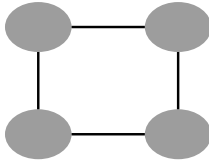


## Sesión 6: Campos de Markov



---

---

---

---

---

---

---

## Campos de Markov

- Introducción
  - Modelo de Ising
- Representación
  - Tipos de Modelos
  - Redes de Markov
- Algoritmos
- Aplicaciones

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

2

---

---

---

---

---

---

---

## Campos de Markov (CAM)

- Ciertos procesos, como un campo magnético o una imagen, se pueden ver como una serie de estados en el espacio o una malla de estados.
- A este tipo de modelos se les conoce como *Campos de Markov*.
- Estos procesos son una extensión de las cadenas de Markov en los cuales el índice de tiempo se substituye por un índice espacial

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

3

---

---

---

---

---

---

---

## Modelo de Ising

- Surgen del problema de modelar materiales ferromagnéticos en lo que se conoce como el Modelo *Ising*.
- Se tiene una serie de dipolos en una línea que pueden estar orientados hacia "arriba" (+) o hacia "abajo" (-).
- El estado de cada dipolo se ve influenciado por los dipolos cercanos - probabilidad para cada estado depende de los estado de los puntos vecinos.

Incertidumbre - CAM, L.E. Suar

4

---

---

---

---

---

---

---

---

## Modelo de Ising



Posibles configuraciones:

+ + + +  
 + + + -  
 + + - +  
 ....

Incertidumbre - CAM, L.E. Suar

5

---

---

---

---

---

---

---

---

## Modelo de Ising

- Un campo de Markov asigna probabilidad a cada configuración en el espacio de posibles configuraciones.
- Se considera que la probabilidad del estado de una variable es independiente de los demás dados sus 2 vecinos, es decir que tiene la propiedad Markoviana

$$P(S_n = q_i | S_1 = q_j, S_2 = q_k, \dots) = P(S_n = q_i | S_{n-1} = q_j, S_{n+1} = q_k)$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Suar

6

---

---

---

---

---

---

---

---

## Probabilidades

- Dadas las probabilidades condicionales de cada estado dados los vecinos, el problema central es encontrar la probabilidad de cada una las posibles configuraciones, y en particular cual es la configuración más probable.
- Calcular la probabilidad conjunta dadas las probabilidades “condicionales” locales:

$$P(S_1, S_2, \dots, S_N) = \prod_{ij} p(S_i | S_j)$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

7

---

---

---

---

---

---

---

## Probabilidades

- Podemos distinguir dos factores que determinan la probabilidad de una configuración:
  - la P *a priori* de cada estado.
  - la P conjunta con sus vecinos.
- En el modelo de *Ising*, estos corresponden a la influencia de un campo magnético externo, y a las interacciones entre los dipolos vecinos.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

8

---

---

---

---

---

---

---

## Campos en 2-D

- Esto lo podemos extender de una dimensión a dos dimensiones. En este caso tenemos una malla de puntos, donde el estado de cada punto depende del estado de sus vecinos (4, 8, etc).

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

9

---

---

---

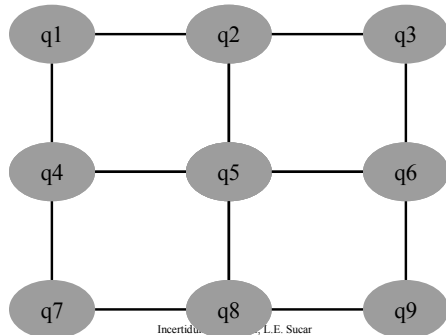
---

---

---

---

## Ejemplo



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

10

## Representación

- Un campo aleatorio es una colección de variables aleatorias indexadas por sitios.
- Se considera un conjunto de variables aleatorias  $F = \{F_1, \dots, F_M\}$ , asociadas a cada sitio del sistema de sitios  $S$ . Cada variable toma un valor  $f_i$  de un conjunto de posibles valores  $L$ . Entonces  $F$  es un *campo aleatorio*.
- Un *campo aleatorio de Markov (CAM)* es un campo aleatorio con la propiedad de "localidad".

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

11

## Propiedades

Un CAM debe satisfacer las siguientes propiedades:

- $P(f) > 0$  – *positivo*
- $P(f_i | f_{s-i}) = P(f_i | \text{vec}(f_i))$

Donde  $\text{vec}(f_i)$  son los vecinos de  $f_i$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

12

## Vecindad

Un sistema de vecindad para  $S$  se define como:

$$V = \{V_i \mid \forall_i \in S\}$$

- Cumple con las siguientes dos propiedades:
  1. Un sitio no es vecino de si mismo.
  2. La relación de vecindad es mutua.
- Se pueden tener diferentes "vecindades" (primer orden, segundo orden, etc.).

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

13

---

---

---

---

---

---

---

---

## Vecindad

Para una malla regular, la vecindad de  $i$  con radio se define como:

$$V_i = \{v_{(i)} \in S \mid \text{dist}(i, v(i)) \leq r\}$$

Donde  $\text{dist}(x, y)$  es la distancia euclidiana entre  $x$  y  $y$ .

En un sistema de vecindad de primer orden, cada sitio (interior) tiene 4 vecinos; en uno de segundo orden, 8 vecinos; en uno de tercer orden, 12 vecinos, etc.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

14

---

---

---

---

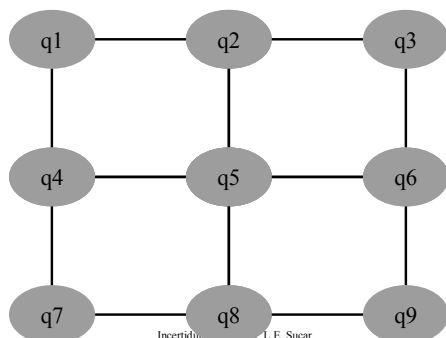
---

---

---

---

## Ejemplo – 1er orden



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

15

---

---

---

---

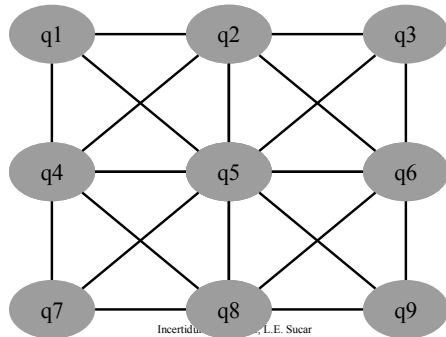
---

---

---

---

### Ejemplo – 2do orden



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

16

---

---

---

---

---

---

---

---

### Conjuntos Completos

El conjunto de sitios junto con las vecindades nos definen un grafo no-dirigido:  $G=(S, V)$ .

Un *conjunto completo* ( $C$ ) se define como un subconjunto de sitios de forma que están todos conectado contra todos

Un *conjunto completo* puede ser un solo sitio,  $C_1$ , un par de sitios vecinos,  $C_2$ , una triplete de vecinos,  $C_3$ , y así sucesivamente. De forma que la colección de  $C$  para un grafo esta dada por:

$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

17

---

---

---

---

---

---

---

---

### Redes de Markov

- Podemos considerar los CAM como un caso especial de un modelo más general – que son las *Redes de Markov*
- Las redes de Markov (RM) son modelos gráficos probabilísticos no-dirigidos, que representa las dependencias e independencias de un conjunto de variables
- Un subconjunto  $A$  de variables es independiente de otro subconjunto  $C$  dado un tercer subconjunto  $B$ , si los nodos en  $B$  separan en el grafo  $A$  de  $C$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

18

---

---

---

---

---

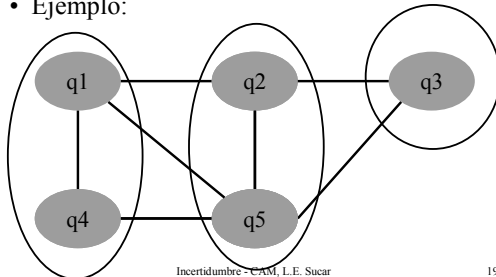
---

---

---

## Redes de Markov

- Ejemplo:



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

19

---

---

---

---

---

---

---

---

## Redes de Markov

- Parametrización:

- Podemos en general representar la probabilidad conjunta de una RM como el producto de las probabilidades locales (potenciales) de conjuntos completos con un factor de normalización:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1/z P(C_1) P(C_2) \dots P(C_m)$$

- Es suficiente considerar sólo los *cliques*, pero también se pueden considerar otros conjuntos (esto se hace porque es conveniente en la práctica)

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

20

---

---

---

---

---

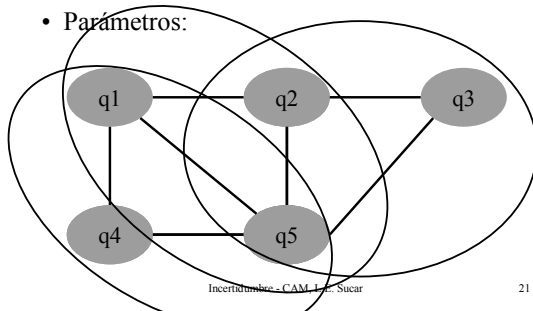
---

---

---

## Redes de Markov

- Parámetros:



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

21

---

---

---

---

---

---

---

---

## Campo de Gibbs

Lo anterior también se puede obtener mediante una analogía entre los CAM y los Campo *Aleatorio de Gibbs* (CAG).

Una distribución de Gibbs tiene la siguiente forma (Z es una constante de normalización):

$$P(f) = \frac{1}{Z} \exp\left[-\frac{U(f)}{T}\right]$$

Donde:

$$Z = \sum_{f \in F} \exp\left[-\frac{U(f)}{T}\right]$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

22

---

---

---

---

---

---

---

---

## Campo de Gibbs

$U(f)$  se conoce como la función de energía y se obtiene como la suma de los *potenciales* de todos los C:

$$U(f) = \sum_c V_c(f)$$

T es una constante que se llama temperatura (se puede asumir igual a uno). La configuración más probable corresponde a la de energía mínima.

La función de energía se puede expresar en términos de los C de cada tamaño:

$$U(f) = \sum_{c1} V_1(f_i) + \sum_{c2} V_2(f_i, f_j) + \sum_{c3} V_3(f_i, f_j, f_k) + \dots$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

23

---

---

---

---

---

---

---

---

## Campo de Gibbs

Para una vecindad de primer orden:

$$U(f) = \sum_{c1} V_1(f_i) + \sum_{c2} V_2(f_i, f_j)$$

Se puede demostrar que un CAM y el correspondiente CAG son equivalentes.

Esto permite que se pueda expresar la probabilidad conjunta especificando los potenciales de los C. En la práctica se seleccionan los potenciales de acuerdo al comportamiento deseado – con los potenciales se codifica el conocimiento *a priori* del problema.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

24

---

---

---

---

---

---

---

---

## Configuración más probable

Podemos usar un CAM para obtener la probabilidad (valor más probable) de una configuración dada cierta información (observaciones). Para esto aplicamos el teorema de Bayes:

$$P_{F/G}(f) = k P_F(f) P_{F/G}(f)$$

Donde el primer término lo podemos interpretar como el conocimiento previo del mundo (depende de la aplicación) y el segundo como la información obtenida (que suponemos que tiene ruido).

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

25

---

---

---

---

---

---

---

---

## Configuración más probable

Podemos expresar la probabilidad conjunta, como el producto de las probabilidades de las vecindades:

$$P_{F/G}(f) = k \prod_c P_c$$

Tomando logaritmos se puede expresar como una suma (CAG):

$$P_{F/G}(f) = \left(\frac{1}{Z}\right) \exp[-U_p(f)]$$

Para el caso de vecindad de primer orden:

$$U_p(f) = \sum_c V_c(f) + \lambda \sum_o V_o(f)$$

26

---

---

---

---

---

---

---

---

## Configuración más probable

- $V_c$  corresponde a  $P_F$  o la información del dominio dada por los vecinos y  $V_o$  corresponde a  $P_{G/F}$  o la información de las observaciones;  $\lambda$  es una constante que da el peso relativo entre ambas.
- Bajo este enfoque, la solución a un problema particular corresponde en encontrar la configuración del CAM de mayor probabilidad o de "energía" ( $U_p$ ) mínima. La función que se logre depende de la forma de las funciones para  $V_c$  y  $V_o$ .

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

27

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo

- Por ejemplo, podemos querer “suavizar” una imagen; es decir, minimizar la “distancia” de cada, pixel a sus vecinos, pero también mantenerlo cercano a su valor en la imagen (observación):

$$V_c(f) = (f - u)^2$$

$$V_o(f) = (f - g)^2$$

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

28

---

---

---

---

---

---

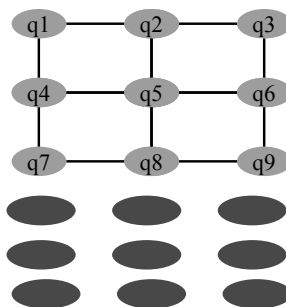
---

---

## Ejemplo

F  
imagen “suavizada”

G  
imagen “original”



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

29

---

---

---

---

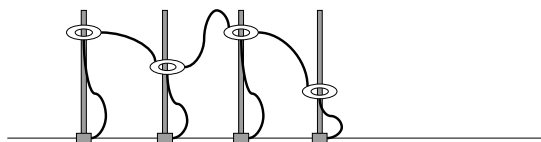
---

---

---

---

## Analogía Física



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

30

---

---

---

---

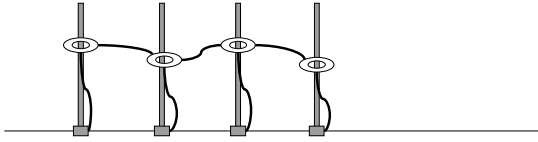
---

---

---

---

## Analogía Física



Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

31

---

---

---

---

---

---

---

## Algoritmos

- El obtener la configuración de mayor probabilidad (mínima energía) en forma directa es casi imposible, por lo que se plantea como un problema de optimización. Se busca la configuración de mayor probabilidad, sin tener que calcular directamente las probabilidades de cada configuración.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

32

---

---

---

---

---

---

---

## Algoritmos

- El problema incluye 3 aspectos:
  1. Representación: CAM con un esquema de vecindad y los potenciales asociados
  2. Función objetivo: Función de energía a minimizar.
  3. Algoritmo de optimización: simulación estocástica (Metropolis)

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

33

---

---

---

---

---

---

---

## Algoritmo básico

- Inicializar con un valor aleatorio cada variable.
- Repetir:
  - Calcular el valor de energía (potencial) de cada variable en base a la función deseada y los valores de los vecinos.
  - Si el valor de energía es menor al anterior cambiar de valor.
  - Si no, con cierta probabilidad también cambiar de valor.
- Hacer para todas las variables en el campo
- Hasta que se cumplan N iteraciones u otro criterio de terminación
- Obtener configuración “óptima”

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

34

---

---

---

---

---

---

---

## Variantes

### Cálculo del óptimo:

- MAP: se toma el valor para cada variable al final de las iteraciones.
- MPM: se toma el valor de mayor frecuencia de acuerdo a su ocurrencia durante la simulación.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

35

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo

- Dada la siguiente imagen:
- Consideramos:
  - Configuración inicial de ceros
  - Vecindad de primer orden
  - Potenciales de suavizamiento con  $\lambda=4$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

36

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo

1era iteración:

- 1er sitio:  
 $V1(0) = 0$   
 $V1(1) = 4$
- ...
- ...

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

37

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo

- 1er sitio:  
 $V1(0) = 0$   
 $V1(1) = 4$
- ...
- ...
- 11vo sitio:  
 $V11(0) = 2$   
 $V11(1) = 4$
- ...

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

38

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo

2da iteración

- ...
- 11ovo sitio:  
 $V11(0) = 4$   
 $V11(1) = 4$
- ...

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

39

---

---

---

---

---

---

---

---

## Variantes

### Forma de optimización:

- Metrópolis: con probabilidad fija; se puede pasar a estados de mayor energía.
- Recocido simulado: se va decrementando la probabilidad de pasar a estados de mayor energía (temperatura).
- ICM: tomar siempre el estado de menor energía.

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

40

---

---

---

---

---

---

---

## Probabilidades de transición

- Probabilidad de transición a estado de mayor energía:

$$P = e^{-\delta V / T}$$

- Donde  $\delta V$  es la diferencia de energía y  $T$  es la *temperatura*

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

41

---

---

---

---

---

---

---

## Aplicaciones

- Procesamiento de imágenes
  - Eliminación de ruido
  - Filtrado de una imagen
  - Segmentación de texturas
  - Visión estereoscópica
  - Recuperación de forma (3-D)
  - Reconocimiento de objetos

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

42

---

---

---

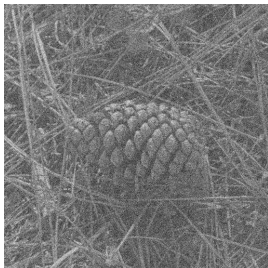
---

---

---

---

## Ejemplo – eliminación de ruido



Incertidumbre - CAM, L.E. Súcar

43

---

---

---

---

---

---

---

## Ejemplo – eliminación de ruido



Incertidumbre - CAM, L.E. Súcar

44

---

---

---

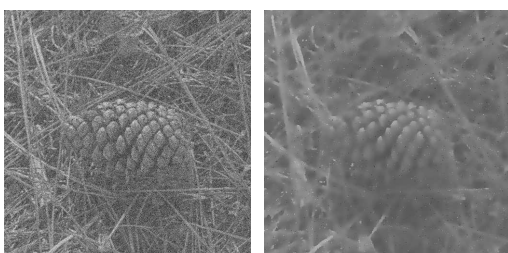
---

---

---

---

## Ejemplo – eliminación de ruido



Incertidumbre - CAM, L.E. Súcar

45

---

---

---

---

---

---

---

## Referencias

- Li, “Markov Random Fields Models in Computer Vision”, Springer-Verlag
- Chellapa, Jain, “Markov Random Fields: Theory and Models”, Academic Press.
- Notas Jordan: Capítulos 2 y 9

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

46

---

---

---

---

---

---

---

## Actividades

- Hacer ejercicio de Campos de Markov

Incertidumbre - CAM, L.E. Sucar

47

---

---

---

---

---

---

---