SLAM

Dr José Martinez Carranza
carranza@inaoep.mx

Coordinación de Ciencias Computacionales, INAOE

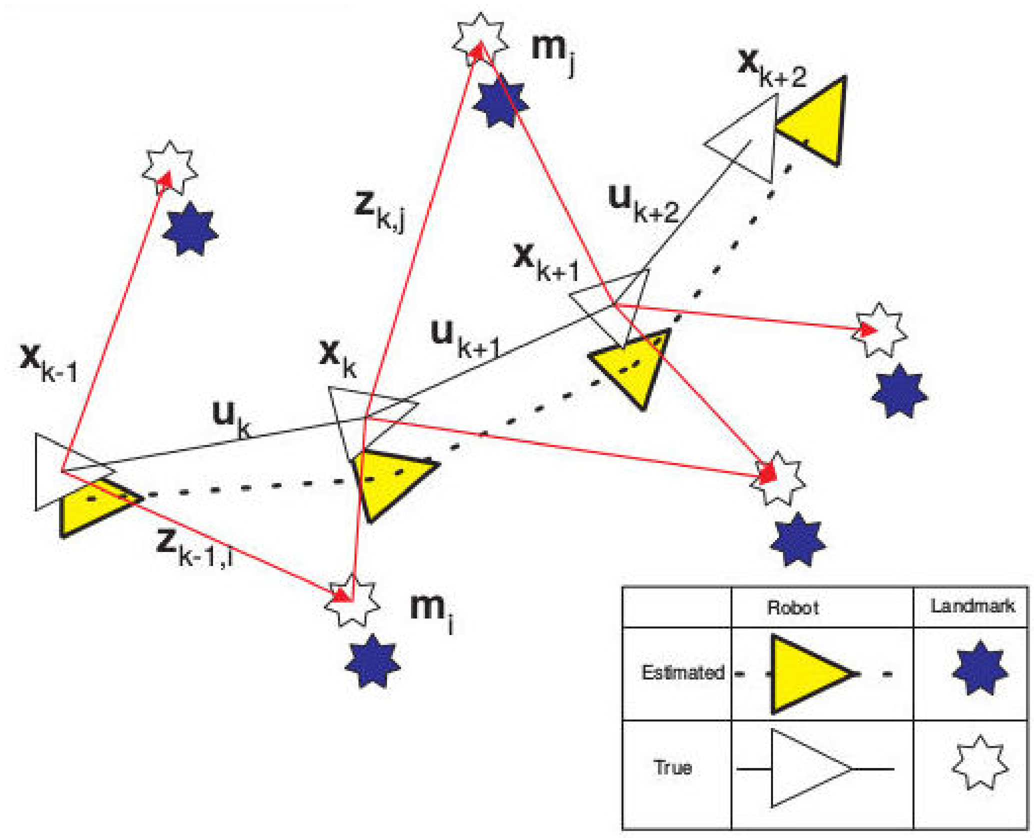
Localización y Mapeo Simultaneos

- SLAM por sus siglas en ingles: **S**imultaneous **L**ocalisation **A**nd **M**apping.
- ICRA-1986: Métodos probabilísticos comienzan a ser considerados para resovler el problema de localización y mapeo.
- ISRR-1995: Se inventa el término SLAM.
- ISRR-1999: Primer sesión acerca de SLAM.
- ICRA-2000: Taller sobre SLAM (15 investigadores).
- ICRA-2001: Taller sobre SLAM (150 investigadores).
- Escuela de verano sobre SLAM 2002, KTH Royal Institue of Technology in Stockholm: reuinó a todos los investigadores claves en el área y 50 estudiantes de doctorado de varios lugares del mundo.
- Actualmente se organizan hasta 2 sesiones de SLAM en ICRA, IROS, RSS.

SLAM

- Problema del huevo y la gallina

SLAM



m_j
x_{k+2}
u_{k+2}
$z_{k,j}$
x_{k+1}
u_{k+1}
x_{k-1}
x_k
u_k
$z_{k-1,i}$
m_i
Robot
Landmark
Estimated
True

SLAM Probabilistico

- Modelo probabilistico del estado del sistema:

$$P(\vec{x}_t, \vec{m} | \vec{Z}_{0:t}, \vec{U}_{0:t}, \vec{x}_0)$$

- Modelo Bayesiano Recursivo:

$$P(\vec{x}_t, \vec{m} | \vec{Z}_{0:t-1}, \vec{U}_{0:t}, \vec{x}_0) = \int P(\vec{x}_t | \vec{u}_t, \vec{x}_{t-1}) P(\vec{x}_{t-1}, \vec{m} | \vec{Z}_{0:t-1}, \vec{U}_{0:t-1}) d\vec{x}_{t-1}$$

$$P(\vec{x}_t, \vec{m} | \vec{Z}_{0:t}, \vec{U}_{0:t}, \vec{x}_0) = \frac{P(\vec{z}_t | \vec{x}_t, \vec{m}) P(\vec{x}_t, \vec{m} | \vec{Z}_{0:t-1}, \vec{U}_{0:t}, \vec{x}_0)}{P(\vec{z}_t | \vec{Z}_{0:t-1}, \vec{U}_{0:t})}$$

SLAM como un sistema dinámico

- El problema se modela como la estimación de estado de un sistema dinámico.
- El estado no se puede observar de manera directa.
- Sin embargo, se cuenta con mediciones que reflejan de manera indirecta el estado del sistema

SLAM como un sistema dinámico

- Model dinámico del sistema

$$P(\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) \Longleftrightarrow \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k,$$

- Modelo de observación (medición) del sistema

$$P(\mathbf{z}_k \mid \mathbf{x}_k, \mathbf{m}) \Longleftrightarrow \mathbf{z}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{m}) + \mathbf{v}_k,$$

SLAM como un sistema dinámico

- Sistema dinámico como un sistema multivariable con distribución probabilistica conjunta:

$$P(\mathbf{x}_k, \mathbf{m} \mid \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k}, \mathbf{x}_0)$$

- Distribución normal con media:

  y co-varianza:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \\ \hat{\mathbf{m}}_k \end{bmatrix} = \mathrm{E}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \mid \mathbf{Z}_{0:k} \Bigg] ,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} & \mathbf{P}_{xm} \\ \mathbf{P}_{xm}^T & \mathbf{P}_{mm} \end{bmatrix}_{k|k} \\ &= \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}_k \end{pmatrix}^T \mid \mathbf{Z}_{0:k} \right] \end{aligned}$$

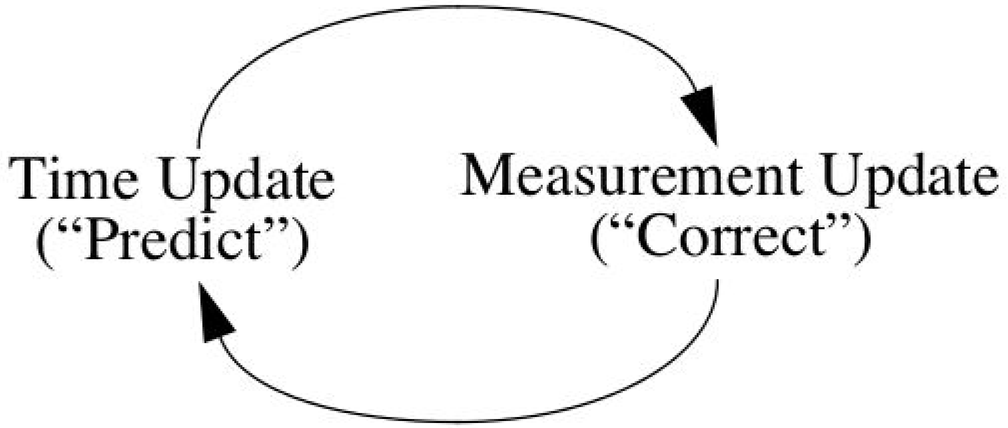
SLAM como un sistema dinámico

- Sistema dinámico como un sistema multivariable con distribución probabilistica conjunta con media $\hat{\mathbf{x}}$ y co-varianza $\mathbf{P}$

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{P}|^2}} exp\{-\frac{1}{2}[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]^\top \mathbf{P}^{-1}[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]\}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_c \\ \hat{\mathbf{m}}_1 \\ \hat{\mathbf{m}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{m}}_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\mathbf{x}_c\mathbf{x}_c} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}_c\mathbf{m}_1} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}_c\mathbf{m}_2} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathbf{x}_c\mathbf{m}_n} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}_1\mathbf{x}_c} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_1} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_1\mathbf{m}_n} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}_2\mathbf{x}_c} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_2\mathbf{m}_2} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_2\mathbf{m}_2} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_2\mathbf{m}_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathbf{m}_n\mathbf{x}_c} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_n\mathbf{m}_n} & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_n\mathbf{m}_2} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathbf{m}_n\mathbf{m}_n} \end{bmatrix}$$

El Filtro de Kalman (KF)



El Filtro de Kalman (KF)

Time Update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

Measurement Update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H)P_k^-$$

Initial estimates for $\hat{x}_{k-1}$ and P_{k-1}

El Filtro de Kalman Extendido (EKF)

Time Update ("Predict")

(1) Project the state ahead

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0)$$

(2) Project the error covariance ahead

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_{k-1} W_k^T$$

Measurement Update ("Correct")

(1) Compute the Kalman gain

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1}$$

(2) Update estimate with measurement z_k

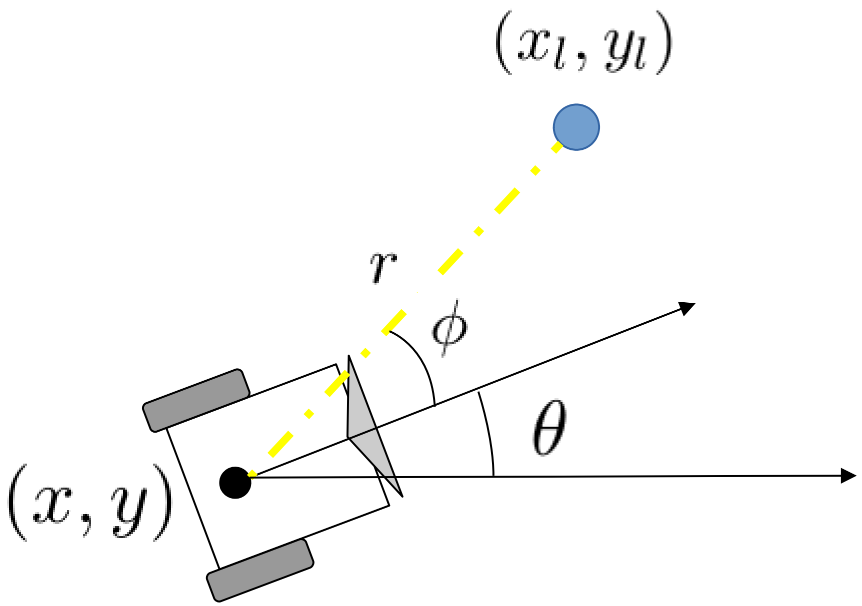
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-, 0))$$

(3) Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-$$

Initial estimates for $\hat{x}_{k-1}$ and P_{k-1}

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)

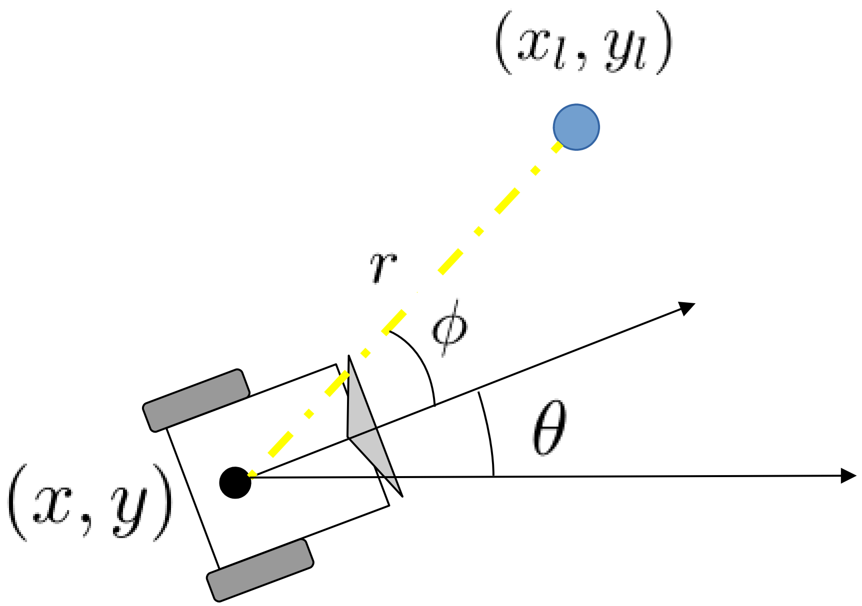


$$p' = f(x, y, \theta, \Delta s_r, \Delta s_l) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \cos\left(\theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2b}\right) \\ \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \sin\left(\theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2b}\right) \\ \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{b} \end{bmatrix}$$

Sensor: mide ángulo (con respecto al eje del robot) y distancia del componente del mapa

SLAM para robot diferencial

(basado en el EKF)

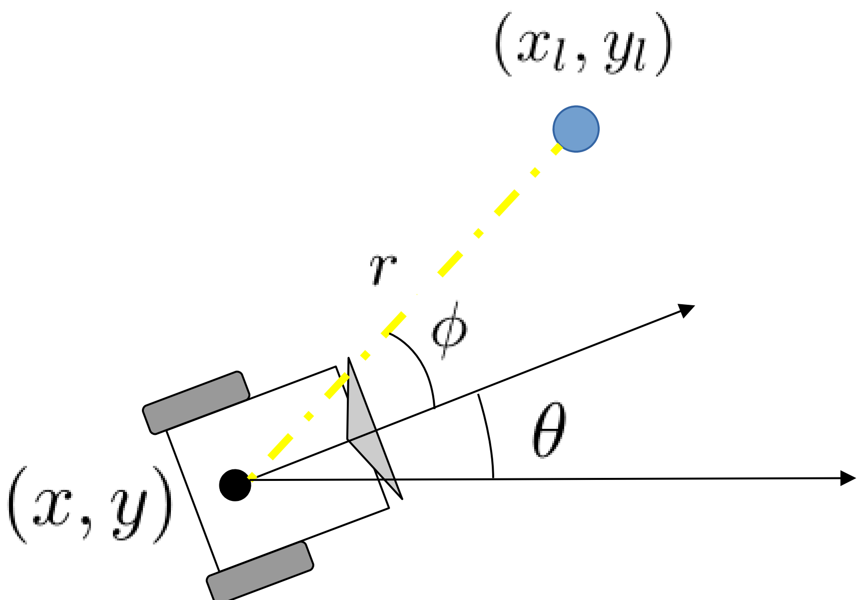


- Estado, posición del robot y componente del mapa.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ x_l \\ y_l \end{bmatrix}$$

Sensor: mide ángulo (con respecto al eje del robot) y distancia del componente del mapa.

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)

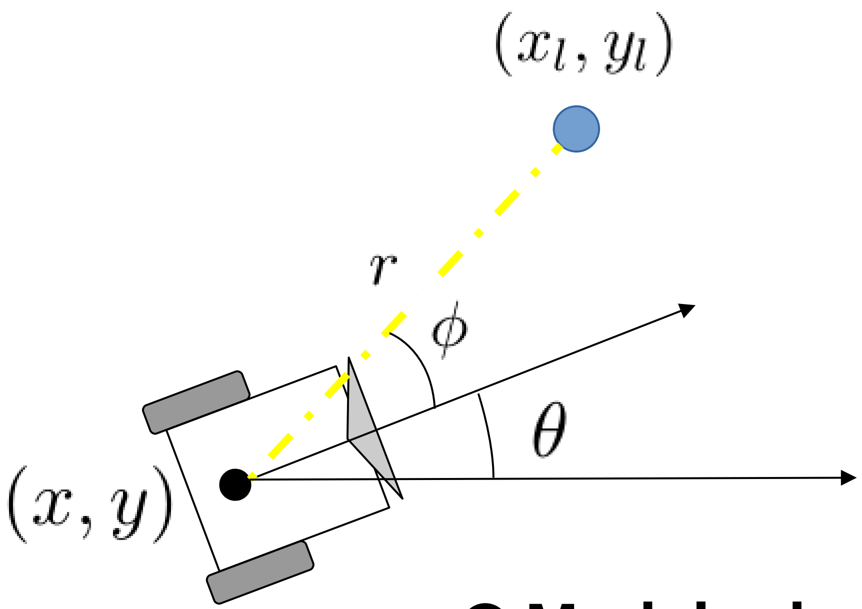


Sensor: mide ángulo (con respecto al eje del robot) y distancia del componente del mapa.

- **Modelo dinámico**

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{(k+1)} \\ \hat{y}_{(k+1)} \\ \hat{\theta}_{(k+1)} \\ \hat{x}_{l(k+1)} \\ \hat{y}_{l(k+1)} \end{bmatrix} = f(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k, \hat{x}_{l(k)}, \hat{y}_{l(k)}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_k + \frac{\triangle s_r + \triangle s_l}{2} cos(\hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b}) \\ \hat{y}_k + \frac{\triangle s_r + \triangle s_l}{2} sin(\hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b}) \\ \hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b} \\ \hat{x}_{l(k)} \\ \hat{y}_{l(k)} \end{bmatrix}$$

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)



Sensor: mide ángulo (con respecto al eje del robot) y distancia del componente del mapa.

- **Modelo de observación/medición**

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = h(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k, \hat{x}_{l(k)}, \hat{y}_{l(k)}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(\hat{x}_{l(k+1)} - \hat{x}_{(k+1)})^2 + (\hat{y}_{l(k+1)} - \hat{y}_{(k+1)})^2} \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{y}_{l(k+1)} - \hat{y}_{(k+1)}}{\hat{x}_{l(k+1)} - \hat{x}_{(k+1)}}\right) - \hat{\theta}_{(k+1)} \end{bmatrix}$$

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{(k+1)} \\ \hat{y}_{(k+1)} \\ \hat{\theta}_{(k+1)} \\ \hat{x}_{l(k+1)} \\ \hat{y}_{l(k+1)} \end{bmatrix} = f(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k, \hat{x}_{l(k)}, \hat{y}_{l(k)}) = \begin{bmatrix} \hat{x}_k + \frac{\triangle s_r + \triangle s_l}{2} cos(\hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b}) \\ \hat{y}_k + \frac{\triangle s_r + \triangle s_l}{2} sin(\hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b}) \\ \hat{\theta}_k + \frac{\triangle s_r - \triangle s_l}{2b} \\ \hat{x}_{l(k)} \\ \hat{y}_{l(k)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = h(\hat{x}_k, \hat{y}_k, \hat{\theta}_k, \hat{x}_{l(k)}, \hat{y}_{l(k)}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(\hat{x}_{l(k+1)} - \hat{x}_{(k+1)})^2 + (\hat{y}_{l(k+1)} - \hat{y}_{(k+1)})^2} \\ tan^{-1}\left(\frac{\hat{y}_{l(k+1)} - \hat{y}_{(k+1)}}{\hat{x}_{l(k+1)} - \hat{x}_{(k+1)}}\right) - \hat{\theta}_{(k+1)} \end{bmatrix}$$

Filtro de Kalman Extendido (EKF)

Predicción

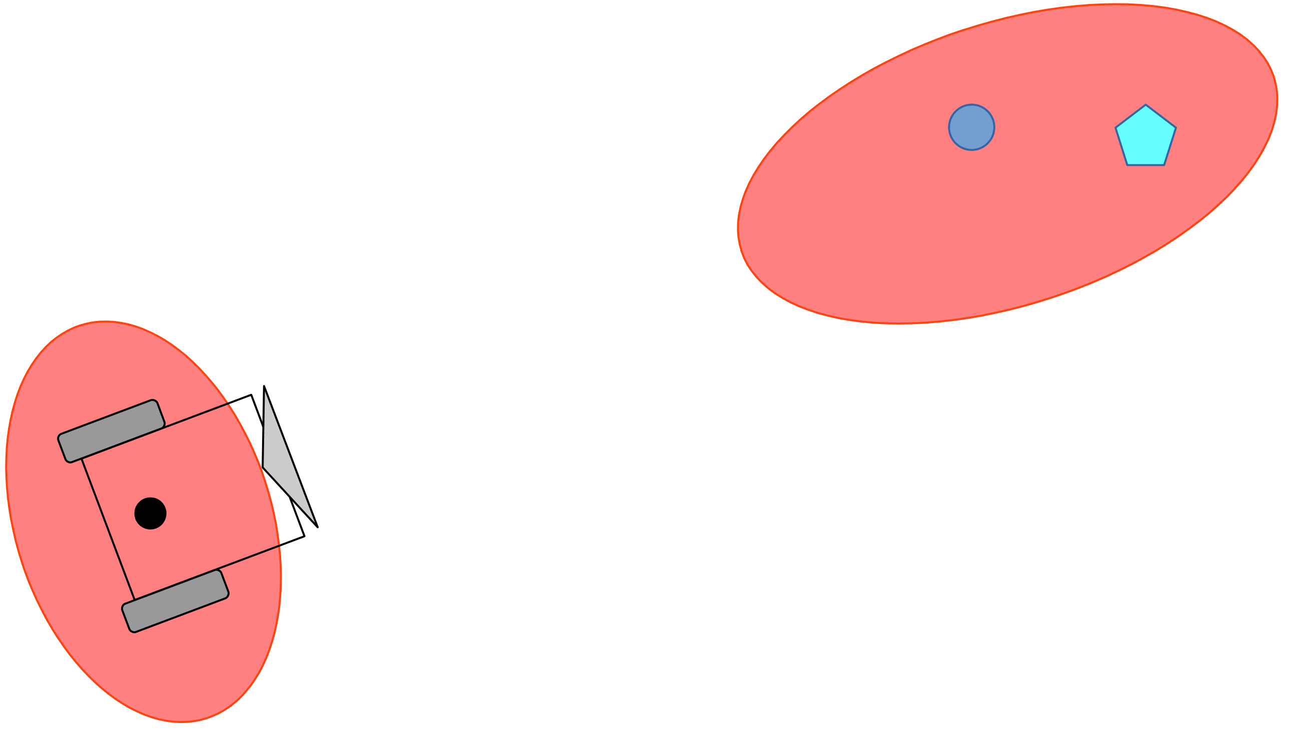
$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_k, 0)$$
$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \nabla\mathbf{f}_\mathbf{x}\mathbf{P}_{k-1}\nabla\mathbf{f}_\mathbf{x}^\top + \nabla\mathbf{f}_\mathrm{w}\mathbf{Q}\nabla\mathbf{f}_\mathrm{w}^\top$$
$$\hat{\mathbf{z}}_k = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, 0)$$
$$\mathbf{S}_k = \nabla\mathbf{h}_\mathbf{x}\mathbf{P}_{k-1}\nabla\mathbf{h}_\mathbf{x}^\top + \nabla\mathbf{h}_\mathrm{v}\mathbf{R}\nabla\mathbf{h}_\mathrm{h}^\top$$

Corrección

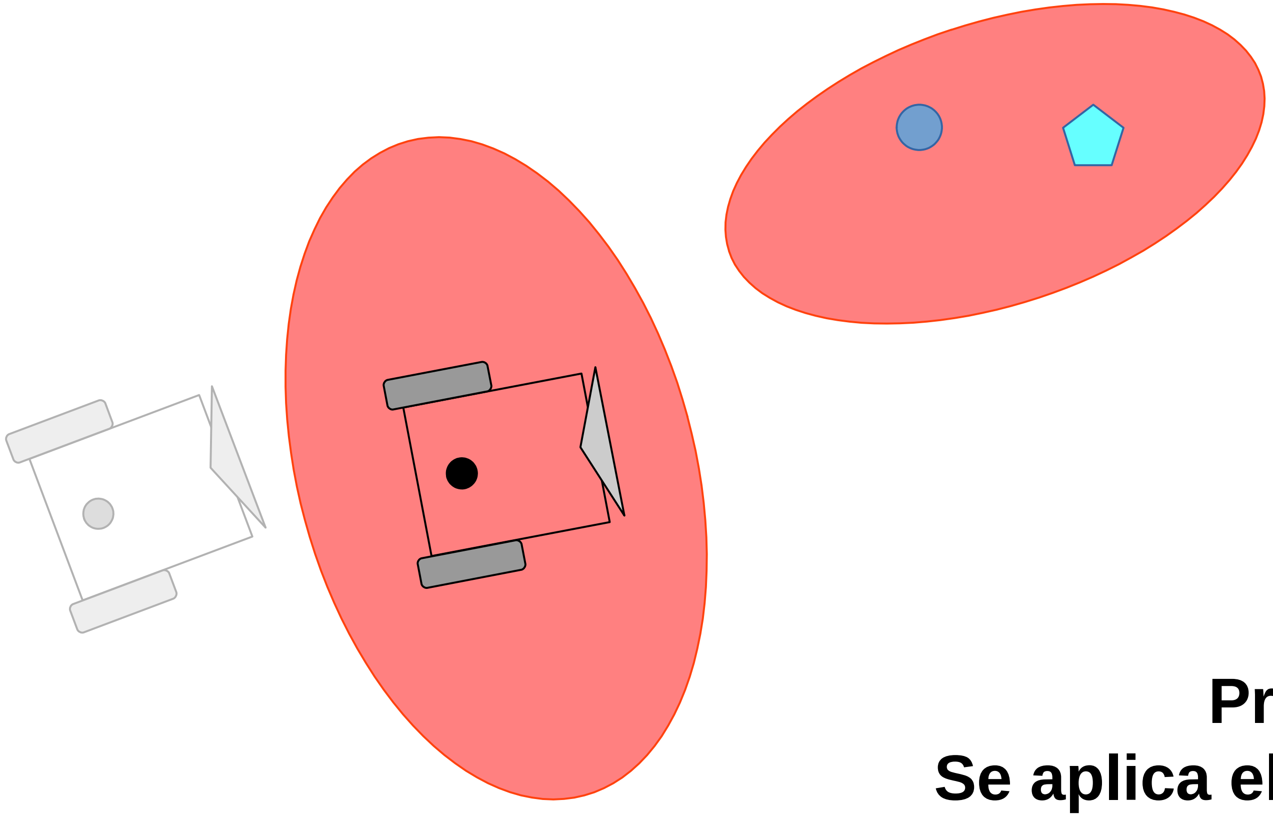
$$\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k$$
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}\nabla\mathbf{h}_\mathbf{x}^\top\mathbf{S}^{-1}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k\mathbf{y}_k$$
$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k\nabla\mathbf{h}_\mathbf{x}\mathbf{P}_{k|k-1}$$

$$\nabla\mathbf{f}_\mathbf{x} = \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}}, \quad \nabla\mathbf{f}_\mathrm{w} = \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathrm{w}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k-1}}, \quad \nabla\mathbf{h}_\mathbf{x} = \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}, \quad \nabla\mathbf{h}_\mathrm{v} = \left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathrm{v}}\right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}}$$

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)

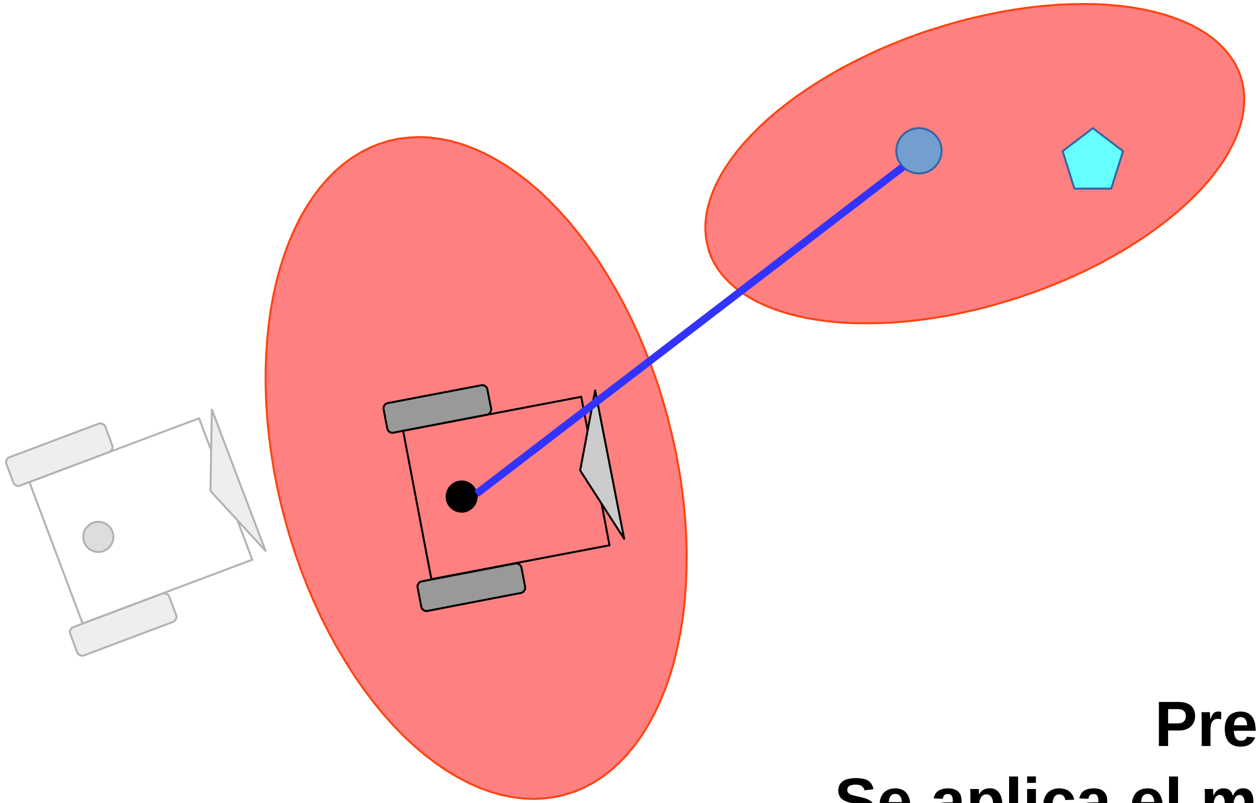


SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)



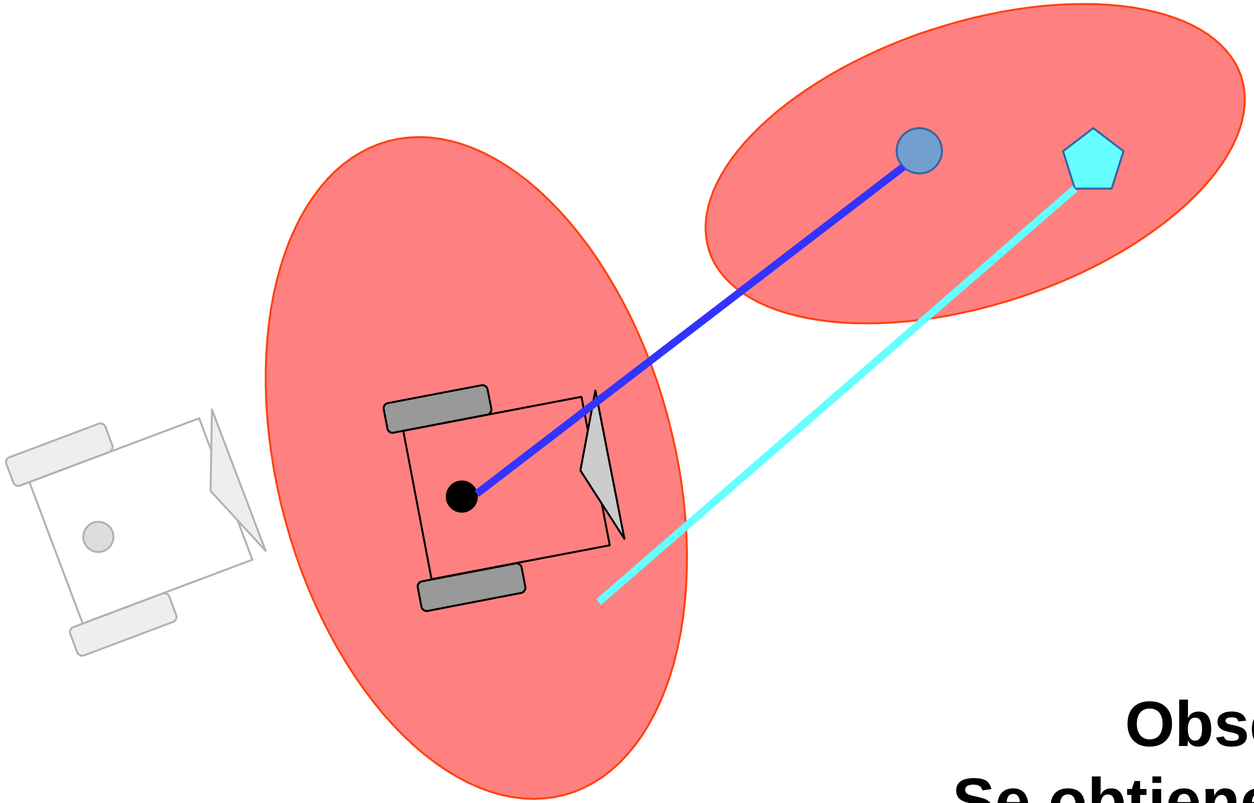
Predicción
Se aplica el modelo dinámico

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)



Predicción
Se aplica el modelo de medicíon

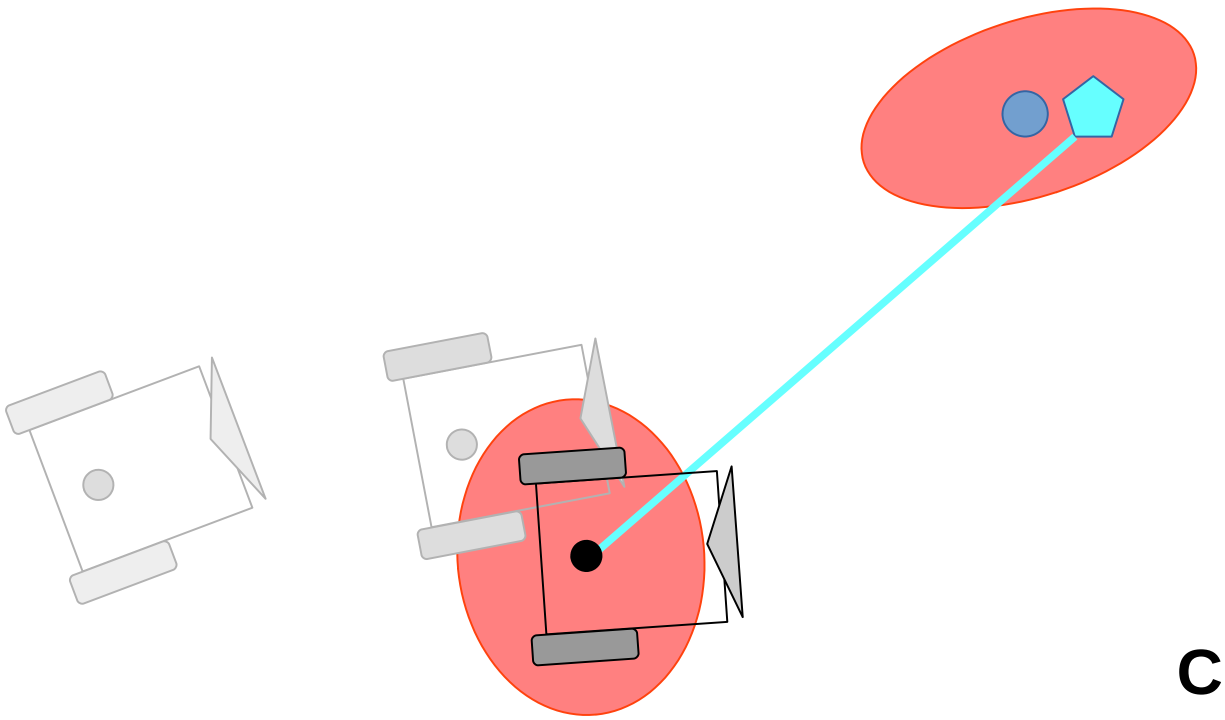
SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)



Observación
Se obtienen mediciones de los sensores

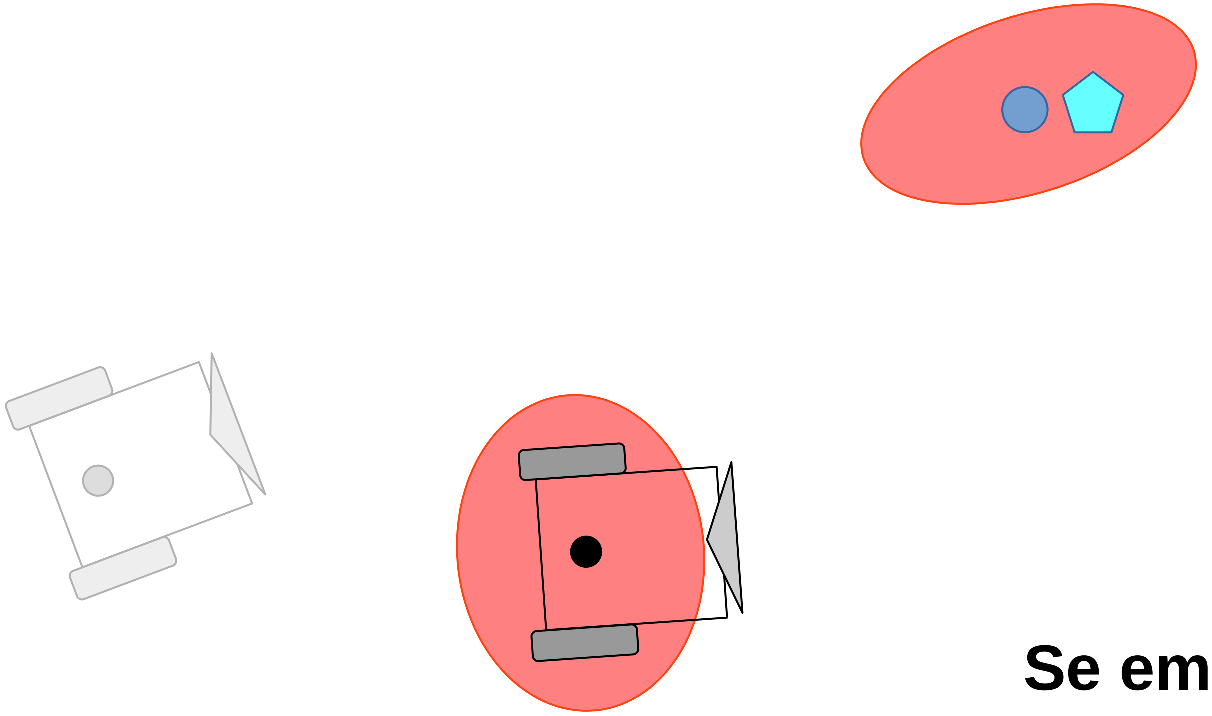
SLAM para robot diferencial

(basado en el EKF)



Correción

SLAM para robot diferencial
(basado en el EKF)

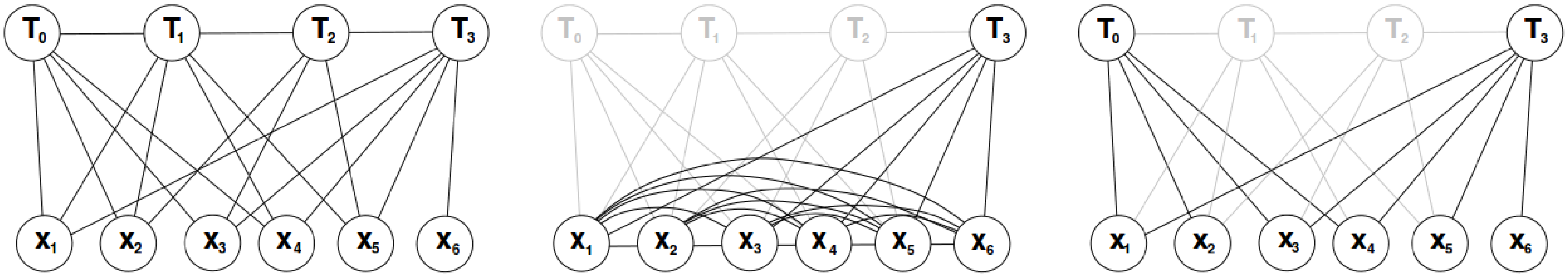


Se empieza otra vez

Componentes en SLAM

- Modelo dinámico.
- Modelo de medición.
- Asociación de datos.
- Mantenimiento del mapa.
  - Creación de nuevos componentes.
  - Eliminacion de nuevos components.
- Cierre de bucle.

SLAM



(a) Markov Random Field (b) Filter (c) Keyframe BA

SLAM Monocular (Visual SLAM)

- MonoSLAM: Primer sistema que utilizó el marco teórico de SLAM en el dominio de visión computacional puro.
- Localización y Mapeo Simultaneo con una cámara con movimiento libre (6D), sin controlador, sin marcas en el ambiente.
- Desarrollado y publicado en 2003 por **Andrew Davison** (actualmente Proffesor en Imperial College) (Davison, 2003). A la fecha este paper cuenta con **5,513 citas.**
- Su trabajo en general cuenta con **49,695 citas**. Fuente: google scholar.
- En 2010 publico un paper titulado "¿Por qué el filtro?", con el que argumenta que el filtro (EKF) no es la mejor opción (Davison,2010).

SLAM Monocular

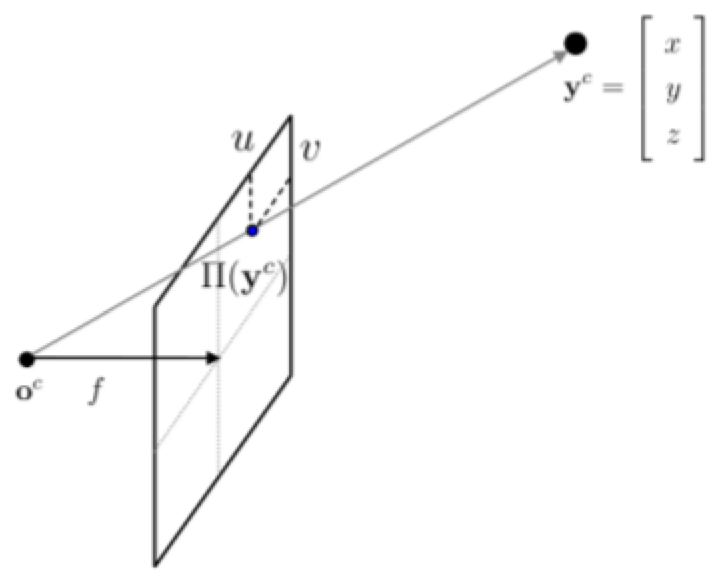
- Modelo dinámico de la cámara (velocidad constante):

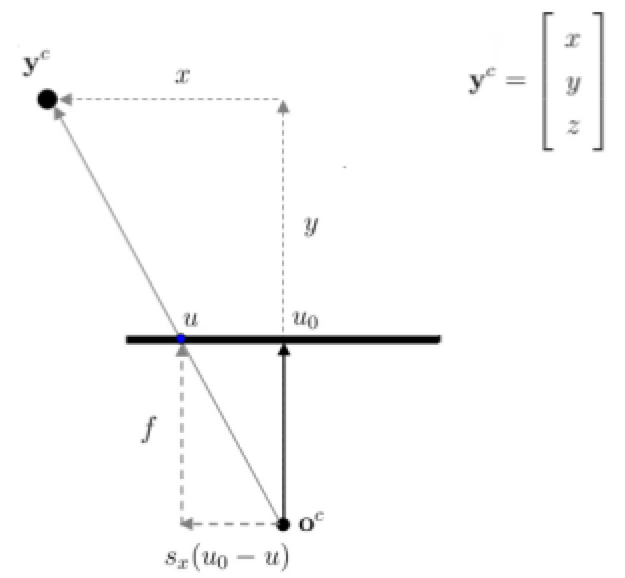
$$\mathbf{x}_{c_{k+1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^w_{k+1} \\ \mathbf{q}^w_{k+1} \\ \mathbf{v}^w_{k+1} \\ \omega^c_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_{c_k}, \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^w_k + (\mathbf{v}^w_k + \nu)\Delta t \\ \mathbf{q}^w_k \otimes \mathbf{q}((\omega^c_k + \Omega)\Delta t) \\ \mathbf{v}^w_k + \nu \\ \omega^c_k + \Omega \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \nu \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\Delta t \\ \alpha\Delta t \end{bmatrix}$$

SLAM Monocular

- Modelo de medición (pin-hole):

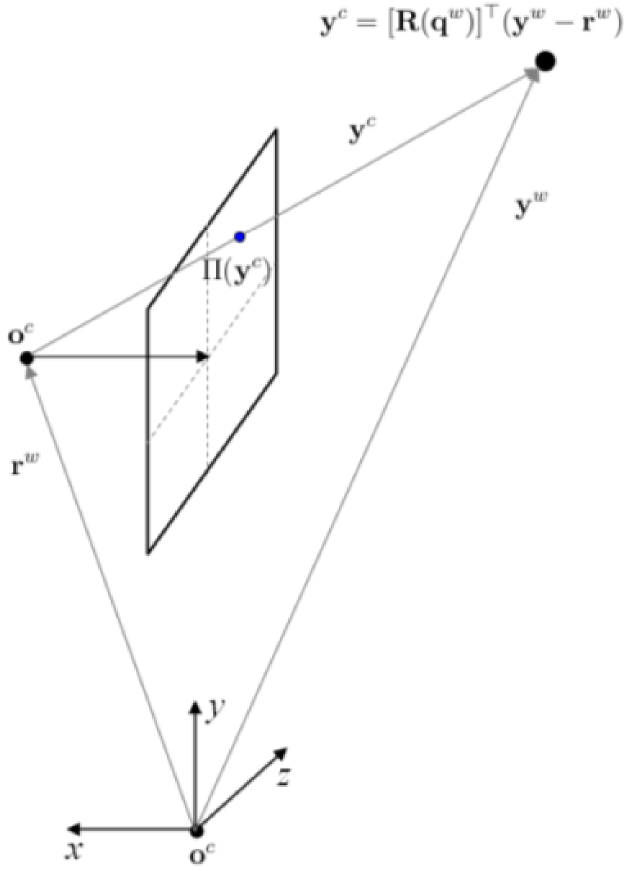




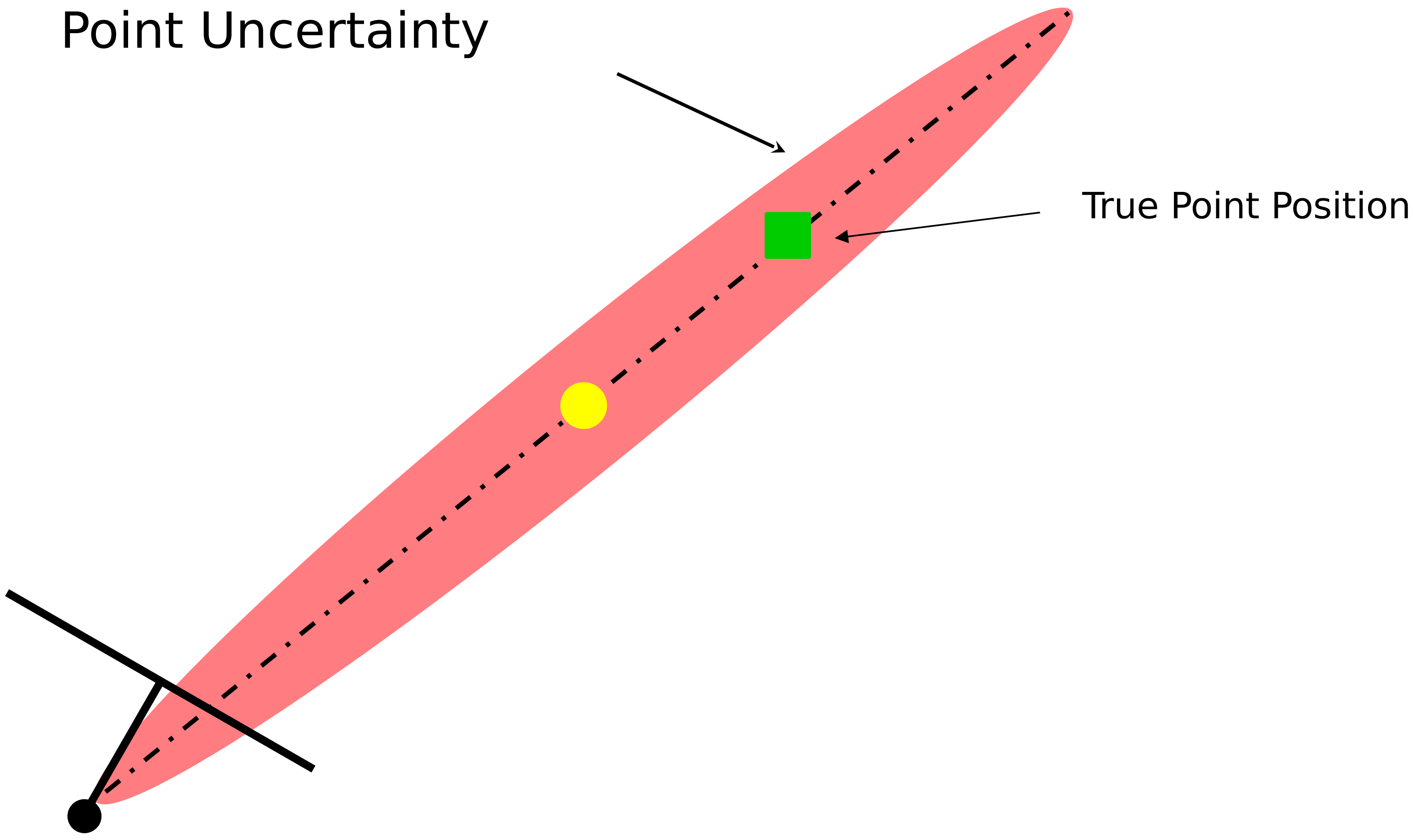
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \Pi(\mathbf{y}^c) = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{fx}{s_x z} \\ v_0 - \frac{fy}{s_y z} \end{bmatrix}$$

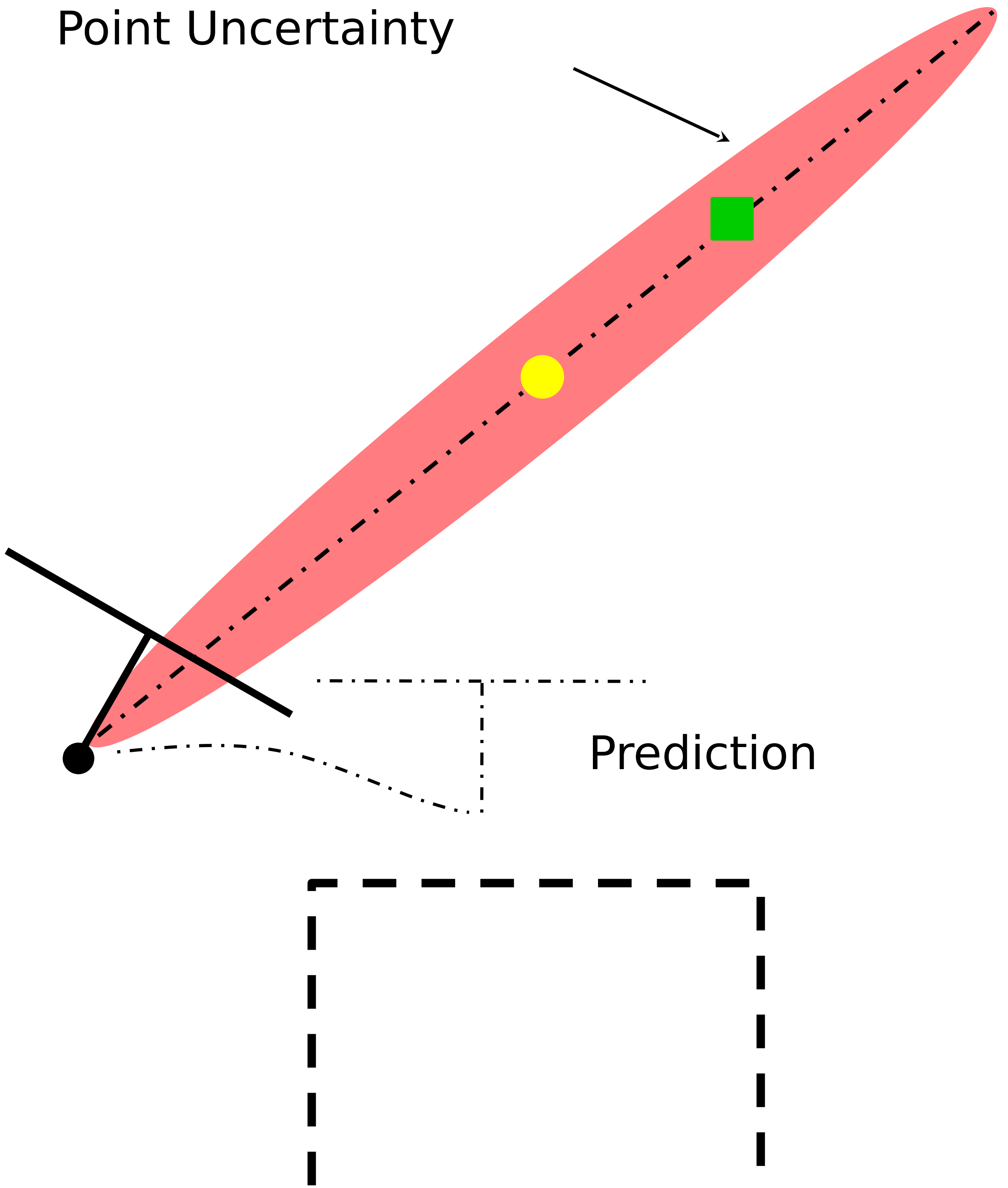
SLAM Monocular

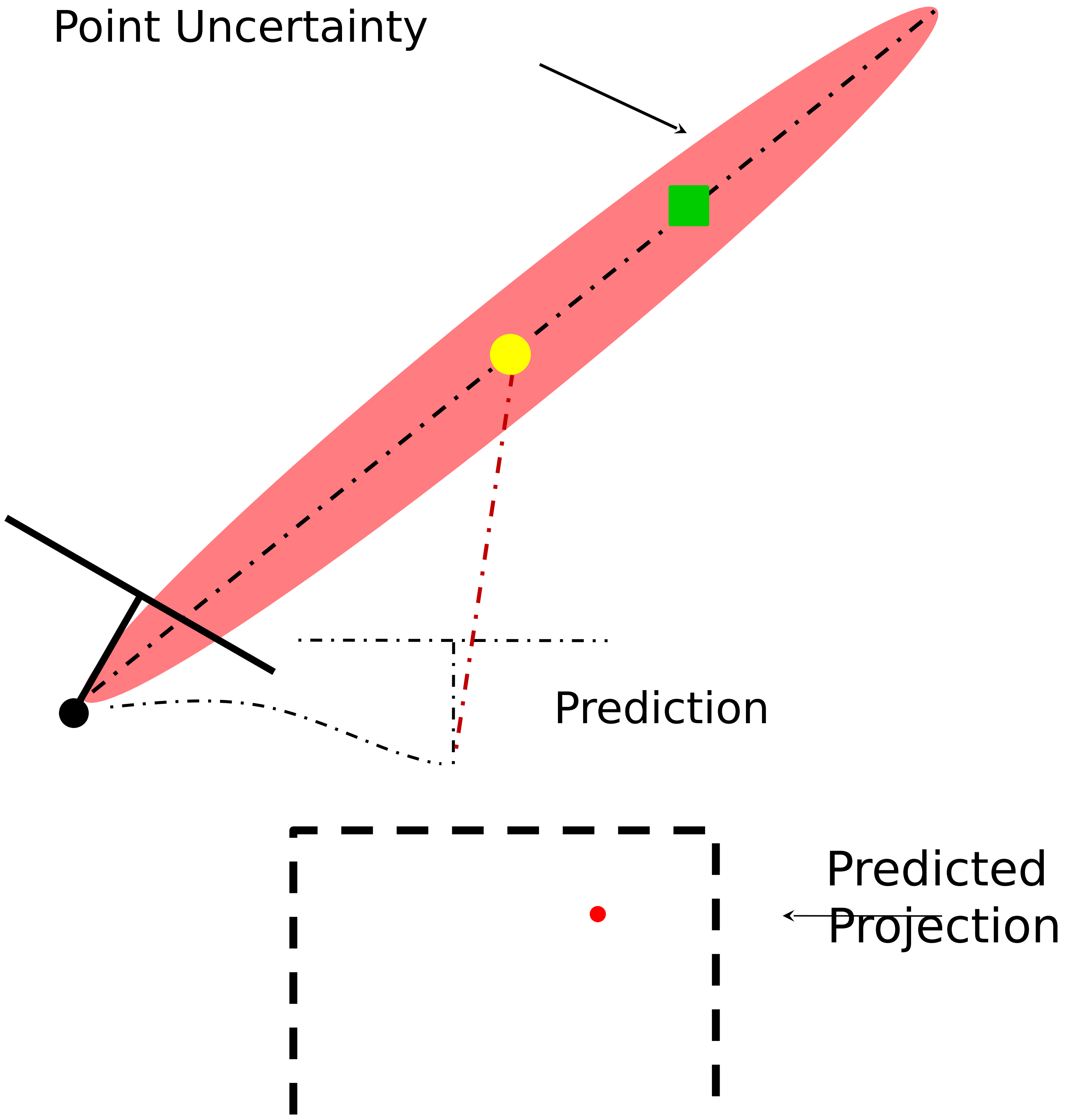
- Modelo de medición (pin-hole):



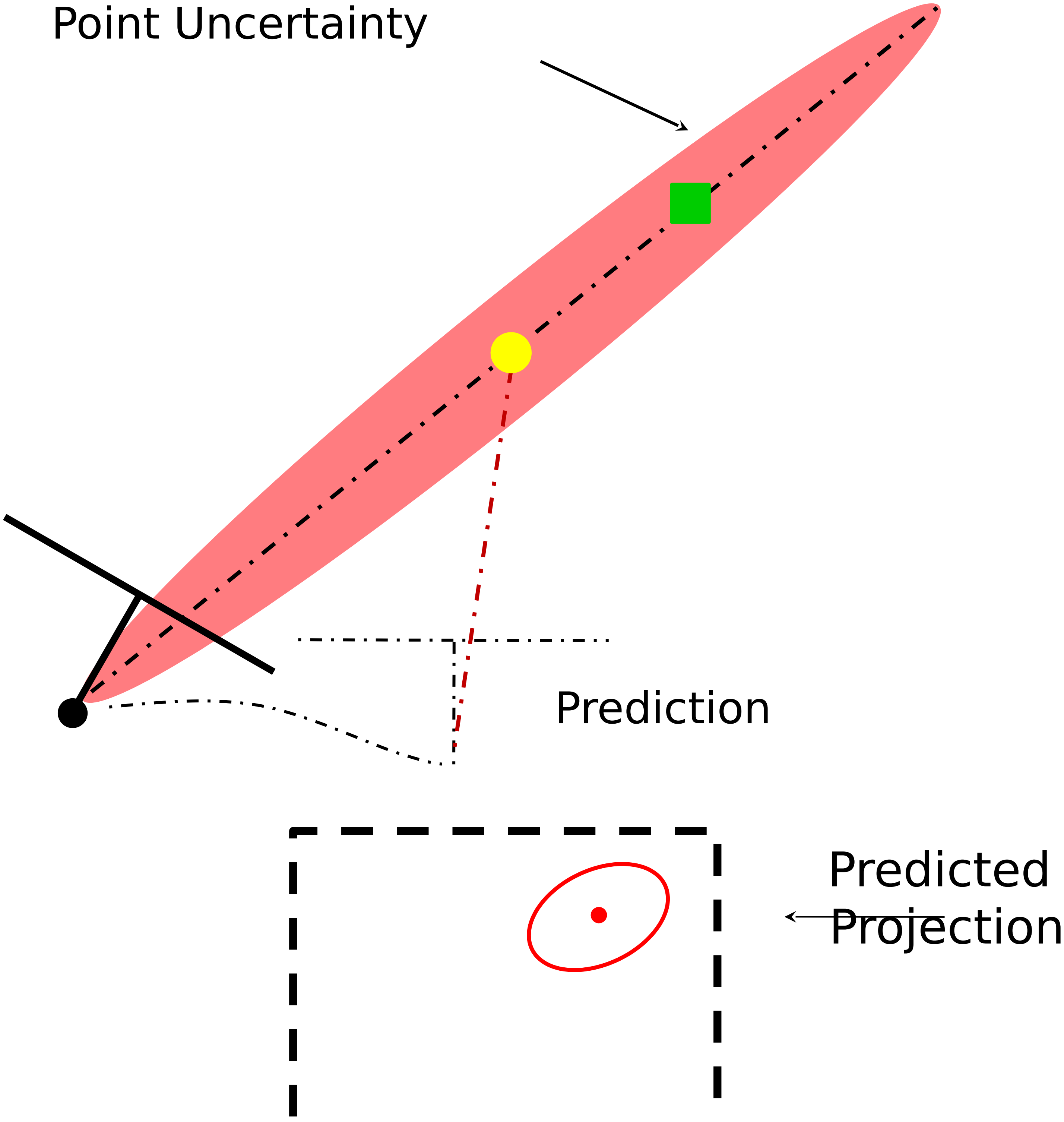
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \Pi(\mathbf{y}^c) = \begin{bmatrix} u_0 - \frac{fx}{s_x z} \\ v_0 - \frac{fy}{s_y z} \end{bmatrix}$$

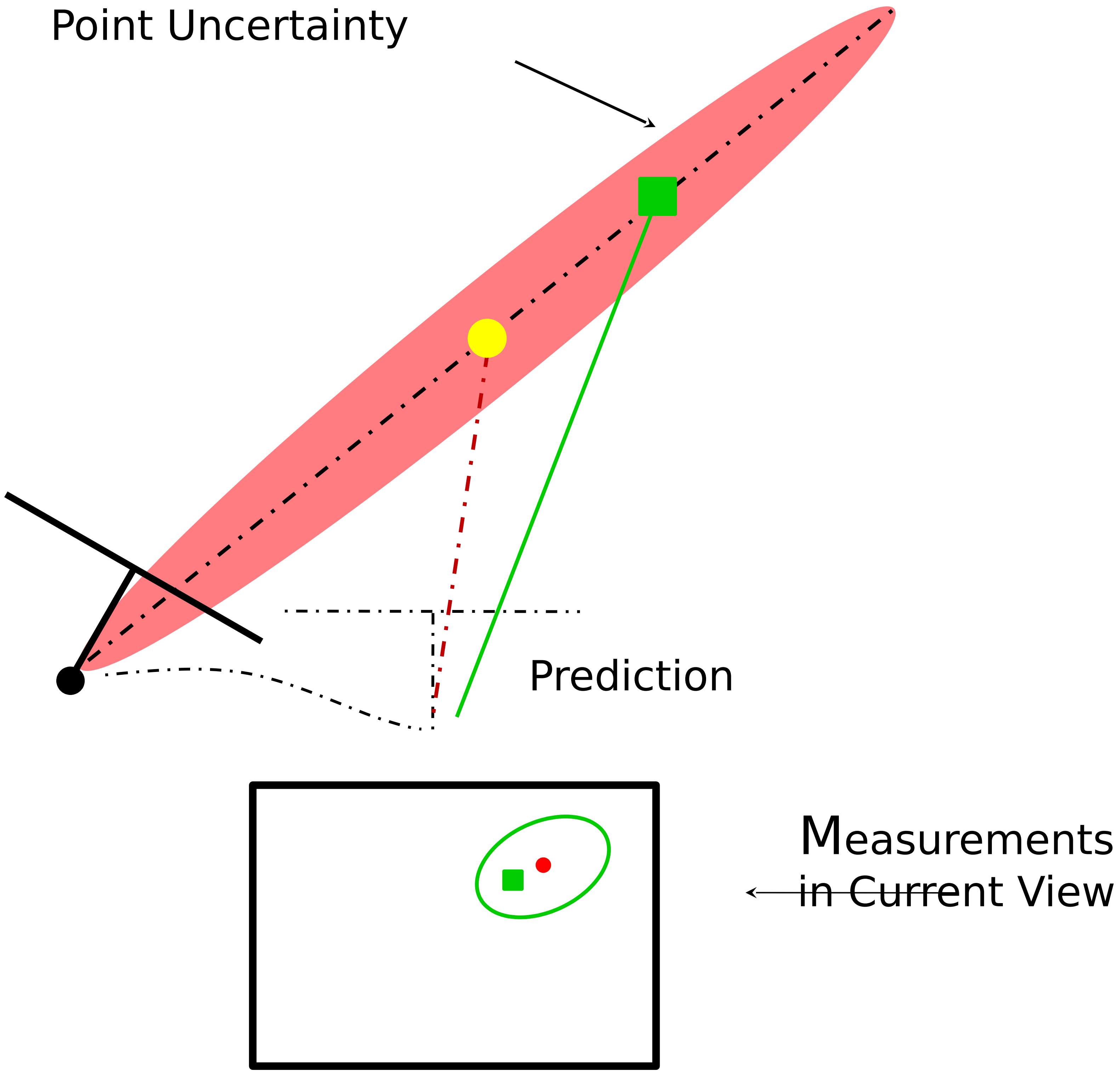

Point Uncertainty
True Point Position

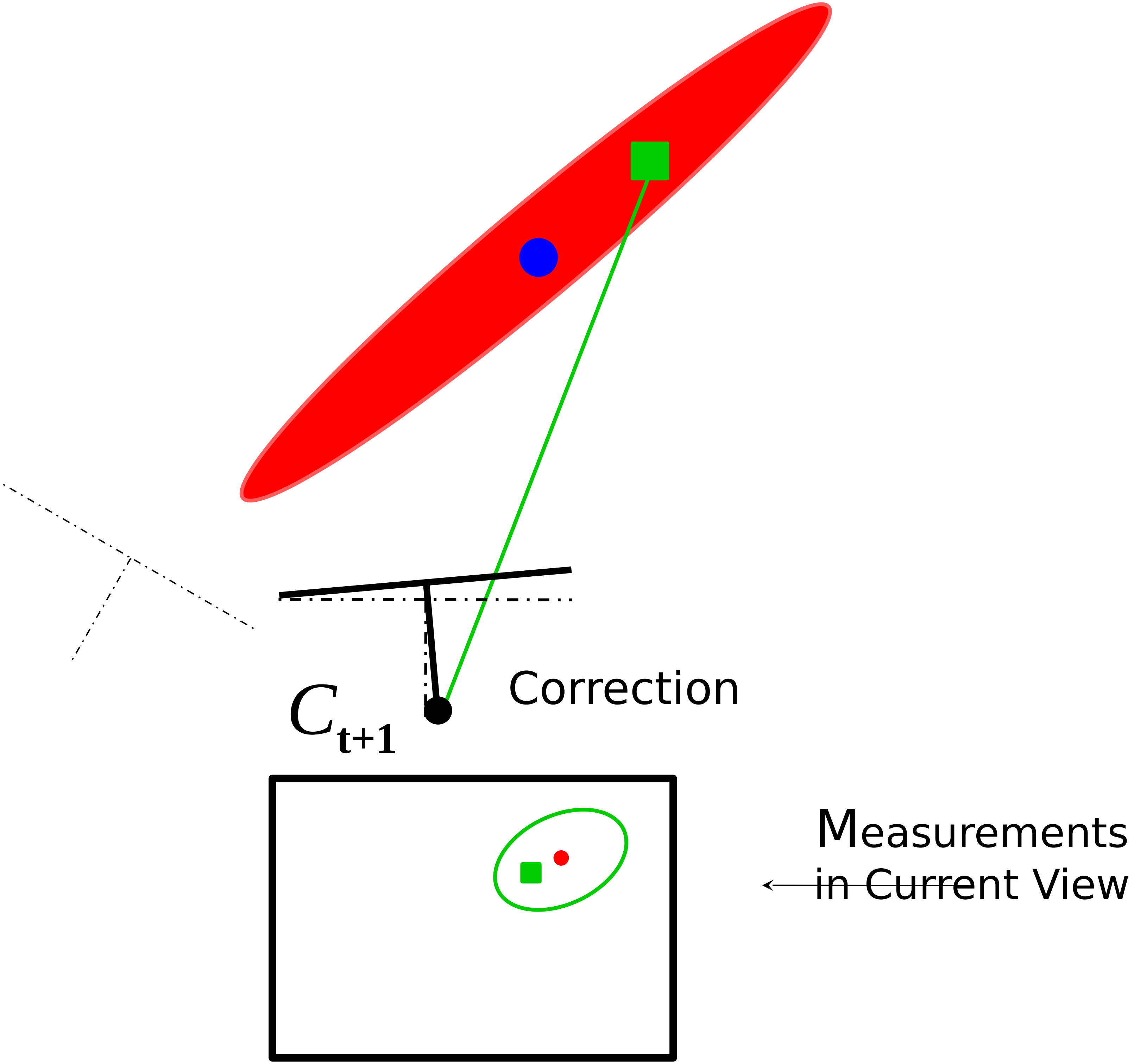

Point Uncertainty
Prediction



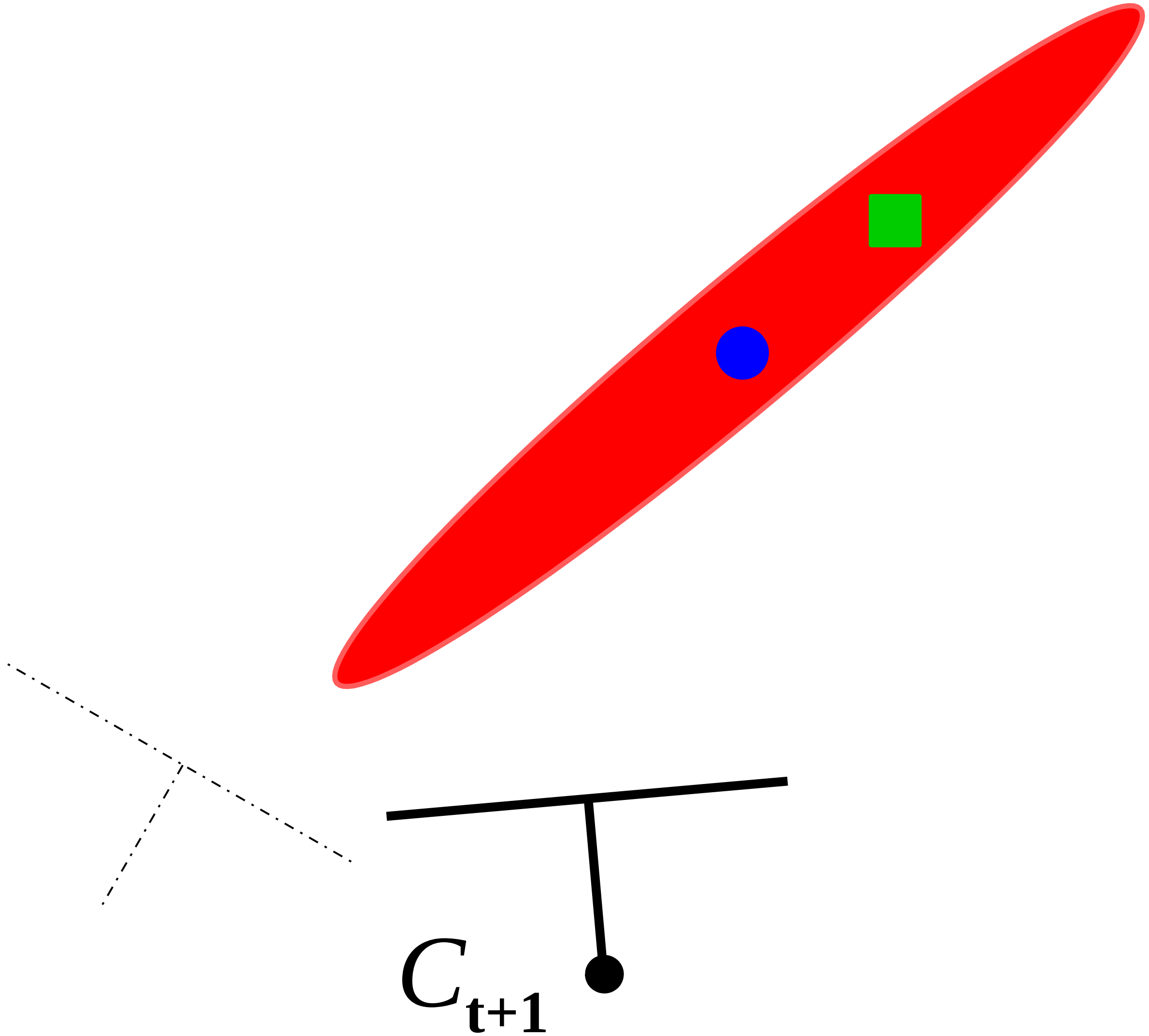
Point Uncertainty
Prediction
Predicted
Projection


Point Uncertainty
Prediction
Predicted
Projection


Point Uncertainty
Prediction
Measurements
in Current View

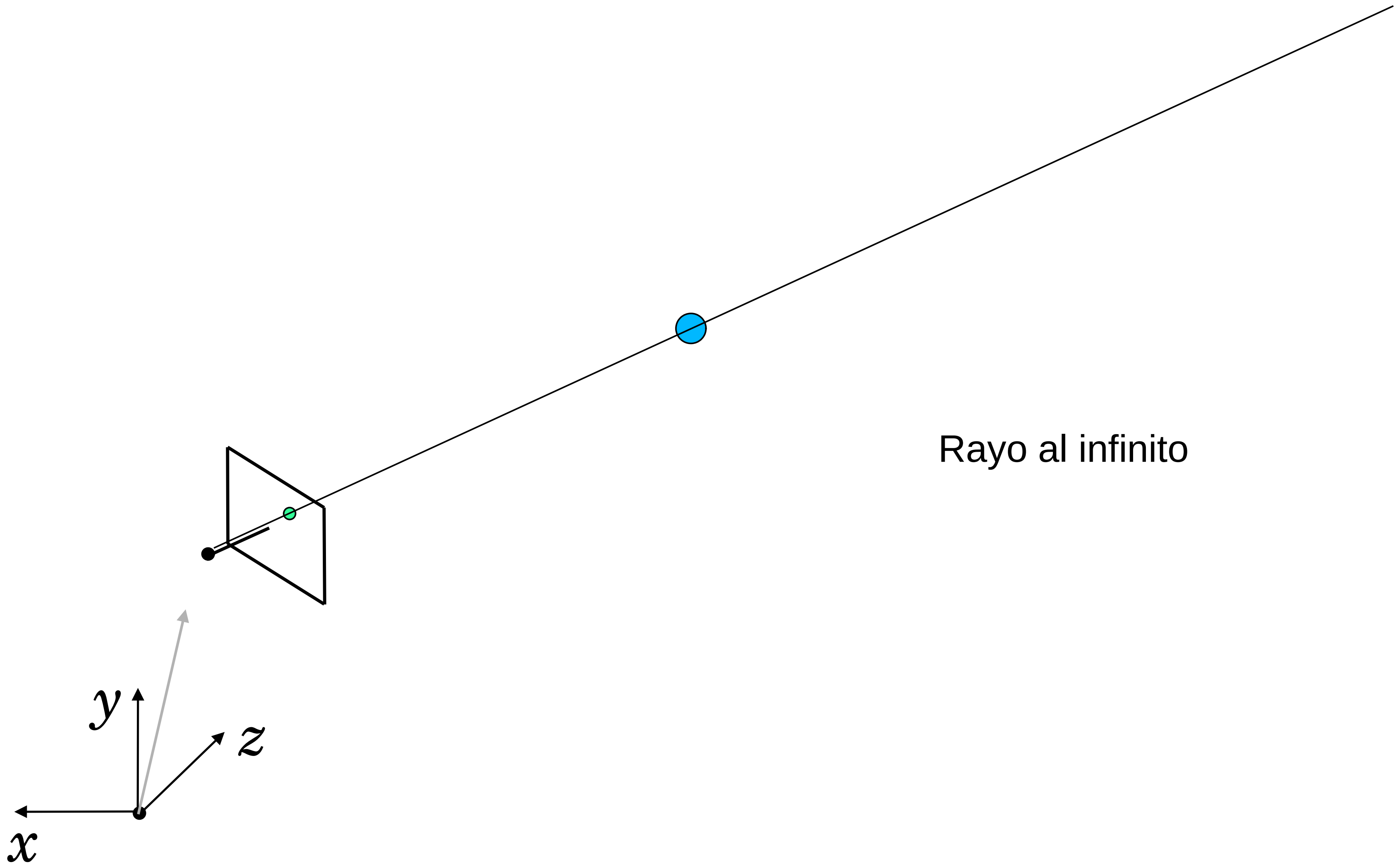


Correction
$C_{\mathbf{t+1}}$
Measurements
in Current View

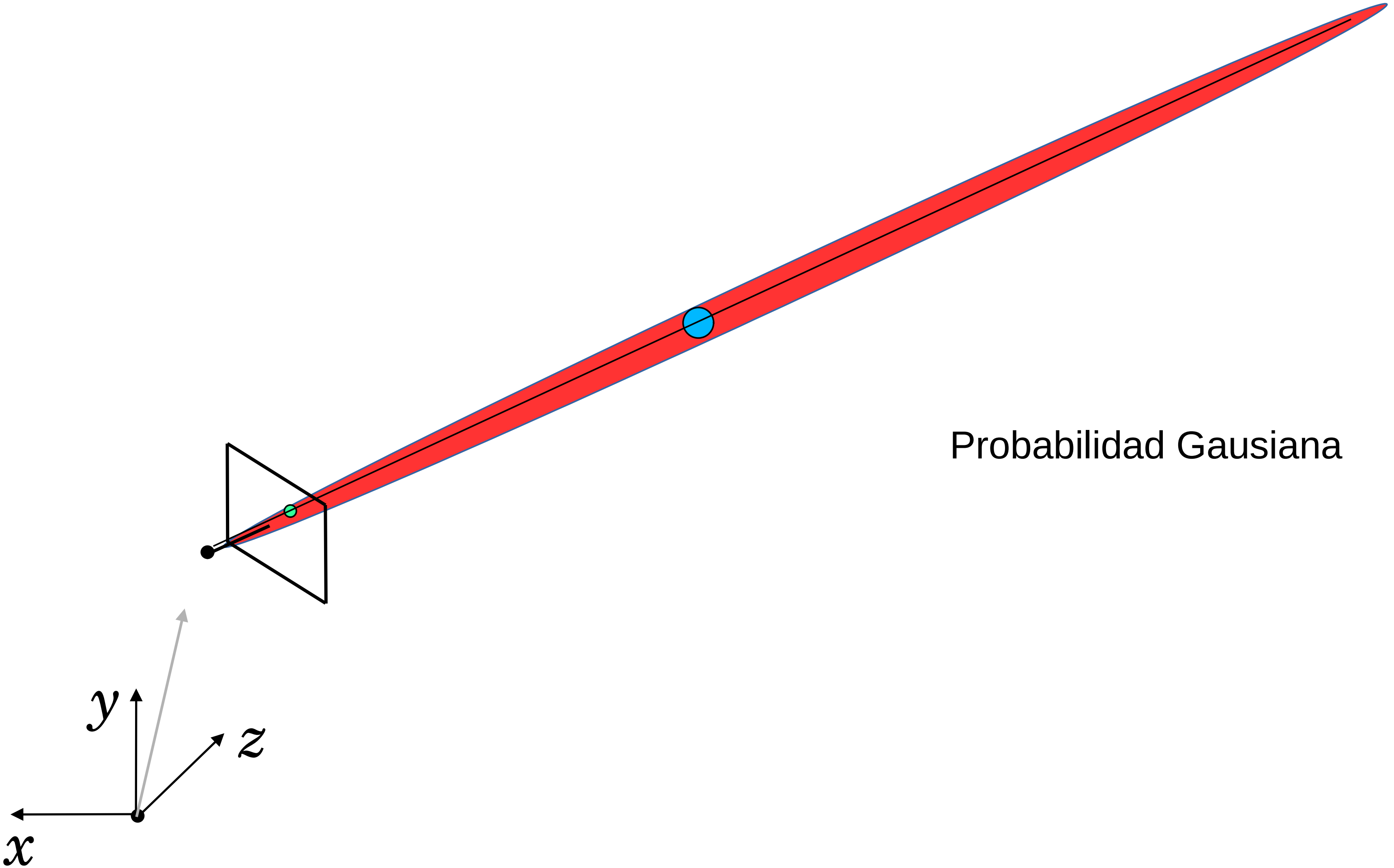

C_{t+1}

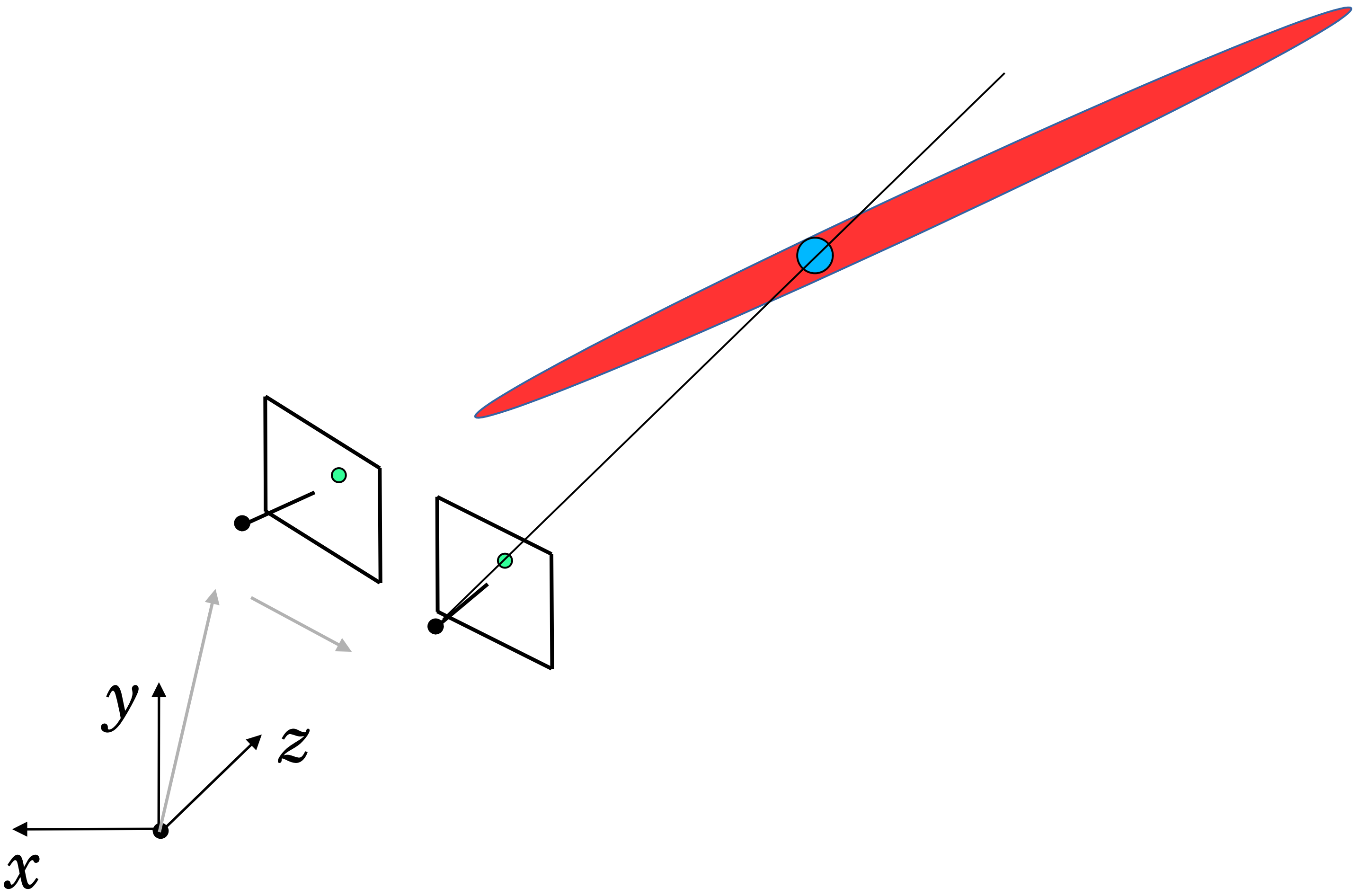
Agregando un nuevo punto 3D al mapa

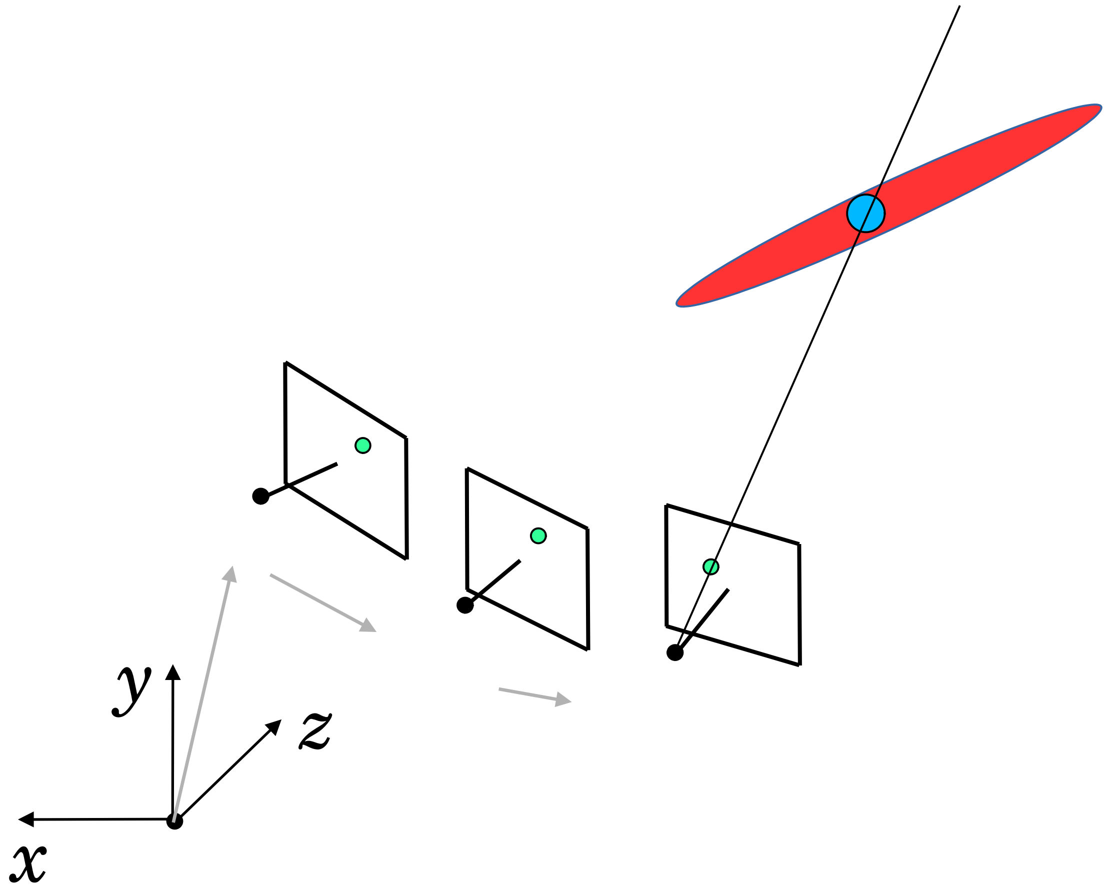
- Parameterización de profundidad inversa (Civera, 2008),

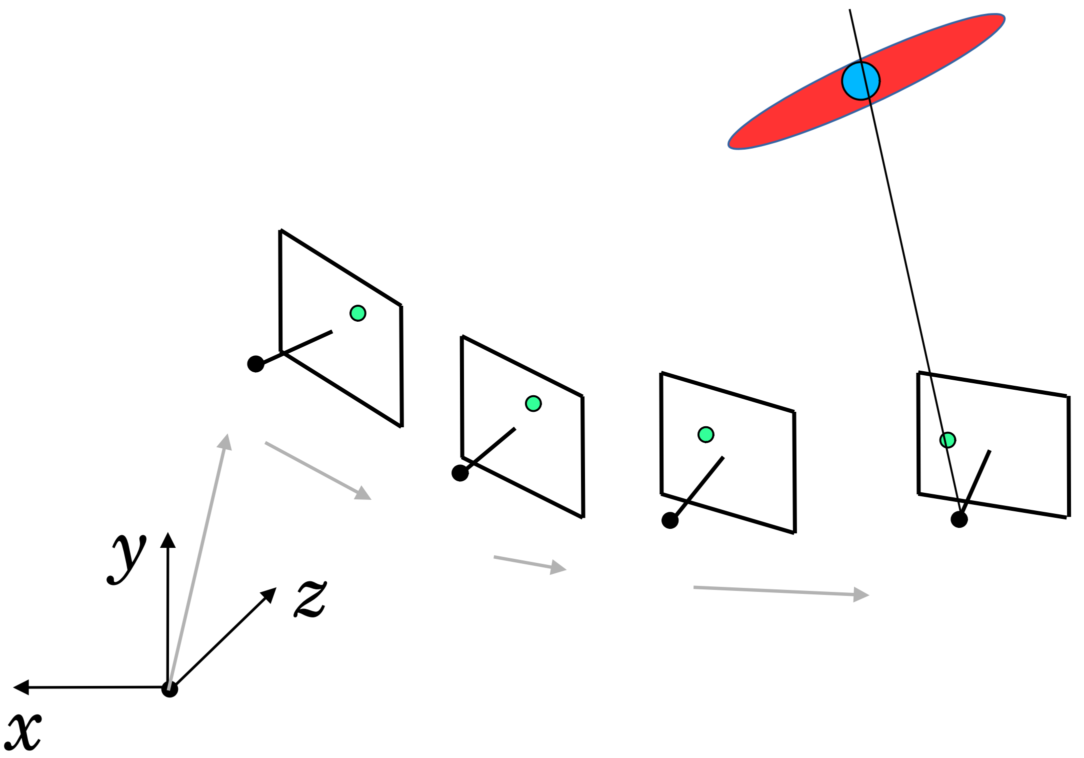


Rayo al infinito
y
z
x

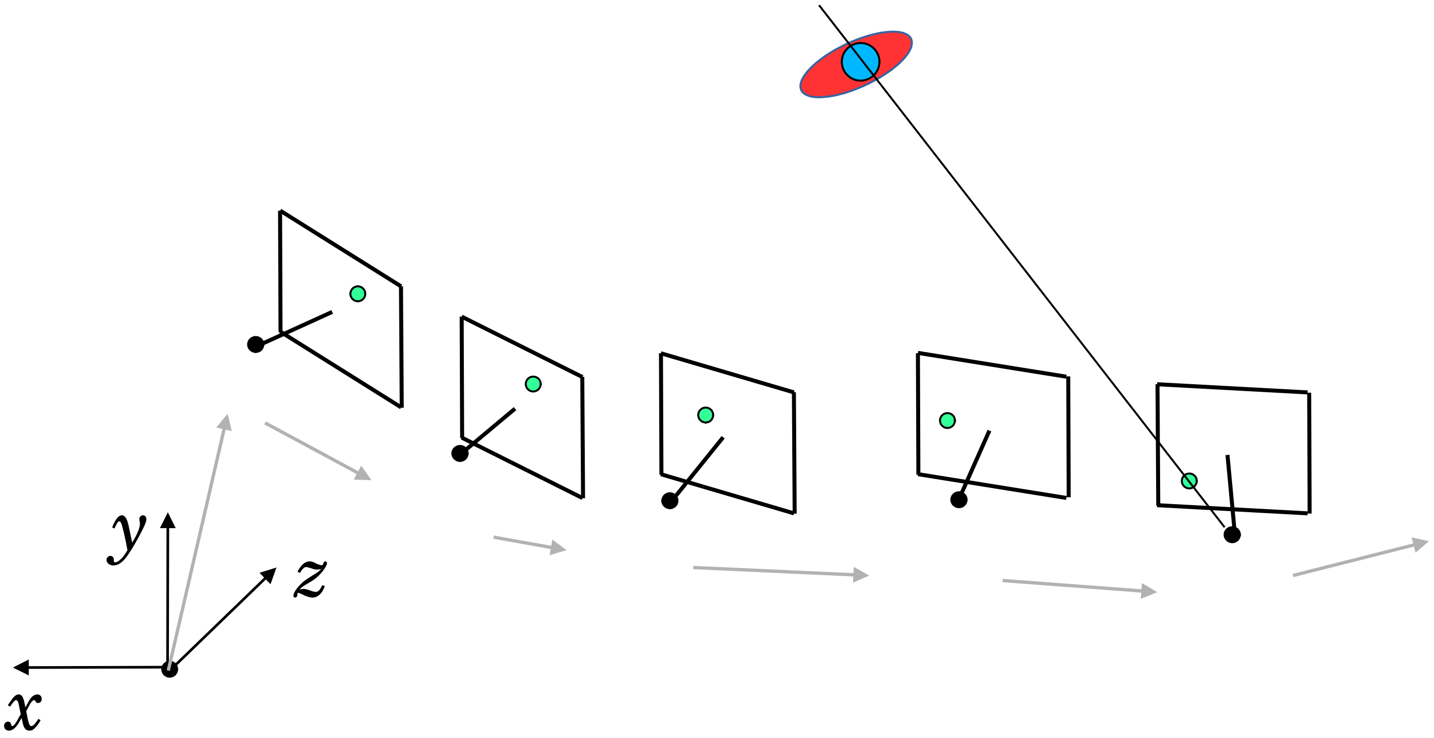

Probabilidad Gausiana
y
z
x


y
z
x


y
z
x



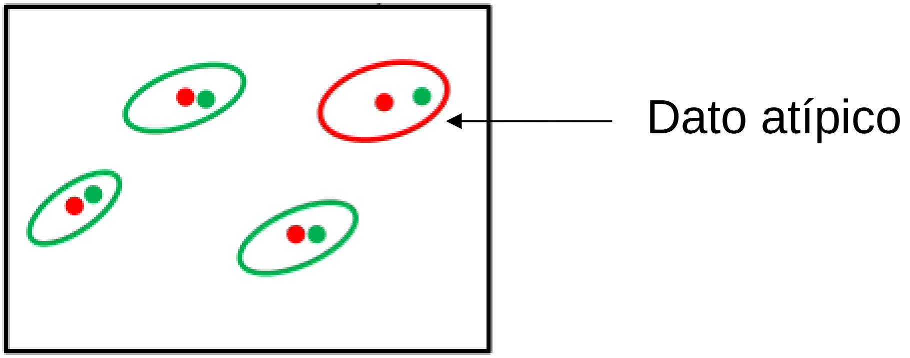
y
z
x



y
z
x

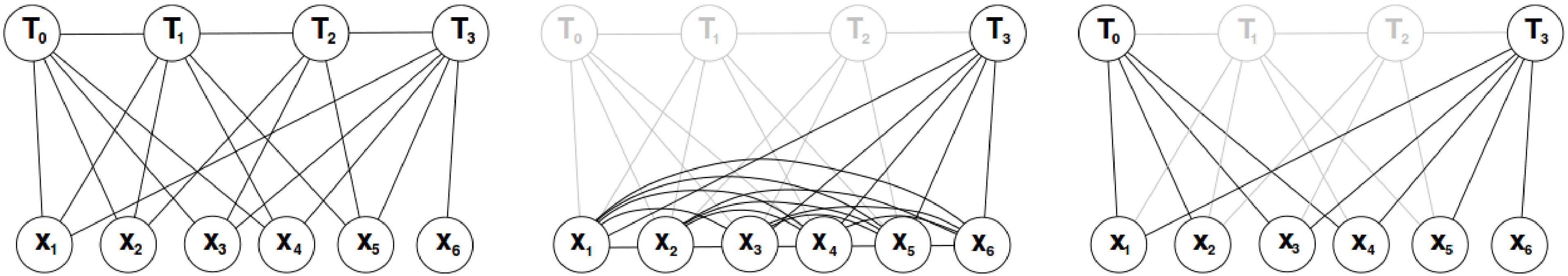
Asociación de datos en Visual SLAM

- 1 Point RANSAC (Civera,2009).
- Joint Compatibility Branch and Bound Test (Neira, 2001).



Visual SLAM

$$\chi^2(\mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{z}_{i,j} \in \mathcal{Z}_{0:i}} \left(\mathbf{z}_{i,j} - \hat{\mathbf{z}}(\mathrm{T}_i, \mathbf{x}_j)\right)^2$$



(a) Markov Random Field (b) Filter (c) Keyframe BA

Referencias

- Durrant-Whyte, H. and Bailey, T. Simultaneous Localisation and Mapping (SLAM): Part I The Essential Algorithms. IEEE ROBOTICS AND AUTOMATION MAGAZINE, 2006.
- Bailey, T. and Durrant-Whyte, H. "Simultaneous localization and mapping (SLAM): Part II." IEEE Robotics & Automation Magazine 13.3 (2006): 108-117.
- Welch, G., & Bishop, G. An introduction to the kalman filter. Proceedings of the Siggraph Course, Los Angeles. 2001.
- S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox. Probabilistic Robotics. MIT Press, 2005.
- Davison, A. Real-Time Simultaneous Localisation and Mapping with a Single Camera. International Conference in Computer Visión, 2003.
- Javier Civera, Óscar G. Grasa, Andrew J. Davison, J. M. M. Montiel
- Civera, J. 1-Point RANSAC for EKF-Based Structure from Motion. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS2009), 2009.
- Neira, J. Tardos, J.D. Data association in stochastic mapping using the joint compatibility test, Robotics and Automation, IEEE Transactions, 2001.
- Civera, J. Davison, A. and Montiel, J. M. M. Inverse Depth Parametrization for Monocular SLAM. IEEE Transactions on Robotics, 2008.
- Strasdat, H. Montiel, J.M.M. and Davison, A. Why Filter? International Conference on Robotics and Automation, 2010.
- Meilland, M., & Comport, A. I. On unifying key-frame and voxel-based dense visual SLAM at large scales. In Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013.