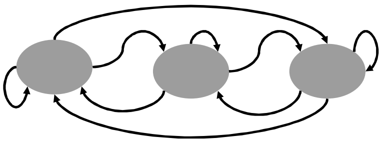
Sesión 5: Modelos Ocultos de Markov



Modelos Ocultos de Markov

- Cadenas de Markov
  - Preguntas básicas
  - Aplicación: orden en Google
- Modelos Ocultos de Markov
- Problemas básicos
  - Evaluación
  - Secuencia óptima
  - Aprendizaje
- Aplicaciones
  - Reconocimiento de voz
  - Reconocimiento de gestos

Máquina de estados

- Es un modelo para procesamiento de información especificado por:
  - Un conjunto de estados, S
  - Un estado inicial, S_0
  - Un conjunto finito de entradas, I
  - Un conjunto finito de salidas, S
  - Una función de transición de S_i -> S_j
  - Una función de salida de S_i -> O

Cadena de Markov (CM)

- Máquina de estados finitos en la que:
  - Las transiciones de un estado a otro no son determinísticas
  - La probabilidad de transición de un estado a otro sólo depende del estado actual (y no de los anteriores) – propiedad de Markov

Ejemplo

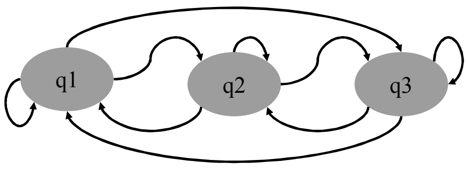
- Estados del clima:
  - Lluvioso (q1)
  - Nublado (q2)
  - Soleado (q3)
- Probabilidades de transición:

	Ll	Nub	Sol
Ll	0.4	0.3	0.3
Nub	0.2	0.6	0.2
Sol	0.1	0.1	0.8

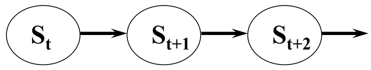
- Probabilidades iniciales:

Ll	Nub	Sol
0.3	0.5	0.2

Ejemplo – diagrama de estados



MM – modelo gráfico



Especificación de una CM

- Conjunto de estados $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$
- Una vector de probabilidades iniciales, $\Pi = \{\pi_1 \ldots \pi_n\}$, $\pi_i = P(S_0 = q_i)$
- Un matriz de probabilidades de transición, $A = \{a_{ij}\}$, donde $a_{ij} = P(S_t = q_j \mid S_{t-1} = q_i)$
- En forma compacta:
  $\Lambda = \{A, \Pi\}$

Propiedades

1. $\Sigma_j\, a_{ij} = 1$
2. $P(S_t=q_j \mid S_{t-1}=q_i, S_{t-2}=q_k, \ldots)$
   $= P(S_t=q_j \mid S_{t-1}=q_i)$

Salidas

- A cada estado le corresponde una salida, O_i
- Una secuencia de observaciones de t = 1 a t = T se denota por:

$$O = \{o_1 \ldots o_T\}$$

1. $\Sigma_i \pi_i = 1$

Preguntas básicas

- Probabilidad de pertenencia: probabilidad de cierta secuencia de estados
- Probabilidad de permanencia: probabilidad de que permanezca en cierto estado por cierto tiempo
- Permanencia promedio: tiempo esperado de permanencia en un estado

Preguntas

- Probabilidad de pertenencia:

$$P(q_j\ q_k\ q_l \ldots) = a_{0j}\ a_{jk}\ a_{kl} \ldots$$

- Probabilidad de permanencia:

$$P(d_i) = a_{ii}^{\ d-1}(1 - a_{ii})$$

- Permanencia promedio:

$$E\{d\} = \Sigma\, d_i\, P(d_i)$$

$$E\{d\} = \Sigma\, d_i\, a_{ii}^{\ d-1}(1 - a_{ii}) = 1/(1 - a_{ii})$$

Ejemplos de Preguntas

Dado el modelo del clima -

- Probabilidad de pertenencia:
  - Dado que el tiempo inicial es soleado, cual es la P de que sea sol, sol, lluv, lluv, sol, nub, sol?
- Probabilidad de permanencia:
  - Probabilidad de que este nublado por 3 días seguidos?
- Permanencia promedio:
  - Tiempo esperado que permanezca nublado?

Estimación de parámetros

- Dada una secuencia de observaciones, se pueden determinar los parámetros (A, Π) del modelo:
  - Probabilidades iniciales: $\pi_i \sim \gamma_{0i} / N$
  - Probabilidades de transición: $a_{ij} \sim \gamma_{ij} / \gamma_i$
- Donde:
  - γ_{0i} = número de veces que el estado i es el inicial
  - γ_i = número de veces que pasa por el estado i
  - γ_{ij} = número de transiciones del estado i al j

Ejemplo de estimación

- Obtener los parámetros del modelo dadas las secuencias:

q2q2q3q3q3q3q1
q1q3q2q3q3q3q3
q3q3q2q2
q2q1q2q2q1q1q3

Convergencia

- Otra pregunta interesante es: ¿Si se "transita" la cadena un gran número de veces, a la larga cuál es la probabilidad de cada estado (en el límite)?
- Dada una probabilidad inicial, π, la probabilidad después de *N* iteraciones se obtiene multiplicando π por A x A x A …:

$$p = \pi A^N$$

- Después de un cierto número, normalmente el valor de *p* ya prácticamente no cambia

Convergencia

Ejemplo:

A =	0	1.0000	0
	0	0.1000	0.9000
	0.6000	0.4000	0

π = 0.5000 0.2000 0.3000

Si multiplicamos p * A:

1. 0.1800 0.6400 0.1800
2. 0.1080 0.3160 0.5760

10. 0.2358 0.4190 0.3452

En el límite:

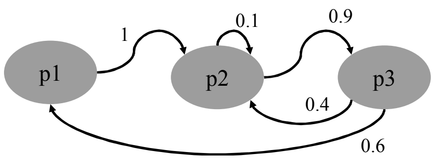
p = 0.2 0.4 0.4

Teorema de Perron-Frobenius

- Dadas ciertas condiciones, la cadena converge a un distribución invariante *p*, tal que: $p\,\boldsymbol{A} = p$
- Condiciones:
  1. Irreducible: de cualquier estado hay cierta probabilidad de visitar los demás estados
  2. Aperiódica: la cadena no cae en *ciclos*
- La rapidez de convergencia está determinada por el *segundo eigen-valor* de A

Aplicación: orden (rank) de Google

- Podemos representar la Web como una CM, donde cada estado es un página y los arcos representan las ligas que apuntan a cada página



Aplicación: orden (rank) de Google

- La probabilidad a la que converge la cadena provee una estimación de que tan probable es que una persona visite una página en cierto momento
- Google basa su orden (importancia) de las páginas que encuentra para cierta búsqueda en éstas probabilidades

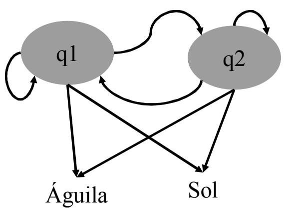
Modelos Ocultos de Markov (HMM)

- Es un modelo de Markov en que los estados no son directamente observables
- Se puede ver como un doble proceso estocástico:
  - Un proceso estocástico "escondido" que es no observable
  - Otro proceso estocástico que produce la secuencia de observaciones

Ejemplo

- Se tienen dos monedas (M1 y M2) que se seleccionan en forma aleatoria
- Cada moneda esta cargada:
  - M1 – P=0.8 de águila
  - M2 – P=0.8 de sol
- Se tiran en secuencia (N) las moneda y sólo se observa la salida (A o S)

Ejemplo



Especificación de un HMM

- Conjunto de estados $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$ y de posibles observaciones O $\{o_1 \ldots o_m\}$
- Una vector de probabilidades iniciales,

  $\Pi = \{\pi_1 \ldots \pi_n\}$, $\pi_i = P(S_0 = q_i)$
- Un matriz de probabilidades de transición,

  $A = \{a_{ij}\}$, donde $a_{ij} = P(S_t = q_j \mid S_{t-1} = q_i)$
- Un vector de probabilidades de salida por cada estado (matriz),

  $B = \{b_{ik}\}$, donde $b_{ik} = P(O_t = o_k \mid S_t = q_i)$
- En forma compacta:

  $\lambda = \{A, B, \Pi\}$

Ejemplo - especificación

- P:

  0.5 0.5
- A:

  0.5 0.5

  0.5 0.5
- B:

  0.8 0.2

  0.2 0.8

Preguntas básicas

- Dado el modelo, calcular la probabilidad de una secuencia de observaciones (evaluación)
- Dado el modelo, obtener la secuencia de estados más probable correspondiente a una secuencia de observaciones (secuencia óptima)
- Dada una secuencia de observaciones, ajustar los parámetros del modelo (aprendizaje)

Evaluación – método directo

- Dada la secuencia de observaciones:

  $O_1\ O_2\ O_3\ O_4\ \ldots$
- Pueden ser generados por diferentes secuencias de estados, considerando una:

  $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ \ldots$
- Entonces la probabilidad de las observaciones y dicha secuencia de estado es:

$P(O, Qi) = \pi_{q1}\ b_{q1}\ (O_1)\ a_{q12}\ b_{q2}\ (O_2)\ _{\ldots}\ a_{q(T-1)T}\ b_{qt}\ (O_T)$

Evaluación – método directo

- Considerando todas las secuencias:

  $P(O) = \Sigma_Q \, P(O, Qi)$
- Qué es lo mismo que:

$P(O) =$

$$\Sigma_Q \, [\, \pi_{q1} \, b_{q1} \, (O_1) \, a_{q12} \, b_{q2} \, (O_2) \, _{\dots} \, a_{q(T-1)T} \, b_{qt} \, (O_T) \,]$$

Evaluación – método directo

- Número de operaciones
  - Para cada término:

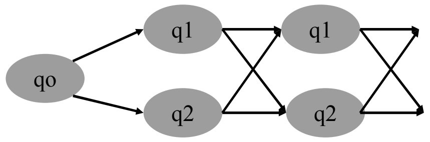
    2T
  - Número de posibles secuencias (sumatoria)

    N^T
  - Total:

    $2T \times N^T$
- Por ejemplo, N=5 y T=100 -> 10^{72} operaciones!
- Se requiere de un método más eficiente!

Evaluación – método iterativo

- Se basa en la idea de ir evaluando en paralelo la probabilidad de estados/observaciones para cada tiempo



Evaluación – método iterativo

- Se define la variable "forward":

  $\alpha_t(i) = P(O_1\ O_2\ O_3\ O_4\ \ldots\ O_t\ ,\ S_t = q_i)$

- Es decir, la probabilidad de una secuencia parcial de observaciones y que llegue a cierto estado

Algoritmo

1. Inicialización

   $\alpha_1(i) = P(O_1, S_1 = q_i) = \pi_i\, b_i\,(O_1)$
2. Inducción

   $\alpha_{t+1}(i) = [\, \Sigma_i\ \alpha_t(i)\ a_{ij}\ ]\ b_j\,(O_{t+1})$
3. Terminación

   $P(O) = \Sigma_i\ \alpha_T(i)$

Complejidad

- En cada iteración se tiene del orden de N multiplicaciones y N sumas
- Para las T iteraciones:

  $N^2 \times T$
- Para N=5 y T=100 -> 2,500 operaciones

Secuencia óptima

- Encontrar la secuencia de estados *óptima* dada la secuencia de observaciones
- Óptimo se puede definir de diferentes maneras:
  – Estados más probables
  – Secuencia total más probable

Definiciones

- Variable "*backward*":

$$\beta_t(i) = P\ (O_{t+1}\ O_{t+2} \ldots O_T\ , S_t = q_i)$$

- En forma iterativa:

$$\beta_t(j) = [\ \Sigma_j\ \beta_{t+1}(j)\ a_{ij}\ ]\ b_j\ (O_{t+1})$$

- Definiendo:

$$\beta_T(j) = 1$$

Definiciones

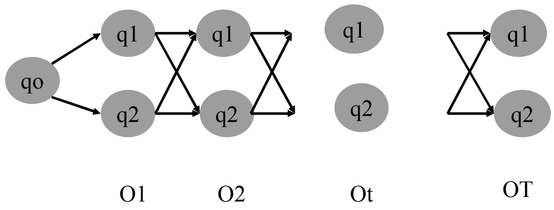
- Por lo tanto, combinando ambas definiciones:

$$P\ (O, S_t = q_i) = \alpha_t(i)\ \beta_t(i)$$

- Y entonces:

$$P(O) = \Sigma_j\ \alpha_t(i)\ \beta_t(i)$$

Cálculo iterativo



Más definiciones

- Probabilidad condicional:

$\gamma_t(i) = P(S_t = q_i \mid O) = P(S_t = q_i, O) / P(O)$

- En términos de α y β:

$$\gamma_t(i) = \alpha_t(i)\, \beta_t(i) / P(O)$$

$$\gamma_t(i) = \alpha_t(i)\, \beta_t(i) / \Sigma_i\, \alpha_t(i)\, \beta_t(i)$$

Estados más probable

- El estado individual más probable para el tiempo *t* es:

$$\text{ARG MAX}_i\ \gamma_t(i)$$

- El problema es que la concatenación de los estados más probables no necesariamente corresponde a la secuencia más probable

Secuencia más probable

- Secuencia total más probable es:

  MAX P(Q | O)
- Dado que P(Q|O) = P(Q,O) / P(O), entonces es equivalente a:

  MAX P(Q , O)

Algoritmo de Viterbi

- Antes de ver el algoritmo es necesario definir otra variable
- La subsecuencia de estados óptimos hasta el tiempo t:

  $\delta_t(i) = P\ (S_1\, S_2\ \ldots\ S_t = q_i,\ O_1\, O_2\ \ldots\ O_t\ )$
- En forma iterativa:

  $\delta_{t+1}(i) = [\ \mathrm{MAX}\ \delta_t(i)\ a_{ij}\ ]\ b_j\ (O_{t+1})$

Algoritmo

1. Inicialización:

   $\delta_1(i) = \pi_i\ b_i\ (O_1)$

   $\psi_1(i) = 0$
2. Recursión

   $\delta_t(i) = \mathrm{MAX}_i\ [\delta_{t-1}(i)\ a_{ij}\ ]\ b_j\ (O_t)$

   $\psi_t(i) = \mathrm{ARGMAX}_i\ [\delta_t(i)]$
3. Terminación

   $P^* = \mathrm{MAX}_i\ [\delta_T(i)]$

   $q_T^* = \mathrm{ARGMAX}_i\ [\delta_T(i)]$
4. Backtracking

   $q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*\ )$

Aprendizaje

- Consiste en determinar los parámetros del modelo, $\lambda = \{A, B, \Pi\}$, dada una secuencia de observaciones
- Para ello, se buscan los parámetros que maximizen $P(O \mid \lambda)$ – no se pueden obtener con precisión
- Número de parámetros:

$$N + N^2 + N \times M$$

Algoritmo de Baum-Welch

- Otra variable auxiliar – probabilidad de estar en el estado i en t y pasar a j en t+1 dada la secuencia de observaciones:

$$\xi_t(i,j) = P(S_t = q_i , S_{t+1} = q_j \mid O) =$$
$$P(S_t = q_i , S_{t+1} = q_j , O) / P(O)$$

- En términos de α y β:

$$\xi_t(i,j) = \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j) / P(O)$$
$$\xi_t(i,j) = \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j) /$$
$$\Sigma_i \Sigma_j\, \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j)$$

Algoritmo de Baum-Welch

- La variable $\gamma_t(i)$ se puede calcular como:

$$\gamma_t(i) = \Sigma_j\, \xi_t(i,j)$$

- Esta variable sumada sobre todos los tiempos da una estimación del número de veces que se pasa por el estado "i"

$$\Sigma_t\, \gamma_t(i)$$

- Mientras que la suma sobre t de $\xi_t(i,j)$ da una estimación del número de transiciones de "i -> j":

$$\Sigma_t\, \xi_t(i,j)$$

Re-estimación de los parámetros

1. Probabilidades iniciales – número de veces en el estado "i" en t=1:
   $\pi_i = \gamma_1(i)$
2. Probabilidades de transición – número de transiciones de "i -> j" entre el número de veces en "i"
   $a_{ij} = \Sigma_t \xi_t(i,j) / \Sigma_t \gamma_t(i)$
3. Probabilidades de salidas – número de veces en estado "j" y observar "k" entre el número de veces en dicho estado:
   $b_{jk} = \Sigma_{t,O=k} \gamma_t(i) / \Sigma_t \gamma_t(i)$

Re-estimación de los parámetros

- Se inicia con ciertos valores (al azar) y se van mejorando iterativamente (se repite el proceso varias veces)
- Se obtiene un estimador de *máxima verosimilitud*
- No se garantiza el óptimo global

Aplicaciones

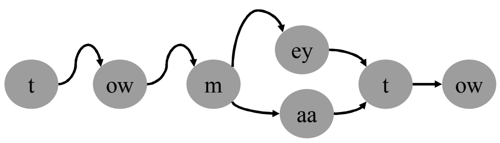
- Modelado de procesos dinámicos, como:
  - Reconocimiento de voz
  - Reconocimiento de gestos

Reconocimiento de voz

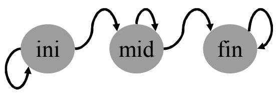
- Se modela a nivel palabra o fonema utilizando HMM
- Las observaciones consisten de vectores de característcas obtenidas del procesamiento de la señal de voz
- Se utilizan secuencias de voz para el entrenamiento y, posteriormente durante reconocimiento, se obtiene la probabilidad de cada modelo (palabra o fonema), seleccionando la de mayor probabilidad

Reconocimiento de voz

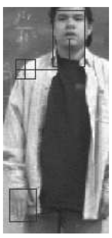
Palabra: “tomato”

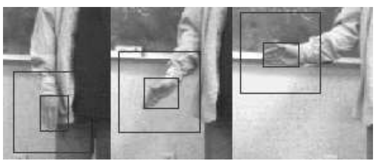


Fonema



Reconocimiento de gestos

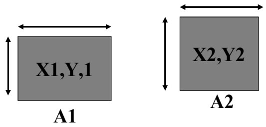




Seguimiento de la mano en una secuencia imágenes

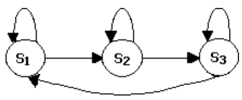
Características

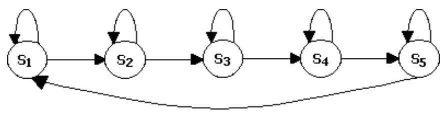
- Observaciones:
  - cambio en X (**ΔX)**
  - cambio en Y (**ΔY)**
  - cambio en área (**ΔA)**
  - cambio en razón X-Y (**ΔR)**
- Cada una se codifica en 3 valores: **(+, 0, -),** lo que da un total de 81 posibles observaciones



HMM

- Se utiliza un HMM para cada gesto (5 gestos):
  - 3 estados: gestos *simples*
  - 5 estados: gestos *complejos*





Referencias

- L. R. Rabiner, B. H. Juang, "An introduction to hidden Markov models", IEEE ASSP, Enero 1986.
- L. R. Rabiner, "A tutorial on hidden Markov Models and selected applications in speech recognition", IEEE 1989.
- J. K. Kemeny, J. L. Snell, "Finite Markov Chains", Van Nostrand, 1965.

Referencias

- H. Avilés, L. E. Sucar, "Dynamical Arm Gestures Visual Recognition Using Hidden Markov Models", *IBERAMIA: Workshop on Probabilistic Reasoning in Artificial Intelligence*, Brazil, November 2000, pp. 3—8
- L. Page et al., "The PageRank citation ranking: Bringing order to the Web", Stanford Digital Libraries Working Paper, 1998.

Actividades

- Hacer ejercicios de HMM
- Leer artículo de PageRank