

Estimación Estocástica

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

Dr. José Martínez Carranza

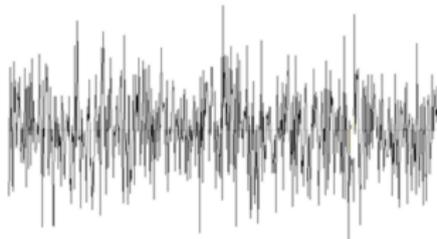
`alejandro.giles@inaoep.mx, carranza@inaoep.mx`

`ccc.inaoep.mx/~carranza/introb.html`

Ruido de Medición

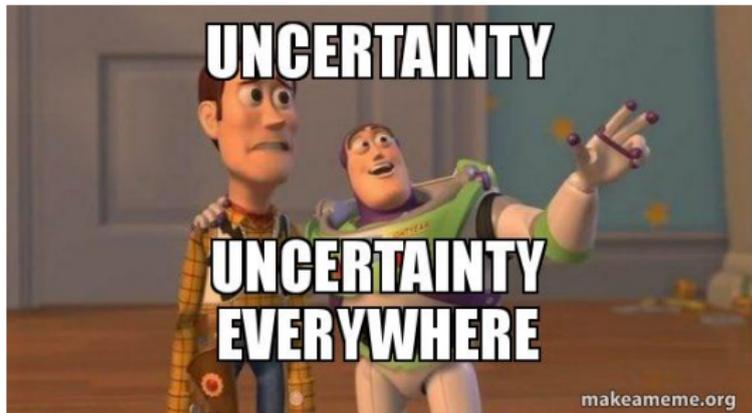
Noises be like:

***Noise noises ***



- Problemas de medición
 - Los sensores no son perfectos
 - ¿Qué tanto podemos confiar en las mediciones?

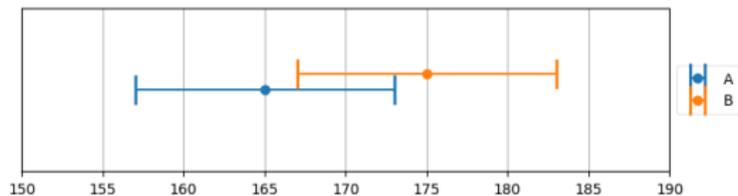
Conocimiento del Sistema



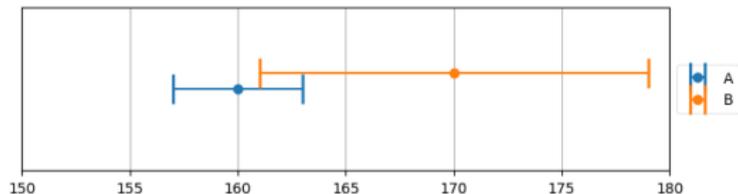
- Conocimiento *a priori*
 - ¿Se puede utilizar para mejorar la medición?
 - ¿Qué tan confiable es?

Mediciones inexactas

- 2 mediciones, diferentes básculas



- Diferente margen de error



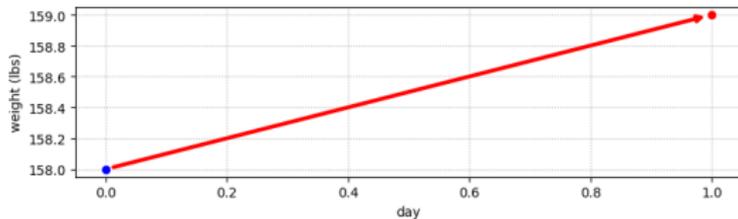
- La mejor solución parece ser promediar



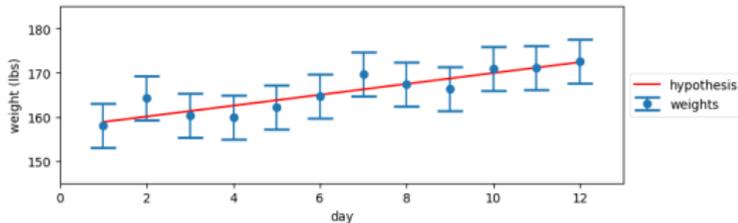
Modelo de Predicción



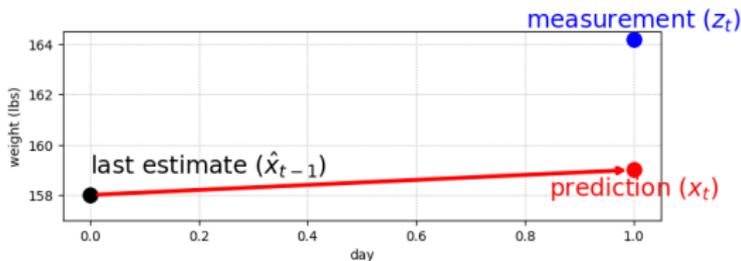
- Modelo: +1 kg/día



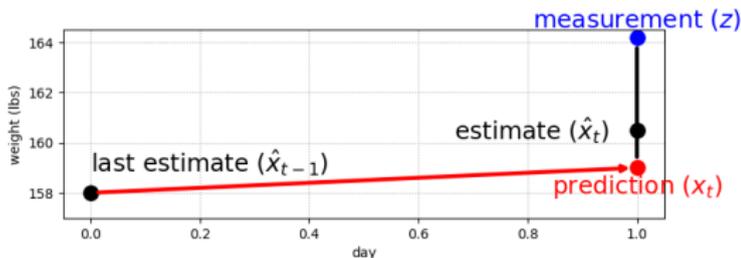
- Comparación con mediciones



Predicción vs Medición



- Se puede elegir un valor intermedio

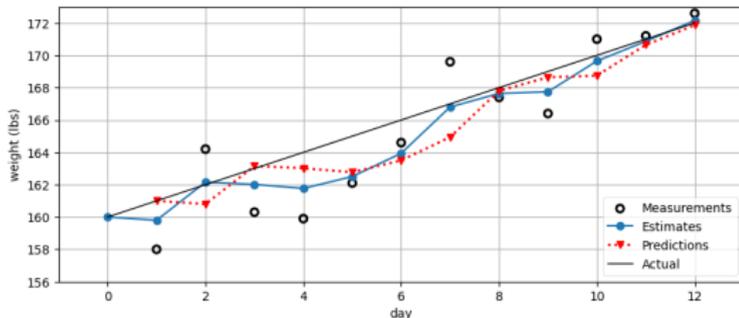


- Por ejemplo:

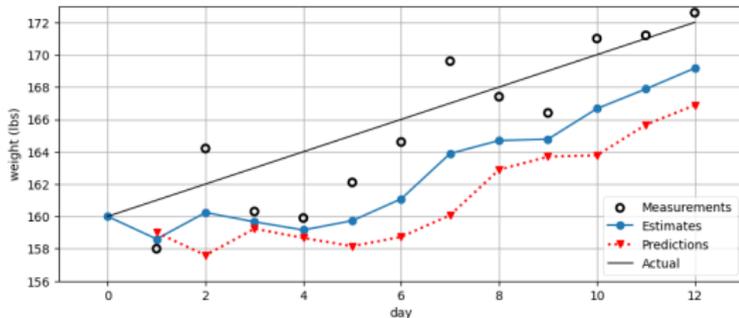
$$est = pred + \frac{4}{10}(med - pred)$$

Predicción Buena vs Mala

- Buena predicción (+1 kg/día) en presencia de ruido



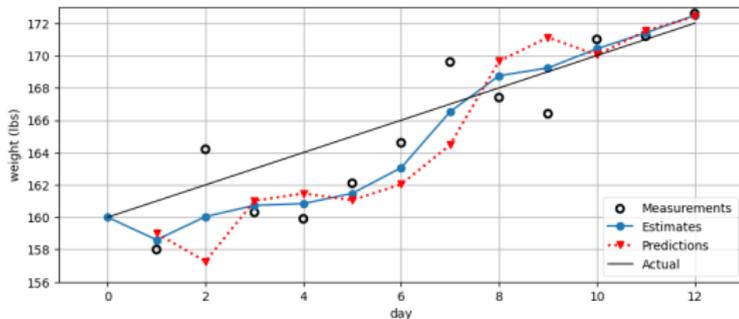
- Mala predicción (-1 kg/día), mismas mediciones



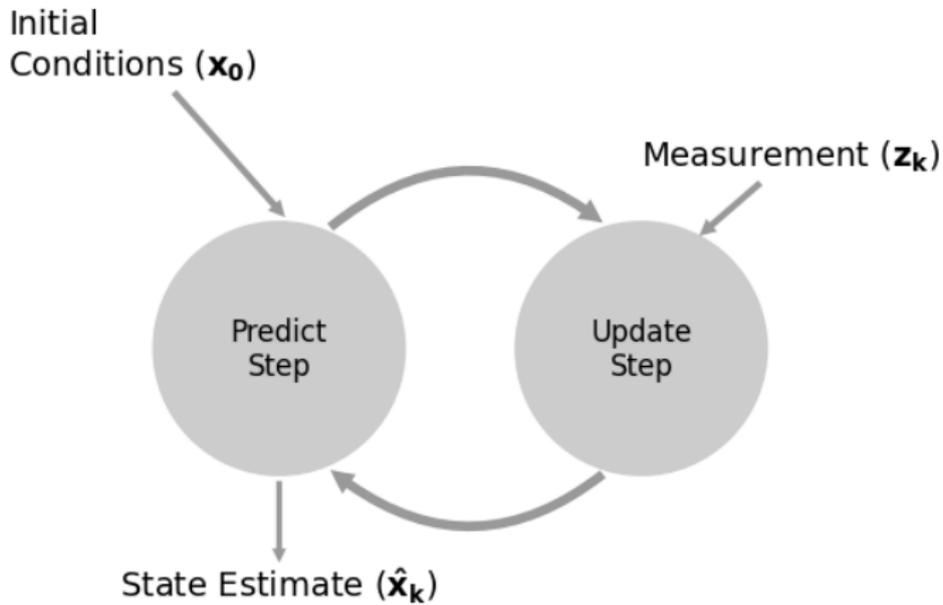
Ajustando la predicción

- Se comienza con (-1 kg/día) y se ajusta mediante

$$g_{\text{new}} = g_{\text{old}} + \frac{1}{3} \frac{(\text{med} - \text{pred})}{1 \text{ dia}}$$



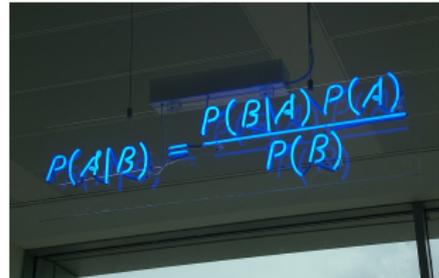
El filtro g-h



El Filtro Bayesiano



Figure: Thomas Bayes

A photograph of a screen displaying the mathematical formula for Bayes' theorem. The formula is written in blue ink and reads:
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

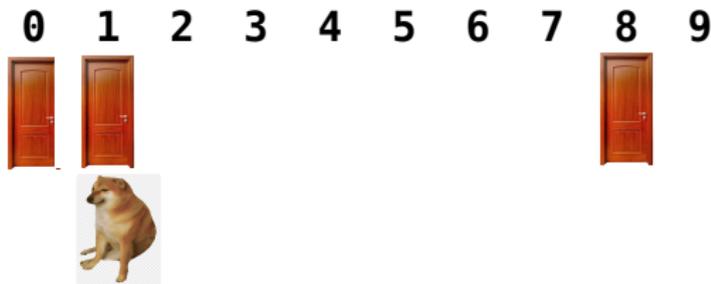
The Monty Hall Problem



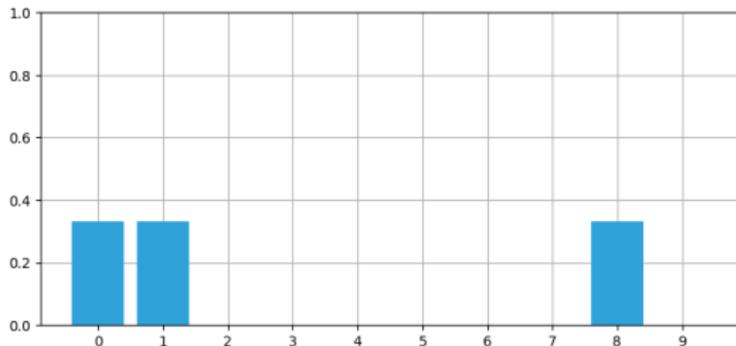
Video recomendado (Cómo escapar de la Trampa Bayesiana):
<https://youtu.be/D7KK1C0LOyw>

El Filtro Bayesiano

- Sensor: 1=puerta, 0=pasillo

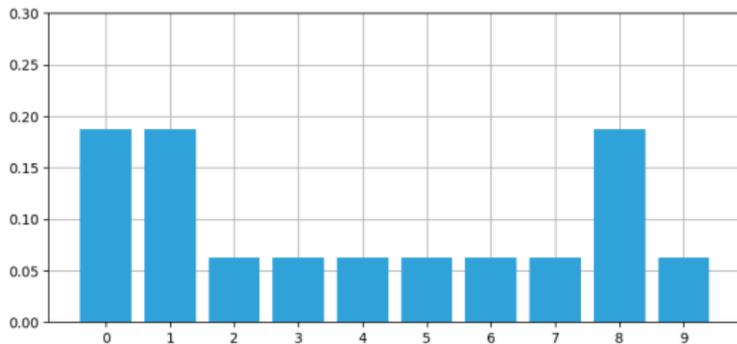


- Probabilidad después de 1 medición



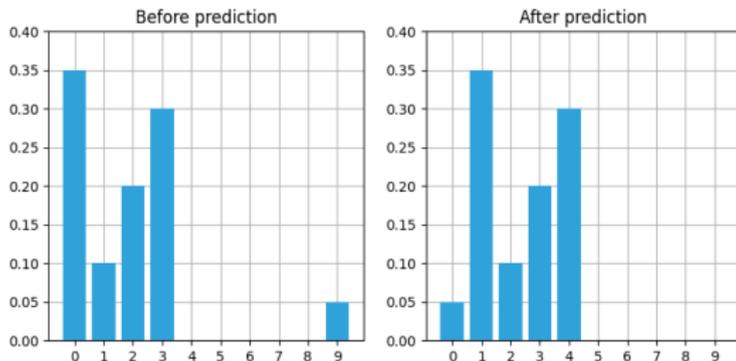
El Filtro Bayesiano

- Tomando en cuenta el ruido



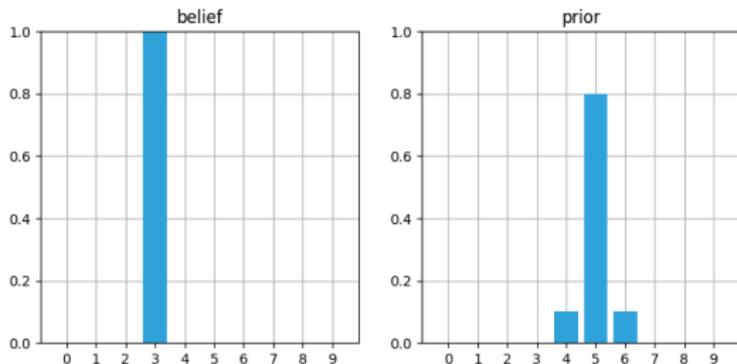
El Filtro Bayesiano

- Incorporando el modelo en la predicción

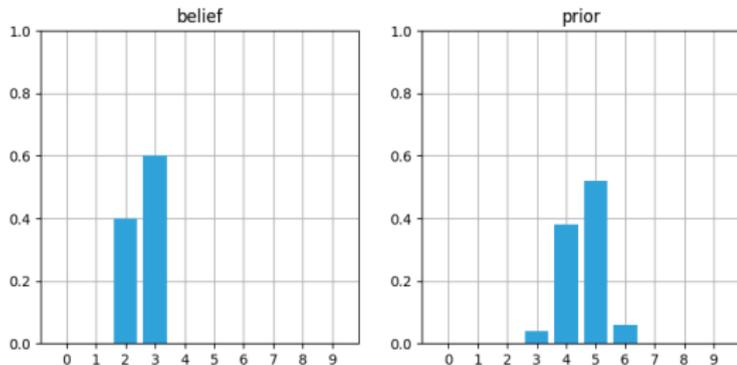


El Filtro Bayesiano

■ Incertidumbre de la predicción



■ Incertidumbre en el estado inicial



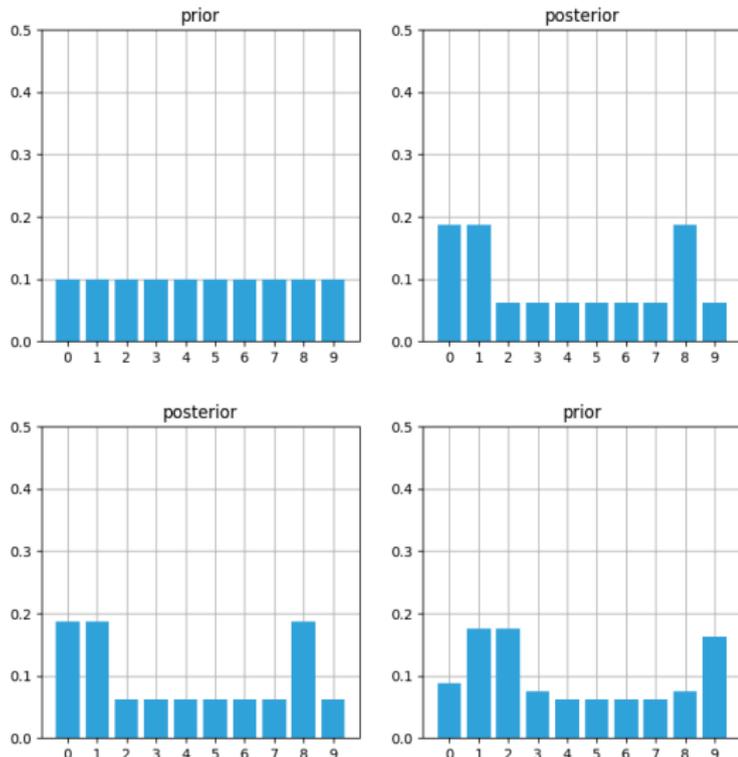
El Filtro Bayesiano

- Después de muchas iteraciones

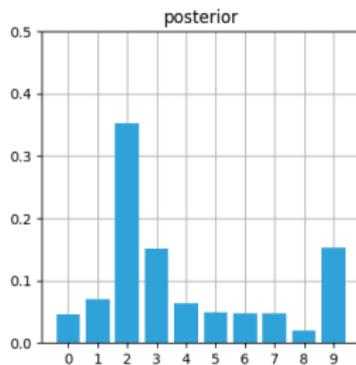
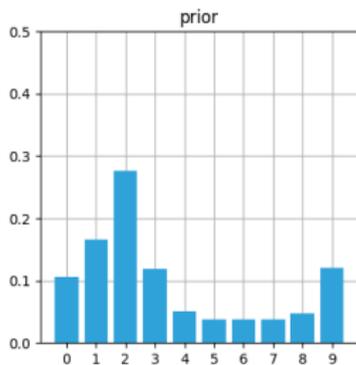
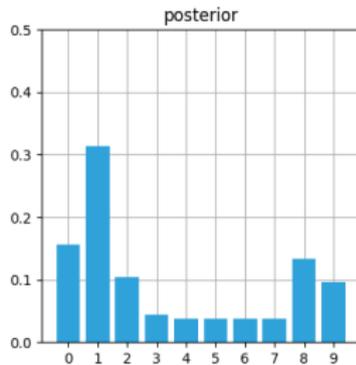
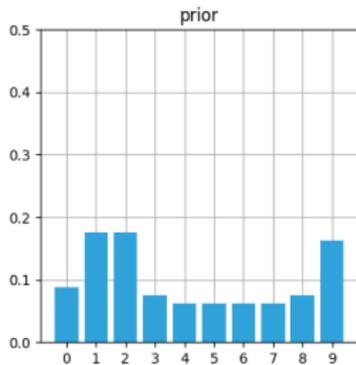
- ¿Cómo se evita esta pérdida de información?

El Filtro Bayesiano

- Incorporando la información de las mediciones



El Filtro Bayesiano



El Filtro Bayesiano

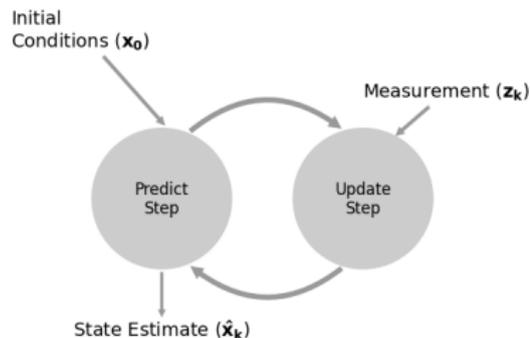
- Ecuaciones del filtro:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} * f_{\mathbf{x}}(\cdot)$$

$$\mathbf{x} = \|\mathcal{L} \cdot \bar{\mathbf{x}}\|$$

- Algoritmo:

- Inicializar el estado
- Predecir el próximo estado
- Ajustar el error de predicción
- Medición e incertidumbre asociada
- Comparación de la predicción y la medición
- Actualización del estado



Distribuciones Gaussianas

- Están definidas por dos parámetros: media y varianza.
- Si $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

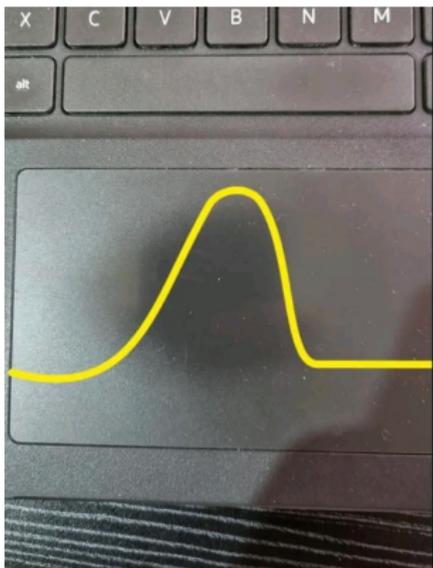
$$VAR(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

- La desviación estándar también es útil

$$\sigma = \sqrt{VAR(\mathbf{x})}$$

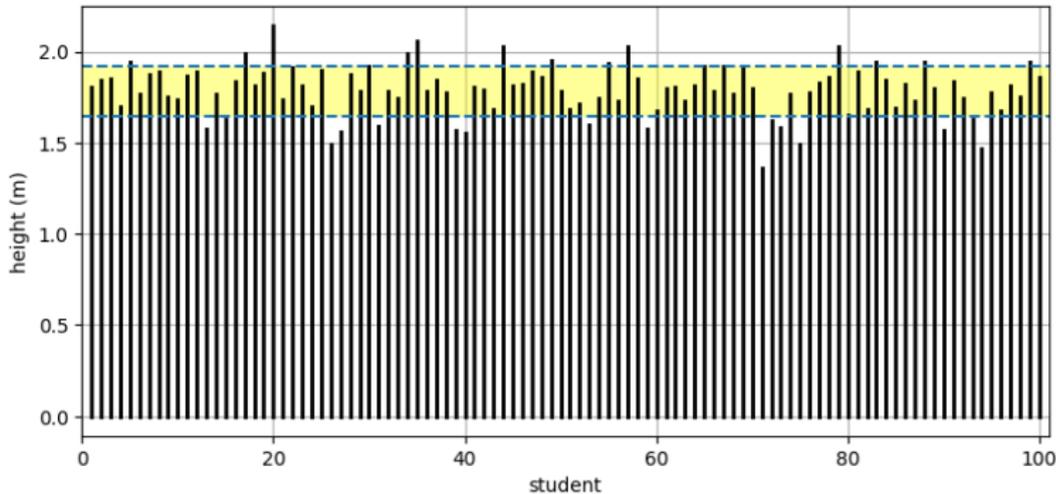
Distribuciones Gaussianas

- ¿Qué tan válidas son?



Distribuciones Gaussianas

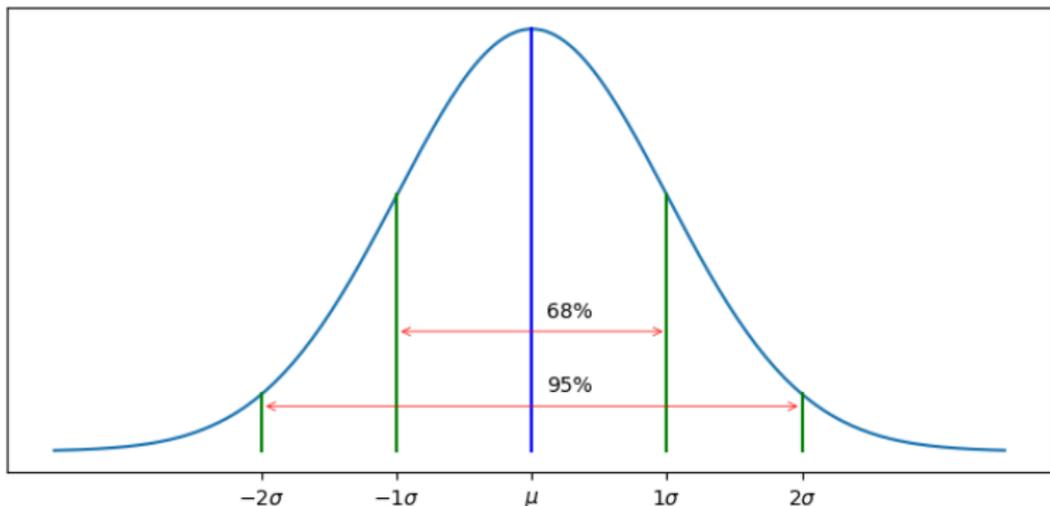
- Ejemplo: estaturas de un grupo



- $\mu = 1.785$, $\sigma = 0.137$

Distribuciones Gaussianas

- Regla del 68-95-99.7



Distribuciones Gaussianas

- Propiedades importantes:

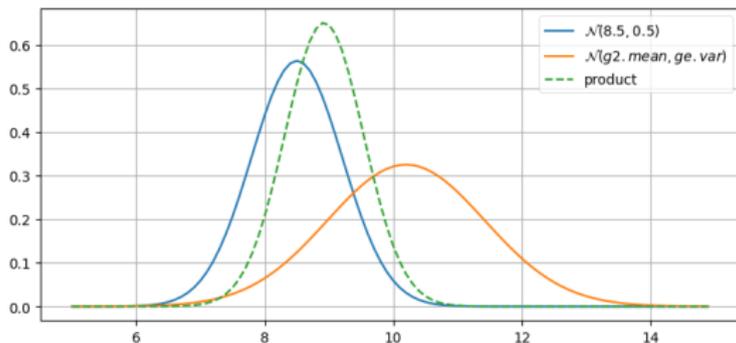
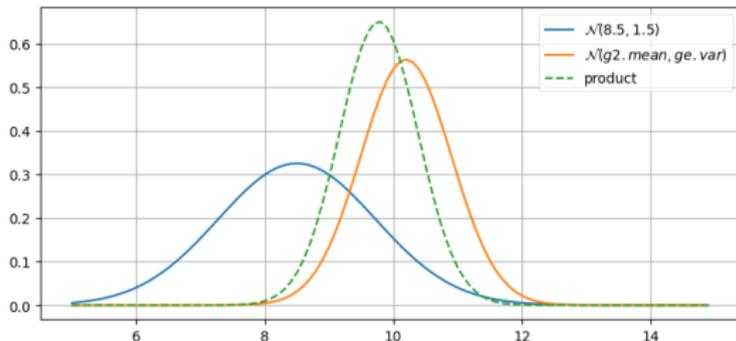
- Suma de dos Gaussianas

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2\end{aligned}$$

- Multiplicación de dos Gaussianas

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sigma_1^2 \mu_2 + \sigma_2^2 \mu_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \sigma^2 &= \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\end{aligned}$$

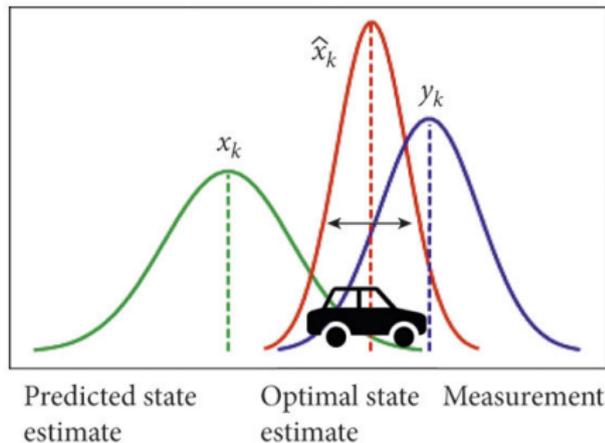
Multiplicación de Gaussianas



El Filtro de Kalman



Figure: Rudolf Emil Kalman



- Filtro de Wiener-Kolmogorov aplicado a sistemas en el espacio de estados.

Filtro de Kalman

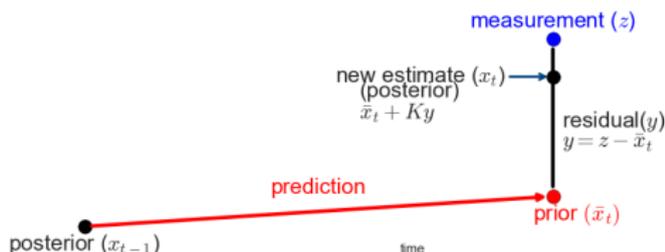
- Para un solo estado

Predict

Equation	Implementation	Kalman Form
$\bar{x} = x + f_x$	$\bar{\mu} = \mu + \mu_{f_x}$	$\bar{x} = x + dx$
	$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 + \sigma_{f_x}^2$	$\bar{P} = P + Q$

Update

Equation	Implementation	Kalman Form
$x = \ \mathcal{L}\bar{x}\ $	$y = z - \bar{\mu}$	$y = z - \bar{x}$
	$K = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}$	$K = \frac{\bar{P}}{\bar{P} + R}$
	$\mu = \bar{\mu} + Ky$	$x = \bar{x} + Ky$
	$\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2 \sigma_z^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}$	$P = (1 - K)\bar{P}$



El Filtro de Kalman

- Siguiendo al perro...

Filtro de Kalman

- Para sistemas con varios estados

Predict Step

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}$$

Update Step

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\bar{\mathbf{P}}$$

- \mathbf{x} y \mathbf{P} son la media y la covarianza del estado.
- \mathbf{F} es la matriz de transición de estados.
- \mathbf{Q} es la covarianza del proceso.
- \mathbf{B} es la matriz de entradas y \mathbf{u} son las entradas.
- \mathbf{H} es la matriz de salidas.
- \mathbf{z} y \mathbf{R} son la media de la salida y la covarianza del ruido.
- \mathbf{K} es la ganancia de Kalman.

Ejemplo

- Sistema de segundo orden en tiempo continuo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -b/m \end{bmatrix}$$

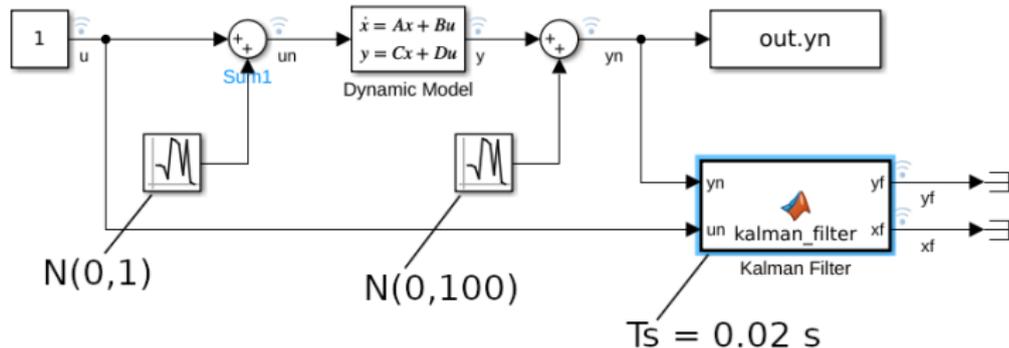
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

m: masa, b: coeficiente de fricción.

Ejemplo

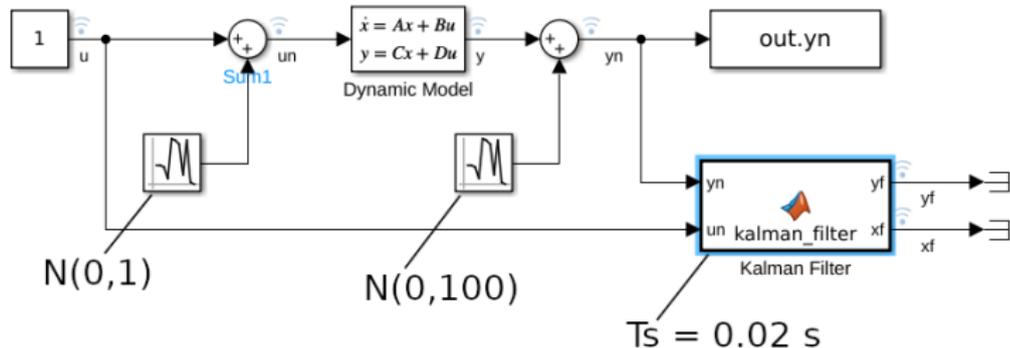
- Diagrama de bloques Simulink/Matlab



- Para obtener un modelo en tiempo discreto:
 $[Ad, Bd, Cd, Dd] = c2dm(A, B, C, D, Ts, 'zoh')$

Ejemplo

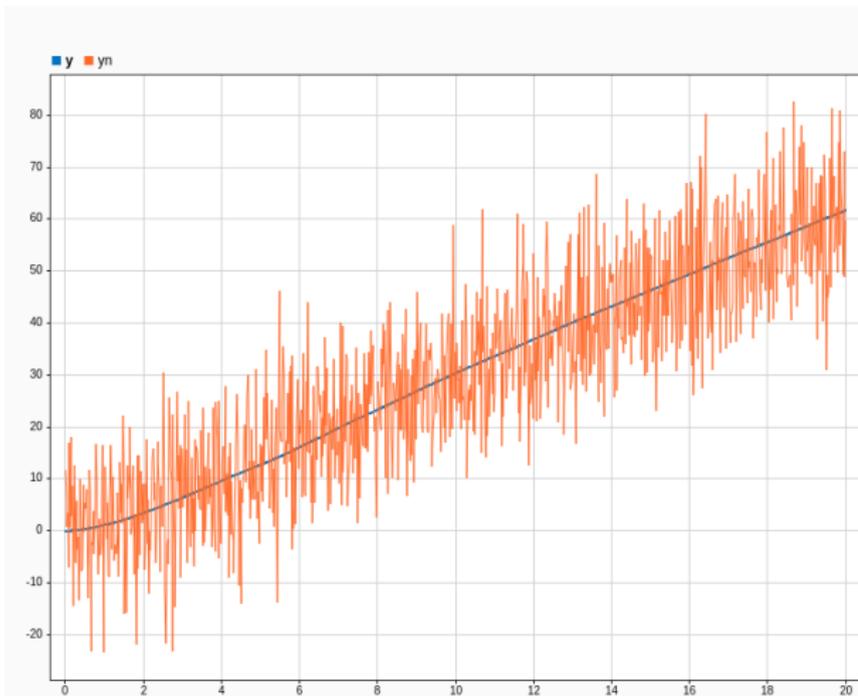
- Diagrama de bloques Simulink/Matlab



- Para obtener un modelo en tiempo discreto:
 $[Ad, Bd, Cd, Dd] = c2dm(A, B, C, D, Ts, 'zoh')$

Ejemplo

- Medición ruidosa



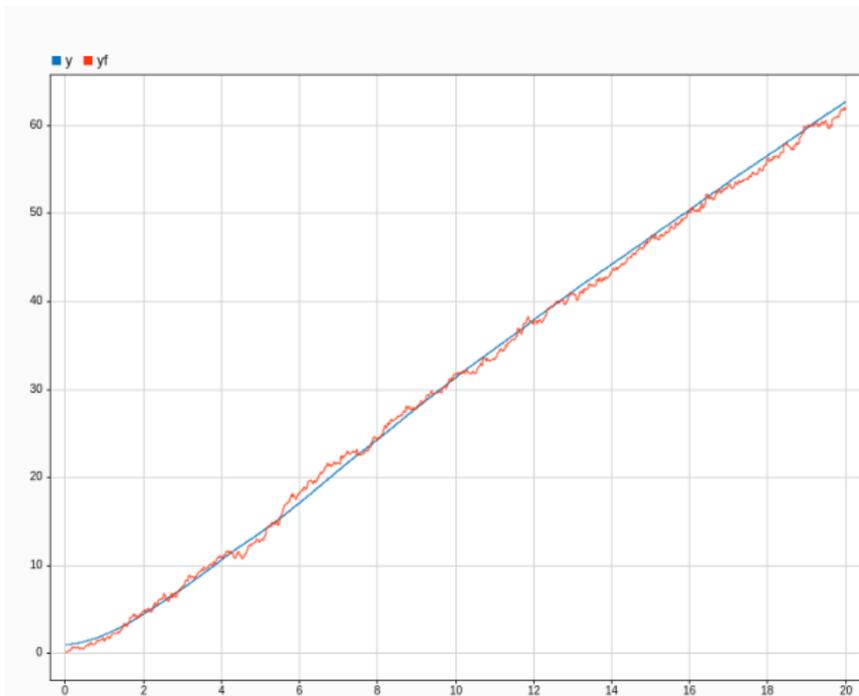
Ejemplo

■ Bloque Kalman Filter

```
kalmantestsimu ▶ Kalman Filter
1 function [yf,xf] = kalman_filter(yn,Ad, Bd, Cd, un)
2
3 persistent x P
4 if isempty(x); x = [0;0]; end
5 if isempty(P); P = eye(2); end
6
7 Q = diag([4.9751e-04,0.0496]); % Bd * cov(v)
8 R = 100; % cov(w)
9
10 % Prediction
11 x = Ad*x + Bd*un;
12 P = Ad*P*Ad' + Q;
13
14 % Update
15 yt = yn - Cd*x;
16 S = Cd*P*Cd' + R;
17 K = P*Cd'/S;
18 x = x + K*yt;
19 P = (eye(2)-K*Cd)*P;
20 yf = Cd*x;
21 xf = x;
```

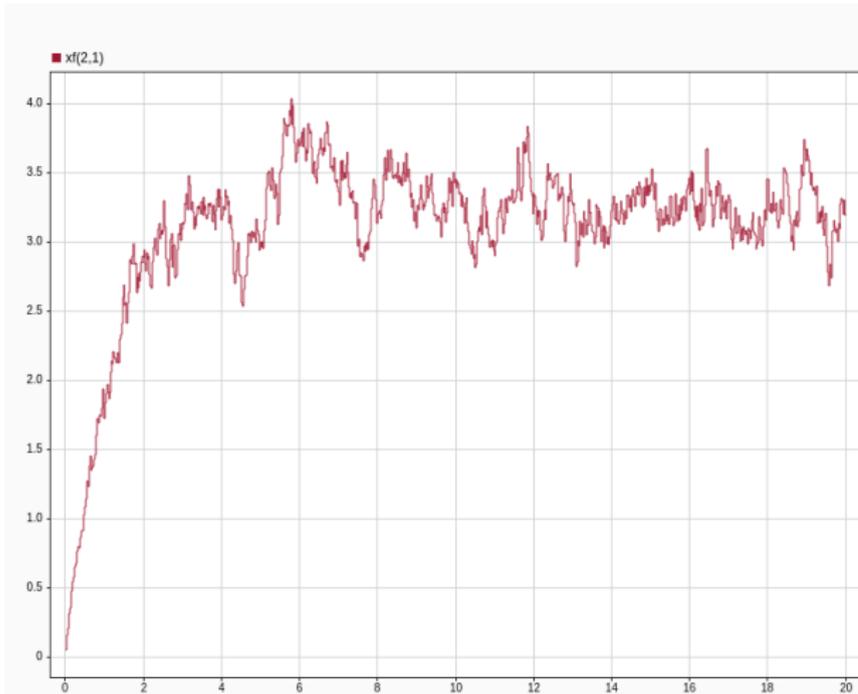
Ejemplo

Salida filtrada



Ejemplo

- Estimación de estados no medibles (aunque *observables*)



Filtro de Kalman Extendido (EKF)

- Para sistemas no lineales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$

linear Kalman filter	EKF
	$\mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t)}{\partial \mathbf{x}} \right _{\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t}$
$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$	$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^\top + \mathbf{Q}$	$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\mathbf{P}\mathbf{F}^\top + \mathbf{Q}$
	$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h(\bar{\mathbf{x}}_t)}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right _{\bar{\mathbf{x}}_t}$
$\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{H}\bar{\mathbf{x}}$	$\mathbf{y} = \mathbf{z} - h(\bar{\mathbf{x}})$
$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1}$	$\mathbf{K} = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^\top (\mathbf{H}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R})^{-1}$
$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{y}$	$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{y}$
$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\bar{\mathbf{P}}$	$\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\bar{\mathbf{P}}$

Filtro de Kalman Unscented (UKF)

Moving
Average



Kalman
Filtering



Extended
Kalman
Filter



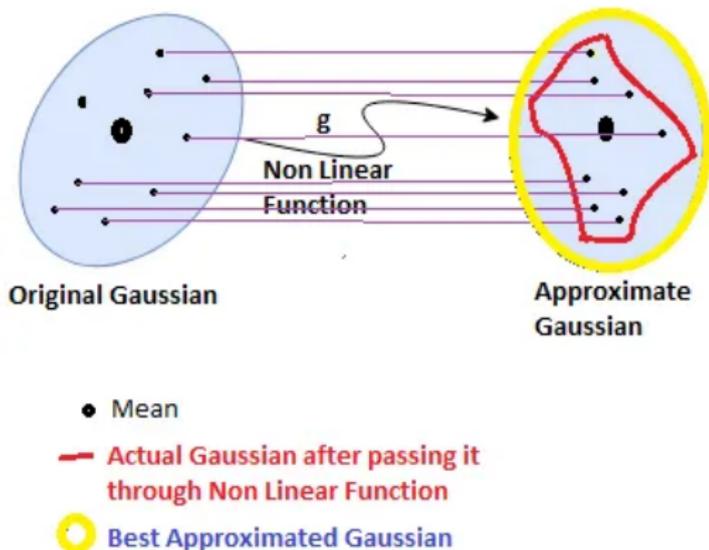
Unscented
Kalman
Filter



Figure: Jeffrey Uhlmann

Filtro de Kalman Unscented (UKF)

- No se necesitan calcular Jacobianos
- Mejor desempeño que el EKF



Libros Recomendados

1. Roger R. Labbe. Kalman and Bayesian Filters in Python. Creative Commons. Disponible online (gratis):
<https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python>
2. Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB®. Fourth Edition. 2015 John Wiley & Sons.