{w}||$
- Como queremos maximizar la separación, necesitamos minimizar: $||\vec{w}||$ o equivalentemente, minimizar $\frac{1}{2}||\vec{w}||^2$

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- También tenemos que poner restricciones para que los ejemplos esten bien clasificados:

$$\vec{w} \cdot \vec{x_i} + b \leq -1, si : y_i = -1$$

$$\vec{w} \cdot \vec{x_i} + b \geq +1, si : y_i = +1$$

- De forma equivalente:

$$y_i(\vec{w} \cdot \vec{x_i} + b) \geq 1$$

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Resumiendo:

- Queremos:

$$\text{mín}\, \tau(\vec{w}) = \frac{1}{2}||\vec{w}||^2$$

s.t.

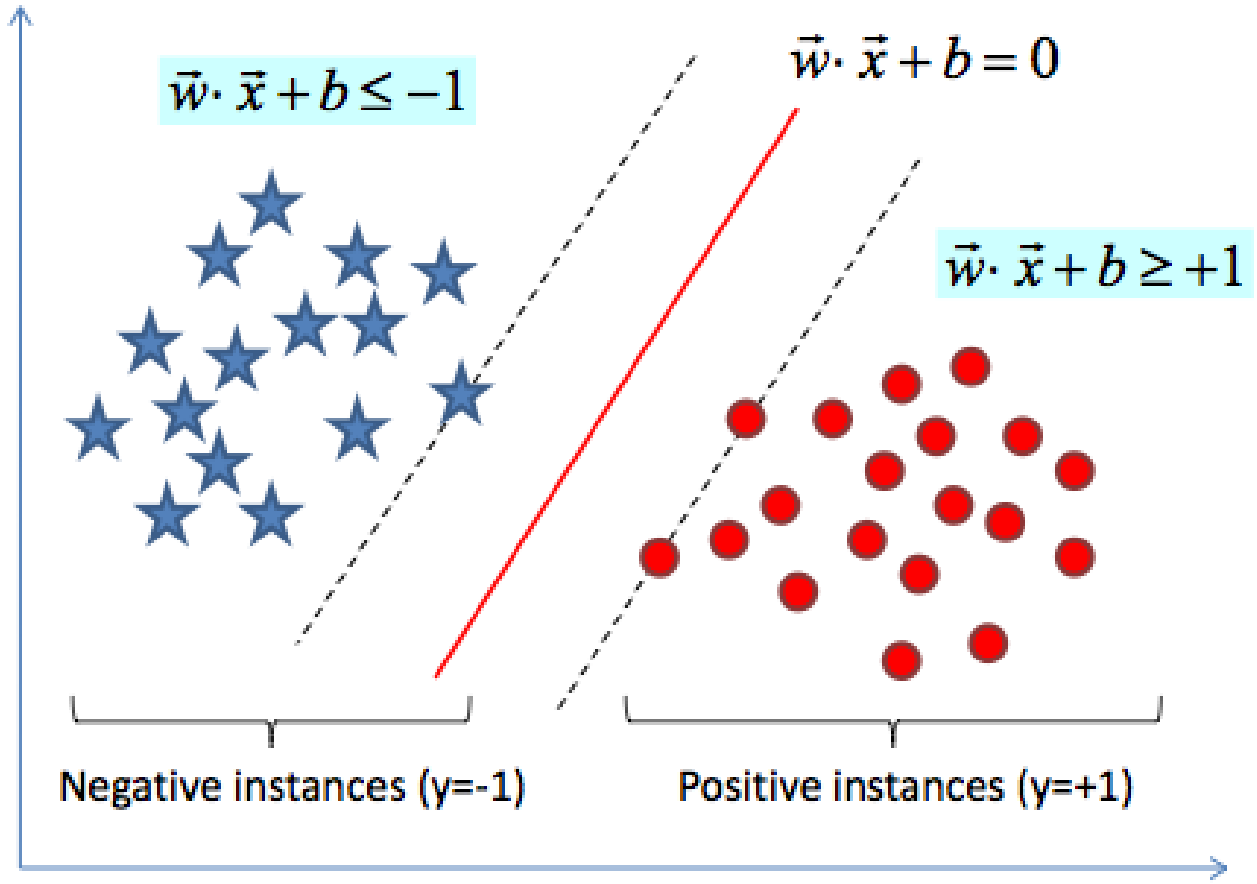
$$y_i(\vec{w} \cdot \vec{x_i} + b) \geq 1, para : i = 1, \ldots, N$$

- Dada una nueva instancia, $\vec{x}$, la clasificación es:

$$f(\vec{x}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$$

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



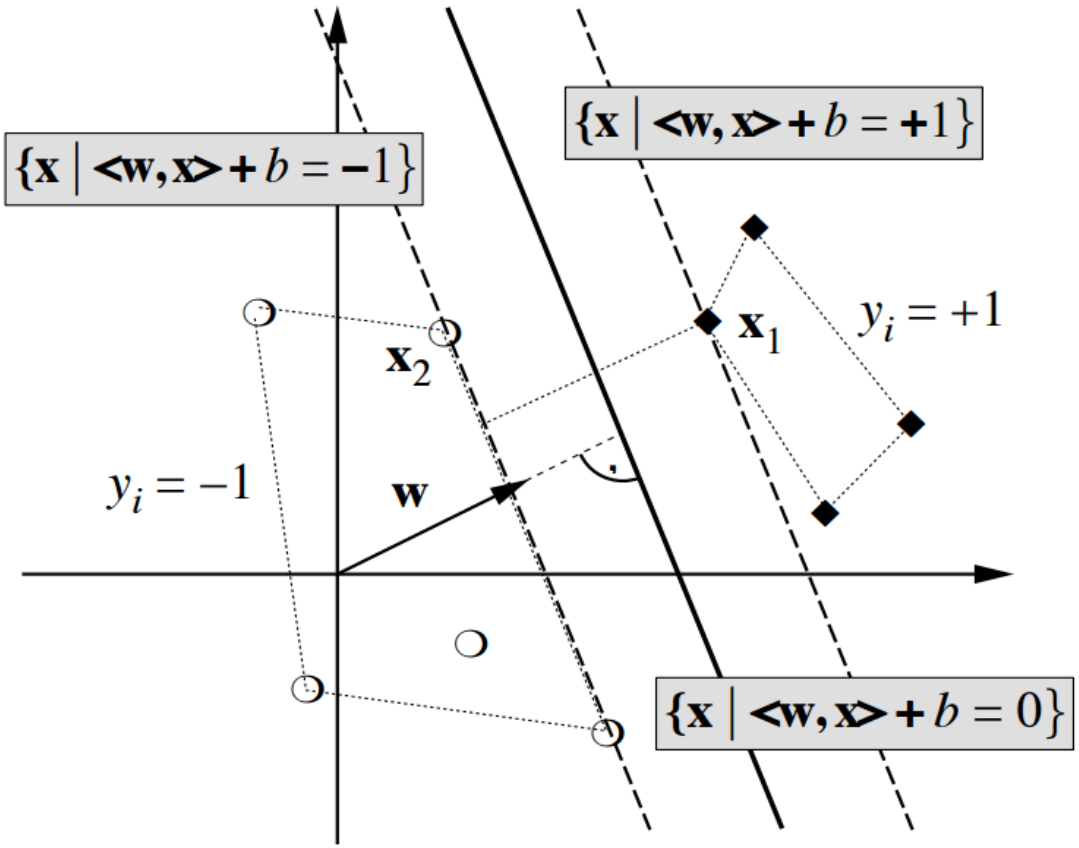
Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- $\tau(\vec{w})$ es la función objetivo a optimizar, sujeta a N restricciones: $y_i(\vec{w} \cdot \vec{x_i} + b) \geq 1$
- Se llama la formulacion primal de SVMs lineales
- Es un problema de optimización convexo de programación cuadrática (QO) con m variables $(w_i, i = 1, \ldots, m)$ donde m es el número de atributos en los datos

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



Note:

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_1 \rangle + b = +1$$
$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_2 \rangle + b = -1$$
$$\Rightarrow \quad \langle \mathbf{w}, (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \rangle = 2$$
$$\Rightarrow \left\langle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}, (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right\rangle = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$$

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La formulación lineal se puede resolver mediante multiplicadores de Lagrange, $\tau(\vec{w})$ se convierte en:

$$L(\vec{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2}||\vec{w}||^2 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_i (y_i(\langle x_i, w \rangle + b) - 1)$$

- $\vec{w}$ tiene m elementos (atributos) y $\vec{\alpha}$ tiene N elementos
- Tenemos que minimizar el Lagrangiano con respecto a $\vec{w}, b$ y al mismo tiempo que las derivadas con respecto a $\vec{\alpha}$ sean cero

Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La formulación lineal se puede resolver mediante multiplicadores de Lagrange, $\tau(\vec{w})$ se convierte en:

$$L(\vec{w}, b, \alpha) = \frac{1}{2}||\vec{w}||^2 - \sum_{j=1}^{N} \alpha_i (y_i(\langle x_i, w \rangle + b) - 1)$$

- $\vec{w}$ tiene m elementos (atributos) y $\vec{\alpha}$ tiene N elementos
- Tenemos que minimizar el Lagrangiano con respecto a $\vec{w}, b$ y al mismo tiempo que las derivadas con respecto a $\vec{\alpha}$ sean cero

Vectores de soporte?

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

Las derivadas de $L(\vec{w}, b, \alpha)$ con respecto a $\mathbf{w}$ y b son cero en el punto de silla (*saddle point*):

$$\frac{\partial L(\vec{w}, b, \alpha)}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial L(\vec{w}, b, \alpha)}{\partial \mathbf{w}} = 0$$

Lo que nos lleva a:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i x_i$$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

Sustituyendo lo anterior en $L(\vec{w}, b, \alpha)$, tenemos el problema dual:

$$\text{máx}\, \mathbf{W}(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$$

Sujeto a:

$$\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, N, y \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0$$

Donde queremos maximizar con respecto a $\vec{\alpha}$
La desición es:

$$f(\vec{x}) = sign(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \vec{x}_i \cdot \vec{x} + b)$$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Porqué usar la formulación dual

- No se requiere acceder a los datos originales sino solo a los productos puntos:
  - Función objetivo: $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j y_i y_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$ objetivo) sujeta a: $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i = 0$ (restricciones)
  - Solución: $f(\vec{x}) = sign(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \vec{x}_i \cdot \vec{x} + b)$
- El número de variables libres está acotado por el número de vectores de soporte y no por el número de atributos

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

El método del Lagrangiano

- Se usa el método dual para resolver problemas de optimización con restrucciones de desigualdad
- El lagrangiano minimiza con respecto a las variables primales $\vec{w}, b$ y maximiza con respecto a las variables duales $\vec{\alpha}$
- Esto crea un punto silla, en este punto las derivadas del lagrangiano con respecto a las variables primales debe de ser cero (condiciones Karush-Kuhn-Tucker o KKT)

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

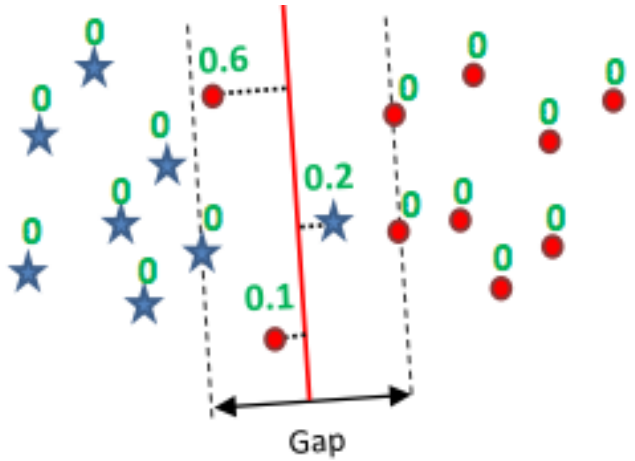
SVM resumen

- SVM es un clasificador que intenta encontrar el híper plano que maximiza la separación de ejemplos de ambas clases.
- Se minimiza $||\vec{\mathbf{w}}||$, sujeto a clasificar correctamente todos los ejemplos.
- El híper plano de decisión depende únicamente de algunos ejemplos.
- En la formulación dual se trabaja con productos punto o funciones de kernel.
- Garantizado encontrar el óptimo si los datos son linealmente separables.

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para datos no separables linealmente

- Qué hacer si los datos no son linealmente separables?



- Una posibilidad es usar variables de holgura (*slack variables*) dejando *soft-margins*
- Al asignar variables de holgura a cada instancia $\psi_i \geq 0$ se puede pensar como la distancia que separa el hiperplano de la instancia que está mal clasificada o 0 si está bien

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para datos no separables linealmente

$$\text{mín } \frac{1}{2}||\vec{w}||^2 + C\sum_{i=1}^{N}\psi_i$$

sujeto a:

$$y_i(\vec{w}\cdot\vec{x_i}+b) \geq 1-\psi_i, para, i=1,\ldots,N$$

La forma dual es:

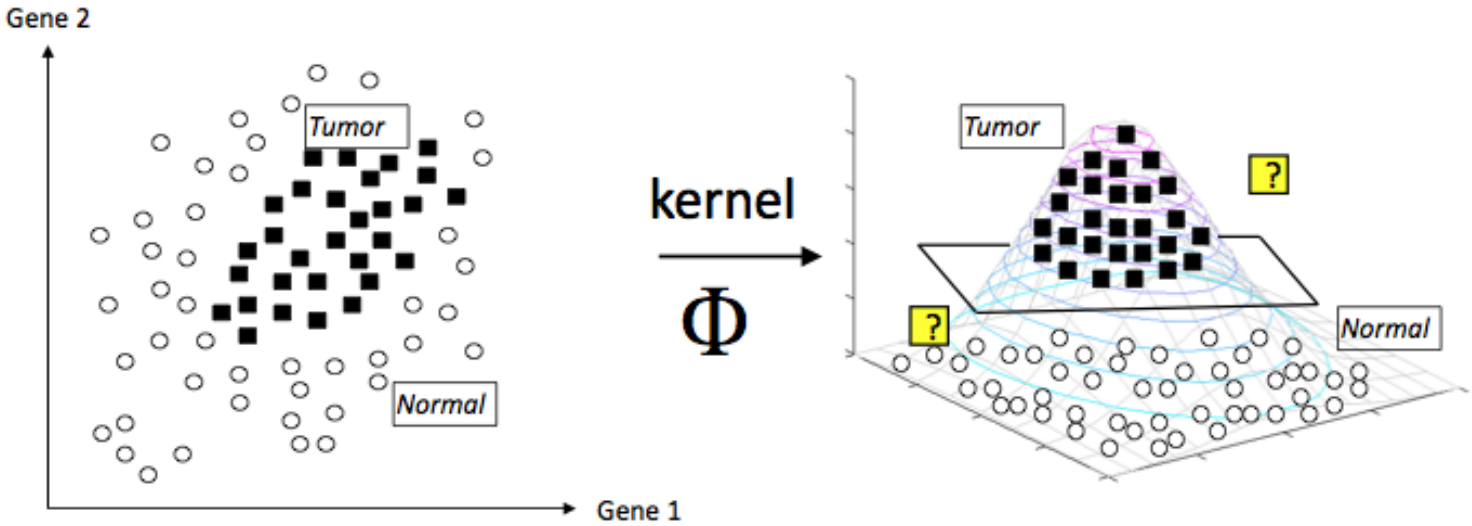
$$\text{mín } \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j \vec{x_i}\cdot\vec{x_j}$$

sujeto a:

$$0 \leq \alpha_i \leq C, y \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0$$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernel Trick



Datos que no son linealmente separables en el espacio generado por los atributos de entrada pueden ser linealmente separables en el espacio de los atributos que se obtienen a aplicar un *kernel*

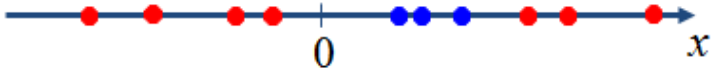
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

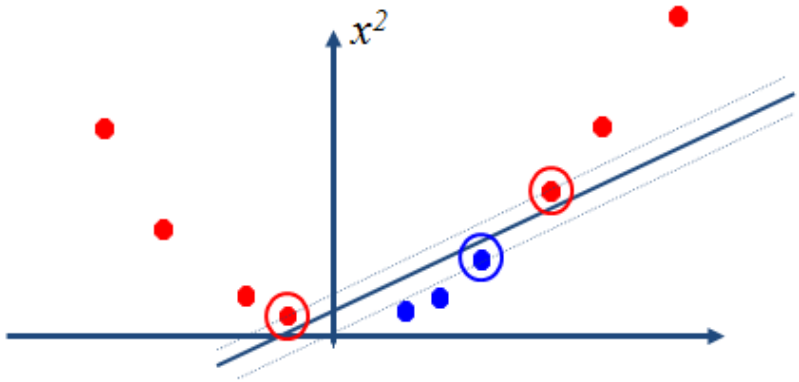
Kernel Trick

- Datos originales: $f(\vec{x}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$ con $\vec{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \vec{x}_i$
- Datos en un espacio de atributos de mayor dimensión $\Phi(\vec{x})$:
  $f(\vec{x}) = sign(\vec{w} \cdot \Phi(\vec{x}) + b)$
  $\vec{w} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \Phi(\vec{x}_i)$
  $f(\vec{x}) = sign(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i \Phi(\vec{x}_i) \cdot \Phi(\vec{x}) + b)$
  $f(\vec{x}) = sign(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i K(\vec{x}_i, \vec{x}) + b)$
- Por lo que no necesitamos saber Φ directamente, solo la función kernel $K(\cdot,\cdot) : R^N \times R^N \rightarrow R$

Kernel trick

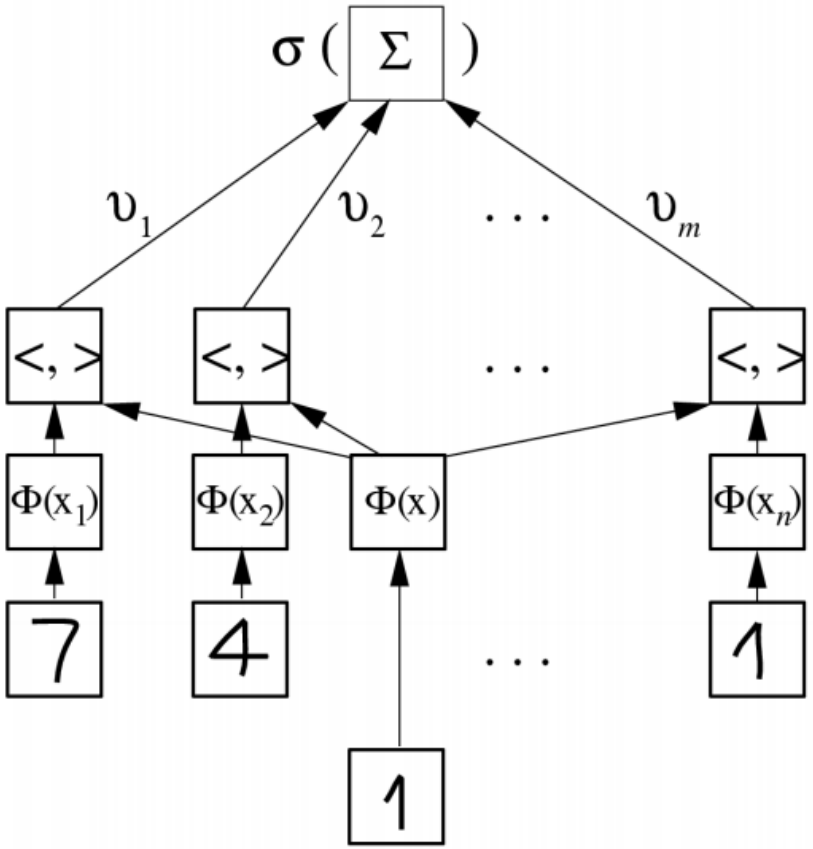
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones





Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernel trick



output $\sigma\,(\Sigma\, \upsilon_i\, k\,(x,x_i))$

weights

dot product $<\Phi(x),\Phi(x_i)> = k(x,x$

mapped vectors $\Phi(x_i)$, $\Phi(x)$

support vectors $x_1 \ldots x_n$

test vector x

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernel Trick

- Un kernel es el producto punto en un espacio de atributos: $K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = \Phi(\vec{x_i}) \cdot \Phi(\vec{x_j})$

Ejemplos:

$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = \vec{x_i} \cdot \vec{x_j}$	kernel lineal
$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = exp(-\gamma \|\|\vec{x_i} \cdot \vec{x_j}\|\|^2)$	kernel gaussiano
$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = exp(-\gamma \|\|\vec{x_i} \cdot \vec{x_j}\|\|)$	kernel exponential
$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = (p + \vec{x_i} \cdot \vec{x_j})^q$	kernel polinomial
$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = (p + \vec{x_i} \cdot \vec{x_j})^q exp(-\gamma \|\|\vec{x_i} \cdot \vec{x_j}\|\|^2)$	kernel híbrido
$K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = tanh(k\vec{x_i} \cdot \vec{x_j} - \delta)$	kernel sigmoidal

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernel Trick

- Si consideramos un kernel polinomial de grado 3: $K(\vec{x_i}, \vec{x_j}) = (p + \vec{x_i} \cdot \vec{x_j})^3$
- Si tenemos datos representados en dos dimensiones $\{x_1, x_2\}$
- Al aplicar el kernel nos queda un espacio de 10 dimensiones: $\{1, x_1, x_2, x_1x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1^3, x_2^3\}$

Kernel Trick

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

En general para patrones de dimensión m, se tienen:

$$m_{\mathcal{H}} = \binom{d+M-1}{d} = \frac{(d+m-1)!}{d!(m-1)!}$$

Monomios diferentes de grado d, resultando en un *feature space* de dimensión $M_{\mathcal{H}}$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Kernel Trick

En general para patrones de dimensión m, se tienen:

$$m_{\mathcal{H}} = \binom{d+M-1}{d} = \frac{(d+m-1)!}{d!(m-1)!}$$

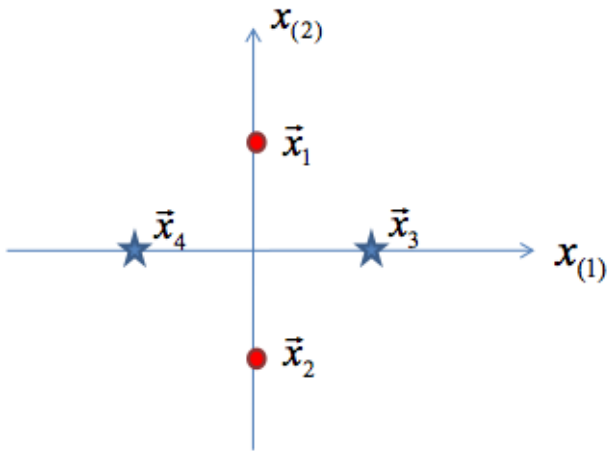
Monomios diferentes de grado d, resultando en un *feature space* de dimensión $M_{\mathcal{H}}$

Los kernels nos permiten calcular la similitud en el feature space sin tener que mapear los datos explícitamente!

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Ejemplo

- Datos que no son linealmente separables en un espacio (R^2) podemos hacerlos separables al mapearlos a otro espacio



$$K(\vec{x},\vec{z}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})^2 = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right]^2$$

Ejemplo

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

$$= [x_1 z_1 + x_2 z_2]^2 = x_1^2 z_1^2 + 2 x_1 z_1 x_2 z_2 + x_2^2 z_2^2 =$$

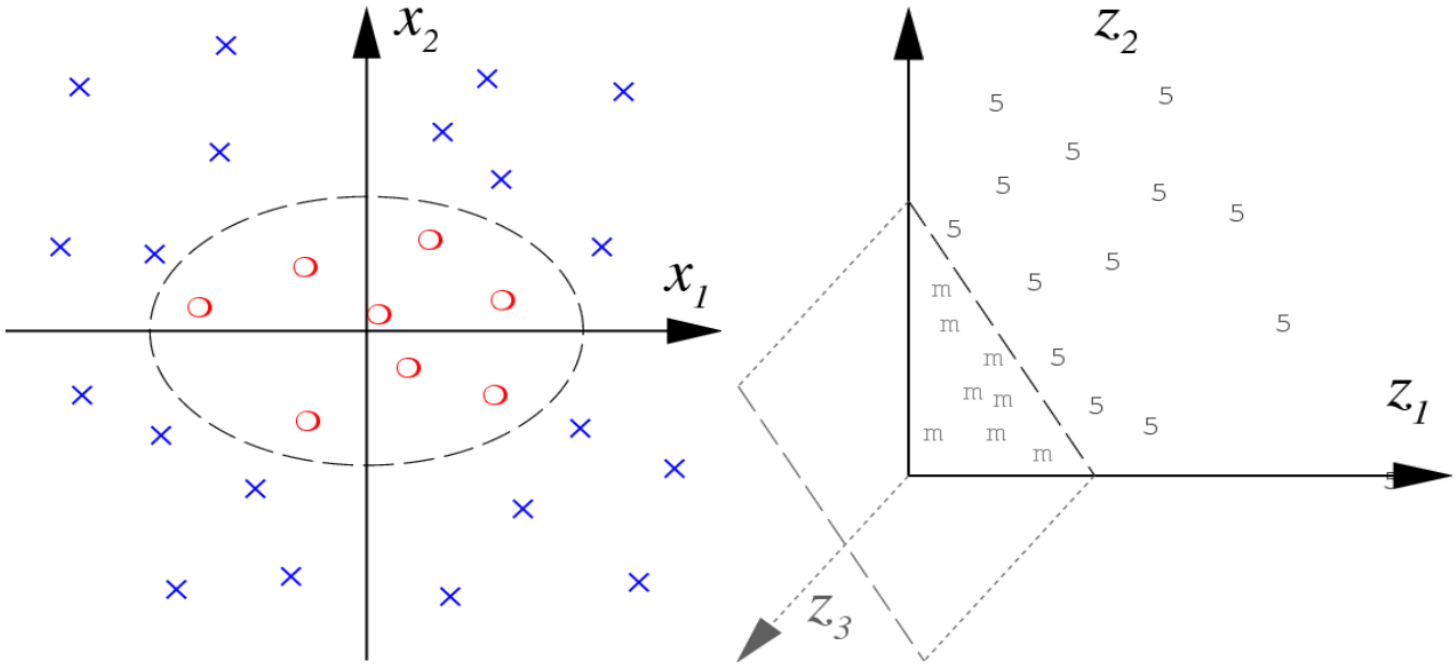
$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ \sqrt{2} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1^2 \\ \sqrt{2} z_1 z_2 \\ z_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \Phi(\vec{x}) \cdot \Phi(\vec{z})$$

El mapeo es: $\Phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \sqrt{2} x_1 x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$

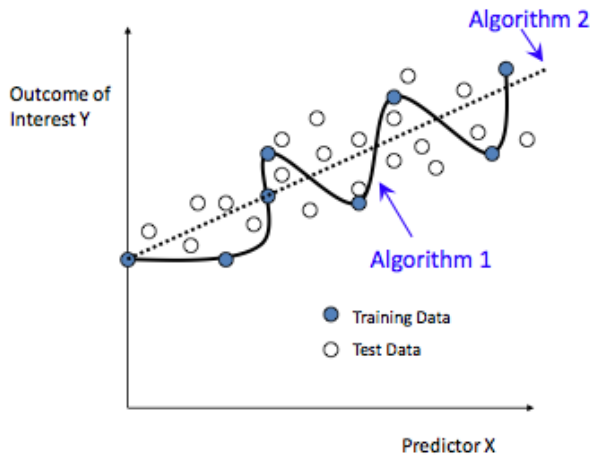
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Resultado:



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Regularización



- Muchos algoritmos buscan una función de decisión resolviendo el siguiente problema de optimización: minimizar(Pérdida + λ Penalización)
- Pérdida (*loss*) = mide el error de ajuste en los datos
- Penalización = penaliza la complejidad del modelo
- λ = un parámetro de regularización que balancea Error y Complejidad

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Regularización

- Existen diferentes modelos

Loss function	Penalty function	Resulting algorithm
Hinge loss: $\sum_{i=1}^{N}[1-y_i f(\vec{x}_i)]_+$	$\lambda\|\vec{w}\|_2^2$	SVMs
Mean squared error: $\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(\vec{x}_i))^2$	$\lambda\|\vec{w}\|_2^2$	Ridge regression
Mean squared error: $\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(\vec{x}_i))^2$	$\lambda\|\vec{w}\|_1$	Lasso
Mean squared error: $\sum_{i=1}^{N}(y_i - f(\vec{x}_i))^2$	$\lambda_1\|\vec{w}\|_1 + \lambda_2\|\vec{w}\|_2^2$	Elastic net
Hinge loss: $\sum_{i=1}^{N}[1-y_i f(\vec{x}_i)]_+$	$\lambda\|\vec{w}\|_1$	1-norm SVM

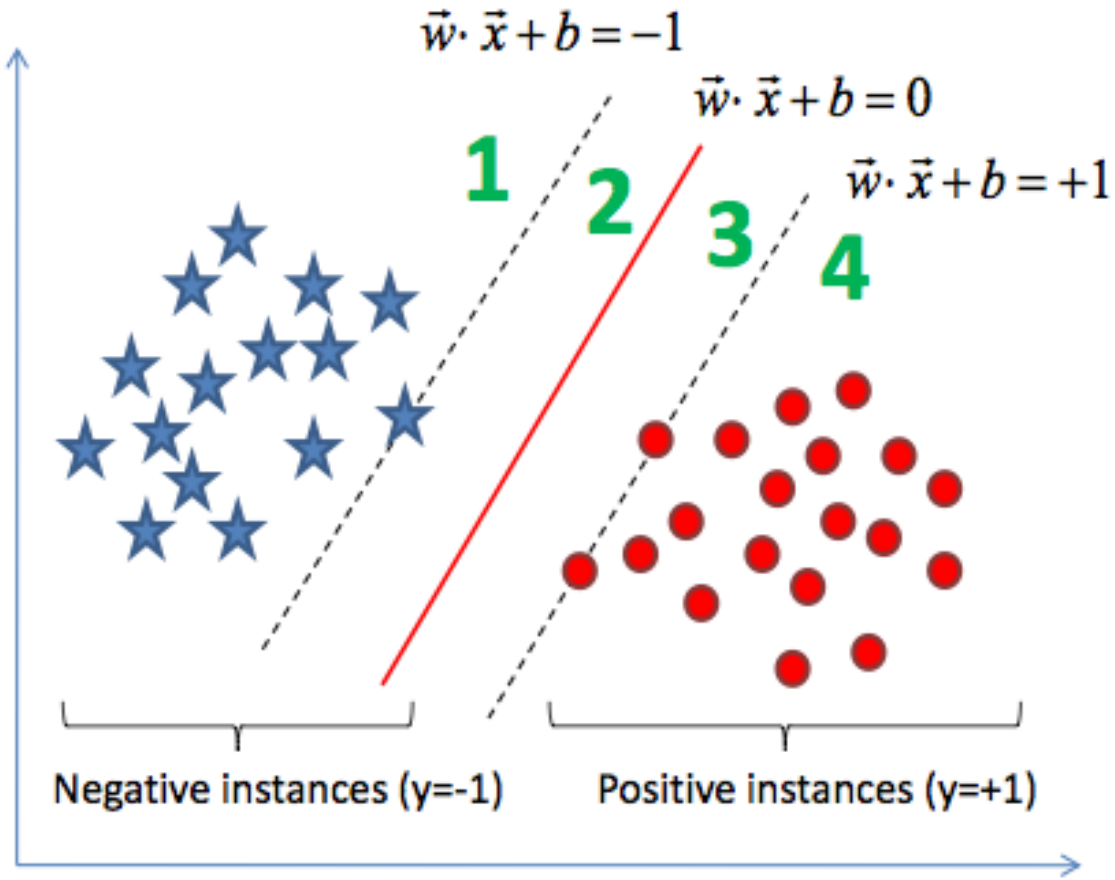
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

La función de perdida o error (*loss*)

- $\sum_{i=1}^{N}[1 - y_i f(\vec{x}_i)]_+$ donde $[...]_+$ indica la parte positiva
- La función de perdida es diferente de cero si $1 - y_i f(\vec{x}_i) > 0$, o $y_i f(\vec{x}_i) < 1$
- Como $y_i = \{-1, +1\}$, la funcion de perdidad es no cero si: $f(\vec{x}_i) < 1$ para $y_i = +1$ o $f(\vec{x}_i) > -1$ para $y_i = -1$
- Osea, para:
  - $\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b < 1$ para $y_i = +1$
  - $\vec{w} \cdot \vec{x}_i + b > -1$ para $y_i = -1$

Regularización

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Riesgo empírico y riesgo real

- Para medir que tan bien clasifica una función podemos usar lo que se conoce como *zero-one loss function*:

$$c(x, y, f(x)) = \frac{1}{2}|f(x) - y|$$

donde la "perdida" es 0 si clasifica correctamente y 1 si no (recordemos que las clases pueden ser ± 1)

- Podemos tomar esto para todos los datos y promediar el resultado:

$$R_{emp}[f] = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}|f(x_i) - y_i|$$

- Valores pequeños en el error de prueba o riesgo empírico (*empirical risk*) no necesariamente implican un error real ($R[f]$)

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

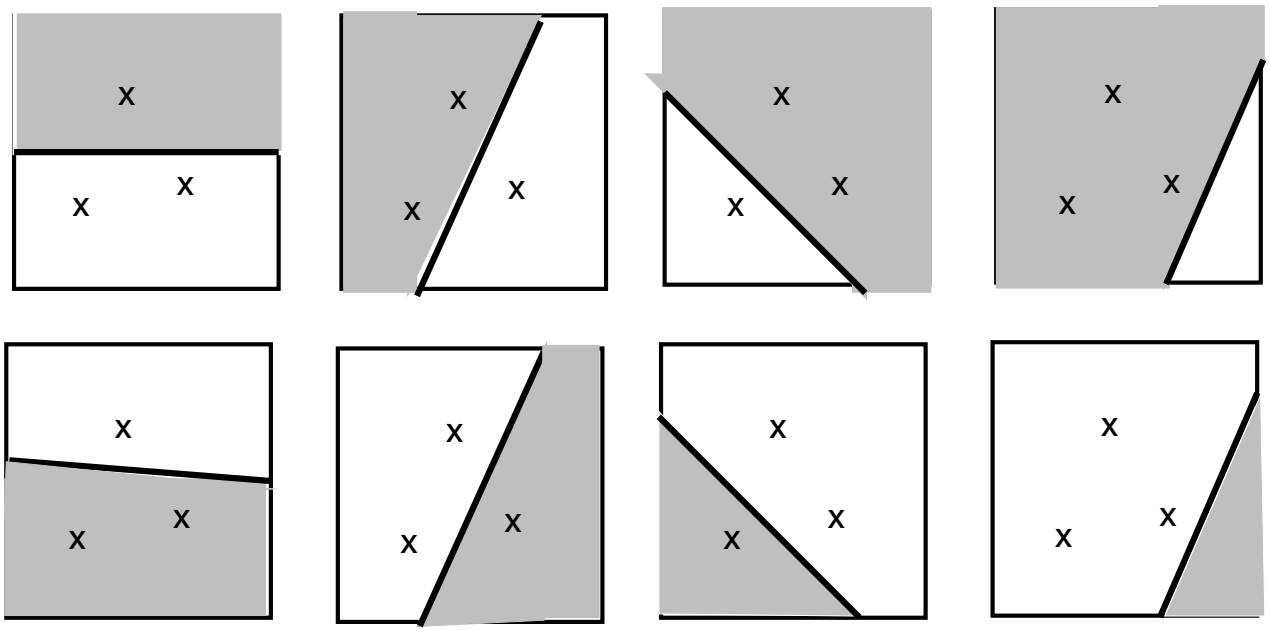
Máquinas de Soporte Vectorial

- Cada función que se elija separa los ejemplos de cierta forma. Como tenemos una etiquetación de ± 1, existen a lo más 2^m etiquetas para m ejemplos.
- Una clase de funciones suficientemente expresiva podría generar las 2^m particiones. Si ese es el caso, se dice que esa clase de funciones despedaza o *shatters* los m ejemplos.
- La dimensión VC se define como la m más grande tal que existe un conjunto de m puntos que la clase puede despedazar.
- Se puede ver como un número que define la *capacidad* de un sistema de aprendizaje.

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

- Por ejemplo, para 3 puntos y 2 clases en un plano existen 8 posibles asignaciones y una recta las puede generar, para 4 puntos ya no



Máquinas de Soporte Vectorial

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Si $h < m$ es la dimensión VC (Vapnik-Chervonenkis) de una clase de funciones que el algoritmo de aprendizaje implementa, entonces todas las funciones de la clase, independientemente de la distribución P que genera los datos, cumplen con la siguiente cota con probabilidad $1 - \delta$ sobre los datos de entrenamiento:

$$R[f] \leq R_{emp}[f] + \phi(h, m, \delta)$$

donde el término de confianza (*confidence*) o de capacidad (*capacity*) ϕ se define como:

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Máquinas de Soporte Vectorial

$$\phi(h, m, \delta) = \sqrt{\frac{1}{m}\left(h\left(ln\frac{2m}{h} + 1\right) + ln\frac{4}{\delta}\right)}$$

Lo que se busca es seleccionar una clase de funciones suficientemente restrictiva (y por lo tanto simple) que al mismo tiempo tenga la capacidad de modelar las dependencias que existen en $P(x, y)$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

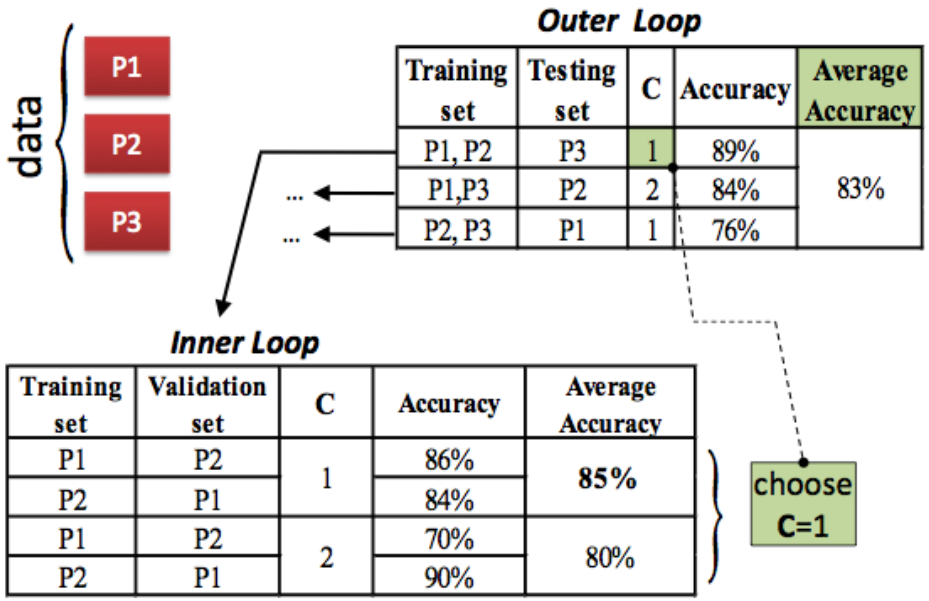
Extensiones

- Selección de modelos
- SVM para probemas multiclase (no solo binarios)
- *Support vector regression*
- Detección de “novedad” o *outliers*
- *Clustering*
- Selección de variables
- Cálculo de probabilidades de un clasificador SVM

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

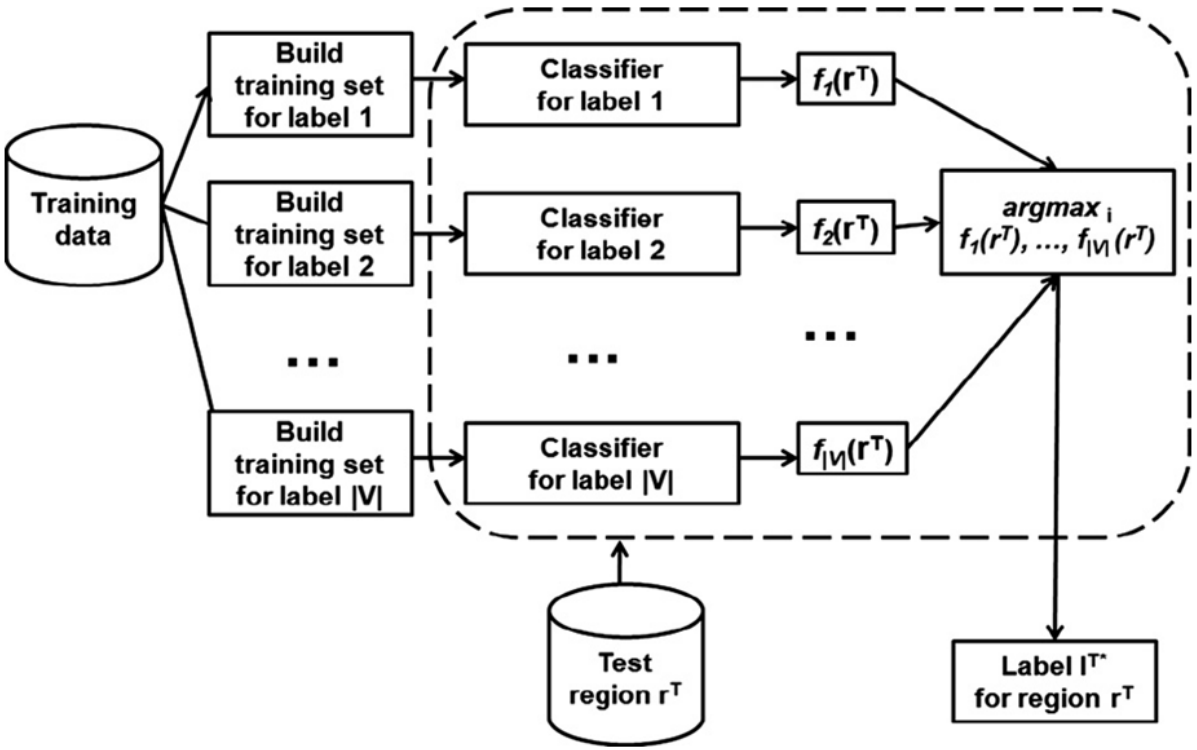
Selección de Modelos

- Seleccionar qué Kernel usar y con qué parámetros
- Por ejemplo, qué valor usar para “C” y cuál para “p”
- Algunos autores han usado un validación cruzada anidada:



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para multiclases



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

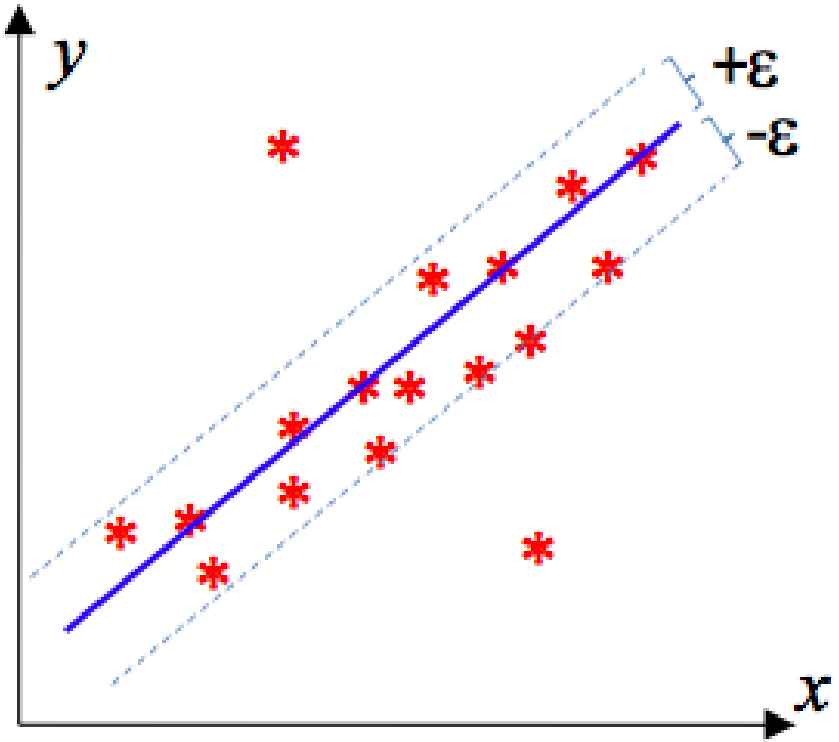
SVM para multiclases

- Si existe más de una clase, si buscamos un hiperplano que separe cada clase de las demás, pueden existir áreas en donde no queda clara cual sería la clasificación
- Algunos constuyen un grafo de decisión que toma en cuenta las diferentes hiperplanos de decisión, pero el orden del grafo importa
- Se han propuesto otros metodos para problemas multiclase

SVM para regresión (ϵ-*SVM regression*)

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La idea es encontrar una función $f(\vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$ que se acerque $y_1, \ldots, y_N$ lo más posible con un error de hasta ϵ



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

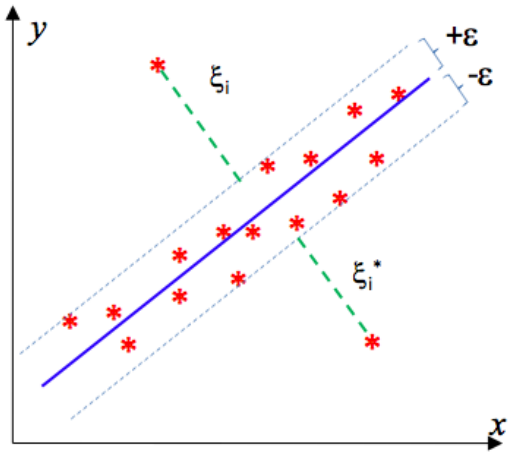
SVM para regresión (ϵ-*SVM regression*)

- Encontrar: $f(\vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$
- minimizando: $\frac{1}{2}||\vec{w}||^2$
- Sujeto a las restricciones:
  $y_i - (\vec{w} \cdot \vec{x} + b) \leq \epsilon$
  $y_i - (\vec{w} \cdot \vec{x} + b) \geq -\epsilon$

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para regresión (ϵ-*SVM regression*)

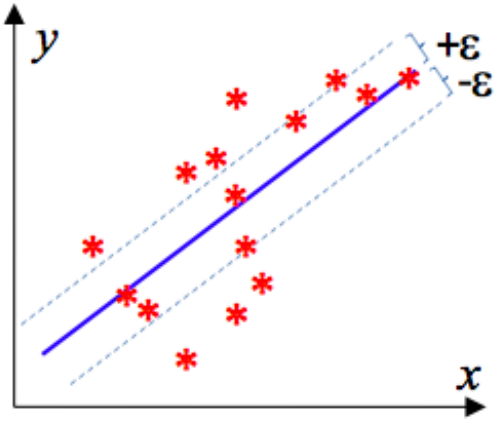
- Si tenemos valores lejanos, podemos introducir variables de holgura y penalizar a las soluciones que las contengan
- Encontrar: $f(\vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x} + b$
- Minimizando: $\frac{1}{2}||\vec{w}||^2 + C\sum_{i=1}^{N} \psi_i$
- Sujeto a las restricciones:
  $y_i - (\vec{w} \cdot \vec{x} + b) \leq \epsilon + \psi_i$
  $y_i - (\vec{w} \cdot \vec{x} + b) \geq -\epsilon - \psi_i^*$



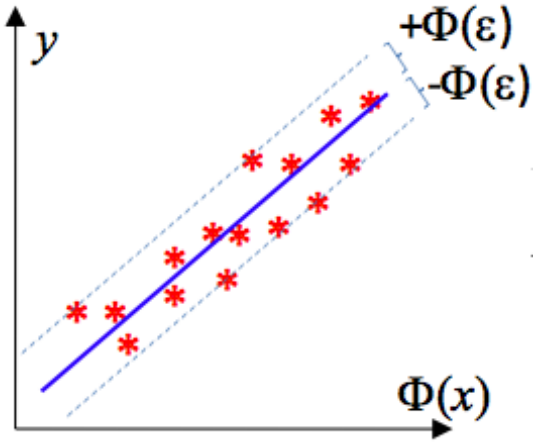
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para regresión (ϵ-*SVM regression*)

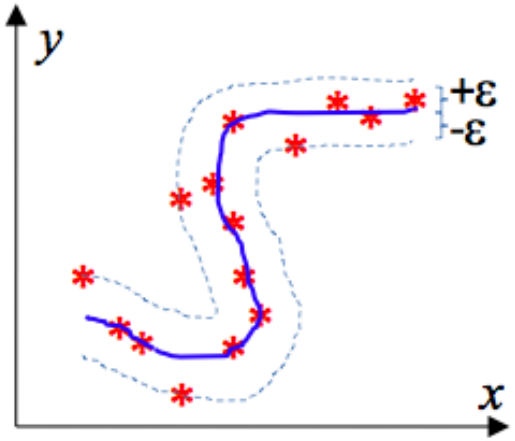
- Si no se aproxima bien una función para un ϵ pequeño, entonces se puede usar un kernel



Con kernel $\Phi(\epsilon)$:



Y al reves:



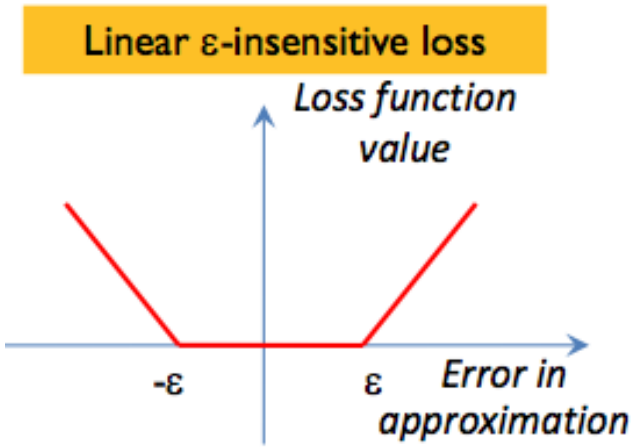
Función de pérdida para ϵ-*SVM regression*

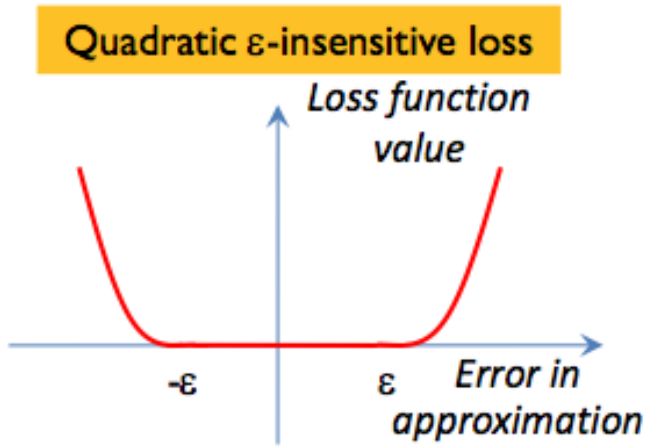
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

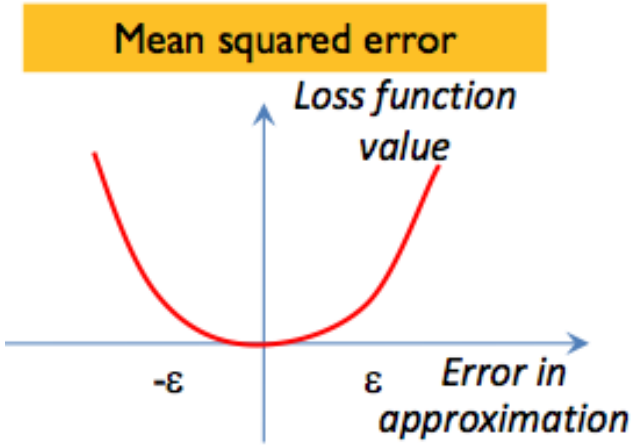
Loss function	Penalty function	Resulting algorithm
Linear ε-insensitive loss: $\sum_{i=1}^{N} \max(0, \lvert y_i - f(\vec{x}_i) \rvert - \varepsilon)$	$\lambda \lVert \vec{w} \rVert_2^2$	ε-SVR
Quadratic ε-insensitive loss: $\sum_{i=1}^{N} \max(0, (y_i - f(\vec{x}_i))^2 - \varepsilon)$	$\lambda \lVert \vec{w} \rVert_2^2$	Another variant of ε-SVR
Mean squared error: $\sum_{i=1}^{N} (y_i - f(\vec{x}_i))^2$	$\lambda \lVert \vec{w} \rVert_2^2$	Ridge regression
Mean linear error: $\sum_{i=1}^{N} \lvert y_i - f(\vec{x}_i) \rvert$	$\lambda \lVert \vec{w} \rVert_2^2$	Another variant of ridge regression

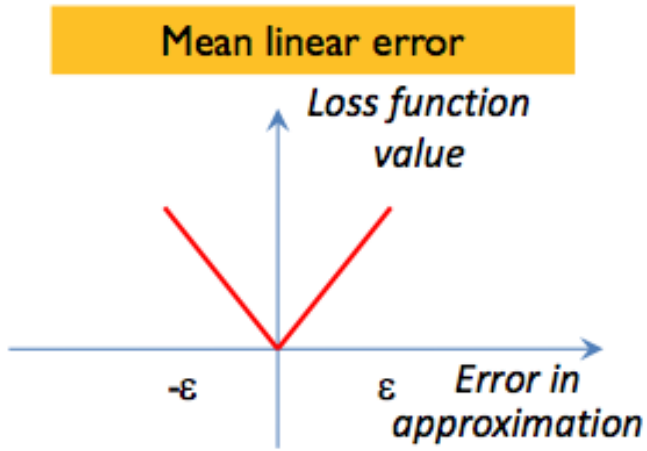
Función de pérdida para ϵ-*SVM regression*

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones









SVM para una clase

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- La idea es encontrar la región más compacta que contenga a la mayoría de los ejemplos
- Encontrar una función de decisión que tome valores $+1$ dentro de la región y -1 fuera
- Nos puede servir para encontrar *outliers*

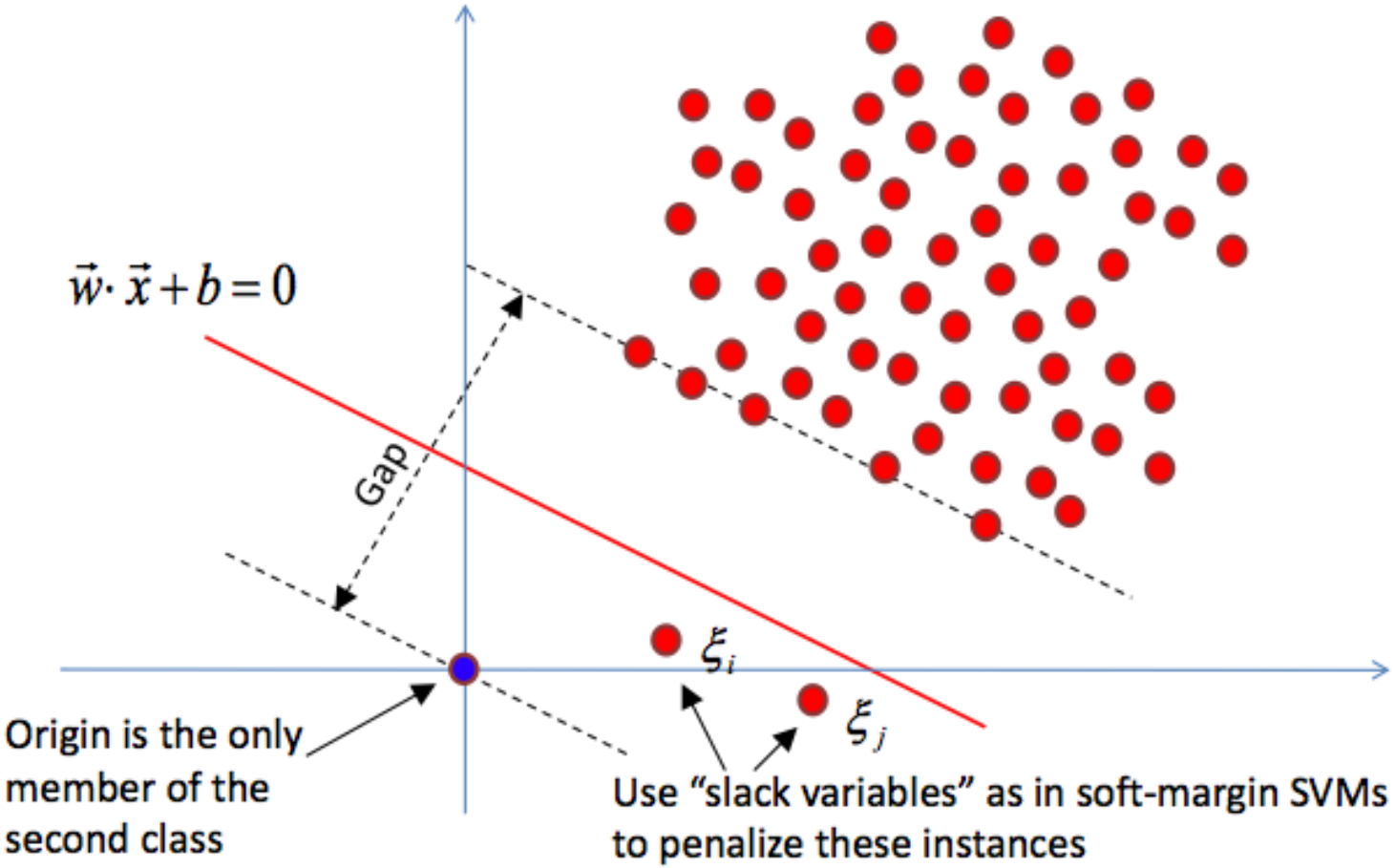
Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para una clase

- No sabemos la clase/etiqueta de los ejemplos
- Todos los ejemplos positivos son parecidos, pero los negativos pueden ser diferentes entre sí
- Encontrar el hiperplano con máxima separación entre los datos y el origen

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para una clase



Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para una clase

- De nuevo, encontrar: $f(\vec{x}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$
- minimizar $\frac{1}{2}||\vec{w}||^2 + \frac{1}{\nu N}\sum_{i=1}^{N} \psi_i + b$ sujeta a: $\vec{w} \cdot \vec{x} + b) \geq -\psi_i$ para $i = 1, \ldots, N$
- ν es la máxima fracción de *outliers* (o puntos fuera de la frontera) que se permiten en los datos

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para una clase

- Se puede hacer también su formulación dual y aplicar el “kernel trick”
- El parámetro ν afecta de manera importante la superficie de decisión
- La selección del origen es arbitraria y también afecta el resultado del algoritmo

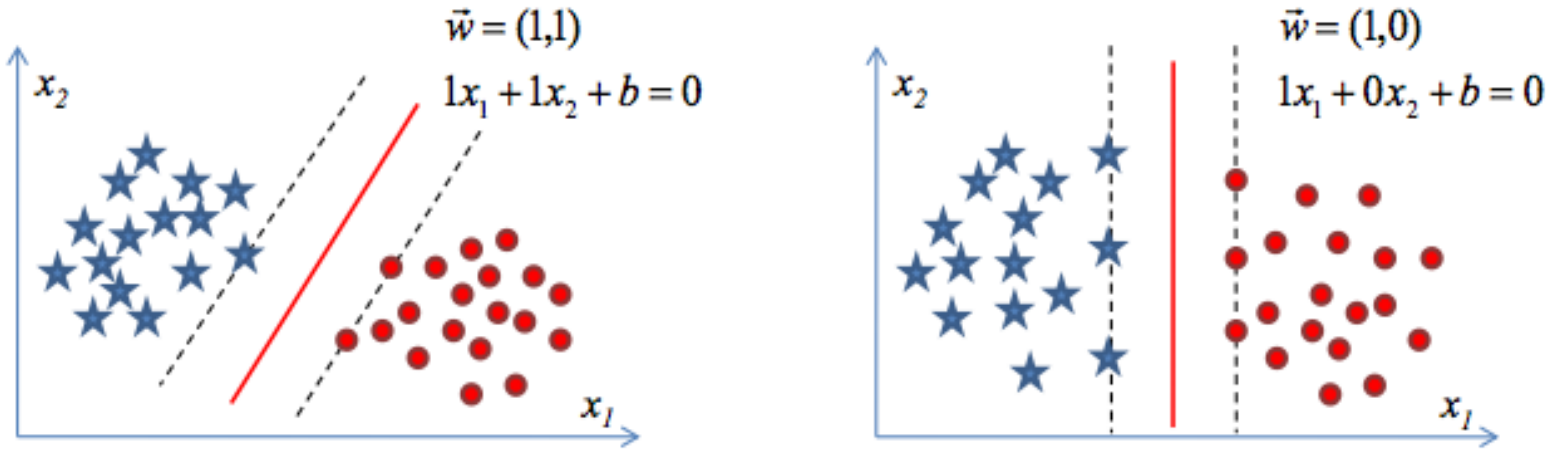
SVM para seleccionar atributos

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- En la formulación original de SVMs el vector de pesos $\vec{w}$ tiene tantos elementos como existen atributos en los datos
- La magnitud de cada elemento nos denota la importancia que tiene cada atributo en la tarea

SVM para seleccionar atributos

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones



En la figura del lado derecho x_1 y x_2 son igualmente importantes, en la de la izquierda solo x_1 es importante

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para seleccionar atributos

Algoritmo:

- Entrena el SVM para clasificar los datos
- Ordena los atributos con base en la magnitud del vector de pesos $\vec{w}$
- Selecciona el subconjunto más pequeño con buen predicción

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

SVM para seleccionar atributos

- Los pesos no son localmente consistentes, por lo que el quitar una variable puede afectar los pesos originales
- En general se tiene que volver a estimar el vector $\vec{w}$ para decidir cuál sería el siguiente atributo a eliminar
- Al aplicar un kernel se puede tener un número grande de atributos y esta selección se vuelve más relevante
- Se puede combinar con otro metodos (e.g., seleccionar la cobija de Markov)

Otros desarrollos

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

- Existes algoritmos para aplicar SVM en “clustering”
- En clasificadores SVM se puede estimar la probabilidad de salida del clasificador (calculando la distancia al hiperplano, obteniendo “bins” con frecuencia en los ejemplos de entrenamiento que reflejen la probabilidad)

Introducción
Bases Matemáticas
Un clasificador simple
Máquinas de Soporte Vectorial
SVM caso no lineal
Regularización y generalización
Extensiones
Conclusiones

Conclusiones

- Los SVMs tienen en general muy buenos resultados
- El “kernel trick” permite aprender funciones complejas no lineales y seguir resolviendo un problema de optimización cuadrático convexo
- Es robusto a ruido (variables de holgura) y la solución se define solo por un subconjunto pequeño de puntos (vectores de soporte)