

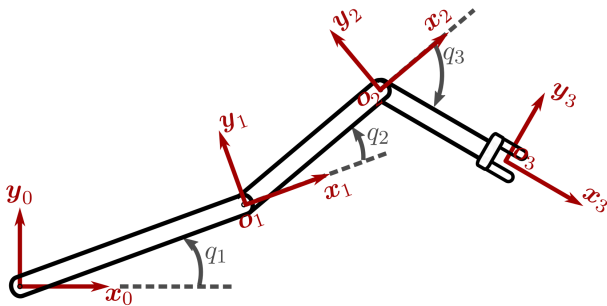
Rotaciones y Transformaciones Homogéneas

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

`alejandro.giles@inaoep.mx`

`ccc.inaoep.mx/~alejandro.giles`

Sistemas coordenados



■ Sistemas coordenados:

- ortonormales
- dextrógiros

Rotaciones en 2D

- La matriz

$${}^0\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

es conocida como **matriz de rotación**, del sistema $\mathbf{o}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1$ con respecto al sistema $\mathbf{o}_0\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0$ en función del ángulo θ .

- El operador para realizar esta operación es el **producto punto**, que en el espacio Cartesiano está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\angle ab), \quad (2)$$

donde $\angle ab$ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Rotaciones en 3D

- Una matriz de rotación en 2D se puede escribir como

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

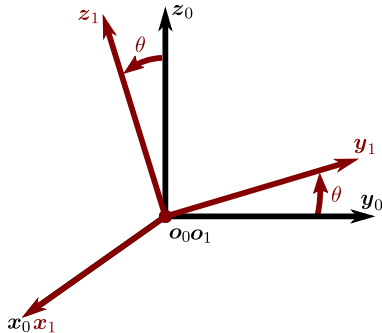
- Se puede generalizar el resultado anterior para el espacio Cartesiano en 3D como

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

- Nótese que cada columna corresponde a las componentes de cada vector unitario del sistema $\mathbf{o}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$ con respecto al sistema $\mathbf{o}_0\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ y viceversa, cada renglón de esta matriz representa las componentes de los vectores del sistema $\mathbf{o}_0\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ con respecto al sistema $\mathbf{o}_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1\mathbf{z}_1$.

Matrices de rotación básicas

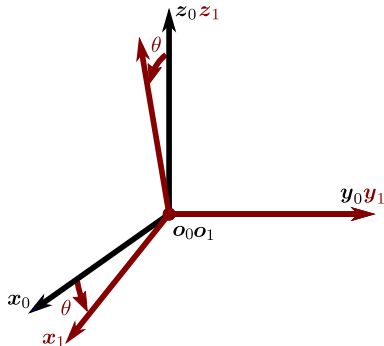
- Rotación básica sobre el eje x .



$$\mathbf{R}_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Matrices de rotación básicas

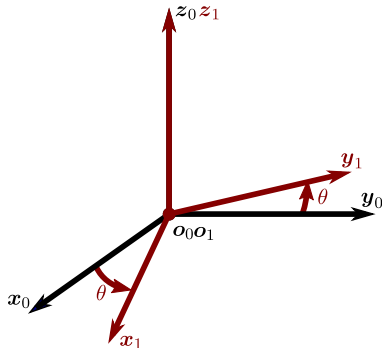
- Rotación básica sobre el eje y .



$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Matrices de rotación básicas

- Rotación básica sobre el eje z .



$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Propiedades de las Rotaciones

- El conjunto de las matrices de rotación forma el **Grupo Especial Ortonormal de orden 3** y se denota como $SO(3)$.
- Un elemento de este grupo $\mathbf{R} \in SO(3)$ cumple con las siguiente propiedades:
 - Es **cerrado con respecto a la multiplicación matricial**.
 - Se cumple que $\det(\mathbf{R}) = 1$, para la representación de sistemas coordenados dextrógiros¹.
 - Su matriz inversa es igual a su transpuesta, i.e.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T. \quad (8)$$

¹Si se permite representar también sistemas levógiros, entonces $\det(\mathbf{R}) \pm 1$ y se conoce simplemente como Grupo Ortonormal de orden 3.

Propiedades de las Rotaciones

- Lo anterior implica que

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}. \quad (9)$$

- Si una matriz de rotación relaciona dos sistemas coordenados, como ${}^a\mathbf{R}_b$, entonces sus columnas representan a los vectores que forman el sistema coordenado $\mathbf{o}_b\mathbf{x}_b\mathbf{y}_b\mathbf{z}_b$ con respecto al sistema $\mathbf{o}_a\mathbf{x}_a\mathbf{y}_a\mathbf{z}_a$.
- De la misma forma, los renglones de ${}^a\mathbf{R}_b$ representan los vectores que definen al sistema $\mathbf{o}_a\mathbf{x}_a\mathbf{y}_a\mathbf{z}_a$ con respecto al sistema $\mathbf{o}_b\mathbf{x}_b\mathbf{y}_b\mathbf{z}_b$.

Propiedades de las Rotaciones

- Las propiedades anteriores implican que:
 - Sus columnas (renglones) tienen norma unitaria.
 - Sus columnas (renglones) son mutuamente ortogonales, i.e. su producto punto siempre es cero.
 - Reglas de composición: una rotación sobre el sistema actual **postmultiplica** la ecuación, mientras que una rotación sobre el sistema fijo **premultiplica** la ecuación.

Parametrización de rotaciones

- **Proposición [ángulos de Euler]:** Cualquier matriz de rotación arbitraria $\mathbf{R} \in SO(3)$ se puede obtener como una composición de tres rotaciones básicas, mientras no se realicen dos rotaciones consecutivas sobre el mismo eje.
- Existen doce posibles composiciones de matrices básicas de rotación sobre los ejes coordenados x , y y z , i.e. XYX , XYZ , XZX , XZY , YXY , YXZ , YZX , YZY , ZXY , ZXZ , ZYX y ZYZ .
- Las más utilizadas en robótica son las últimas dos, i.e. ZYX que se conoce como **Roll-Pitch-Yaw** y ZYZ que se conoce como **ángulos de Euler**.

Ángulos de Euler

- El problema se puede enunciar como sigue: dada una matriz $\mathbf{R} \in SO(3)$, cuyos componentes son

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

encontrar los ángulos ϕ , θ y ψ , tales que

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\phi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{z,\psi}. \quad (11)$$

- Desarrollando el lado derecho se tiene

$$\begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$c_\theta = \cos(\theta), \quad s_\theta = \sin(\theta).$$

Ángulos de Euler

- Igualando (10) y (12) se obtienen 9 ecuaciones algebraicas no lineales con tres incógnitas (ϕ , θ y ψ).
- En este curso se utilizará únicamente la función $\text{atan2}(y, x)$ que calcula el ángulo correspondiente al cuadrante en el que se encuentra el vector de posición con coordenadas (x, y) .
- La función $\text{atan2}(y, x)$ está definido para casi todo el plano Cartesiano, con excepción del punto $(0, 0)$.
- La ecuación más sencilla de resolver es la del elemento r_{33} , i.e. $c_\theta = r_{33}$. Utilizando la función atan2 y la conocida identidad trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, se obtiene la solución para θ

$$\theta = \text{atan2}(\pm\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33}). \quad (13)$$

Ángulos de Euler

- 1 En el caso $r_{33} \neq \pm 1$ se tiene $s_\theta \neq 0$ y se pueden utilizar los elementos r_{13} , r_{23} , r_{31} y r_{32} para obtener ϕ y ψ . En este caso existen dos soluciones, dependiendo del signo que se elija en (13), que a su vez es el signo de θ .

1.1 Si se elige $\theta > 0$

$$\phi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13}) \quad (14)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31}). \quad (15)$$

1.2 Si se elige $\theta < 0$

$$\phi = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \quad (16)$$

$$\psi = \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}). \quad (17)$$

Ángulos de Euler

- 2 En el caso $r_{33} = \pm 1$ se tiene un caso singular, ya que $s_\theta = 0$ y no se pueden utilizar los elementos r_{13} , r_{23} , r_{31} y r_{32} para obtener ϕ y ψ . De nuevo se consideran dos casos.

2.1 Si $r_{33} = 1$, entonces $c_\theta = 1$ y sustituyendo en (12) se tiene

$$c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi = r_{11} \quad (18)$$

$$s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi = r_{21} . \quad (19)$$

Utilizando las identidades

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

se tiene

$$\cos(\phi + \psi) = r_{11} \quad (20)$$

$$\sin(\phi + \psi) = r_{21} . \quad (21)$$

Ángulos de Euler

Por lo tanto, existen soluciones infinitas y sólo se puede determinar la suma, i.e.

$$\phi + \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) . \quad (22)$$

2.2 Por último, si $r_{33} = -1$, entonces $c_\theta = -1$, sustituyendo en (12) y utilizando las identidades anteriores, se tiene

$$-\cos(\phi - \psi) = r_{11} \quad (23)$$

$$-\sin(\phi - \psi) = r_{21} , \quad (24)$$

por lo que sólo se puede determinar la resta

$$\phi - \psi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) . \quad (25)$$

Nota: una práctica común tanto en el caso 2.1 como en el 2.2 es elegir uno de los ángulos ϕ o ψ igual a cero y entonces el otro queda automáticamente determinado.

Roll-Pitch-Yaw

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi}. \quad (26)$$

1 Si $r_{31} \neq \pm 1$

$$\theta = \text{atan2}\left(-r_{31}, \pm \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right). \quad (27)$$

1.1 Si se elige $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \quad (28)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}). \quad (29)$$

1.2 Si se elige $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

$$\phi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \quad (30)$$

$$\psi = \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33}). \quad (31)$$

Eje-Ángulo

- Dado un vector $\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$ y un ángulo θ , se puede obtener

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_x r_y(1 - c_\theta) - r_z s_\theta & r_x r_z(1 - c_\theta) + r_y s_\theta \\ r_x r_y(1 - c_\theta) + r_z s_\theta & r_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) - r_x s_\theta \\ r_x r_z(1 - c_\theta) - r_y s_\theta & r_y r_z(1 - c_\theta) + r_x s_\theta & r_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix} \quad (32)$$

- Se cumple la propiedad

$$\mathbf{R}(-\theta, -\mathbf{r}) = \mathbf{R}(\theta, \mathbf{r}) . \quad (33)$$

Eje-Ángulo

■ Problema inverso, dada $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$, entonces

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad (34)$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Cuaterniones Unitarios

- Parte escalar q_w y parte vectorial $\mathbf{q}_r = [q_x \quad q_y \quad q_z]^T$

$$\mathbf{q}_r = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{r} \quad (36)$$

$$q_w = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (37)$$

donde $\mathbf{r}$ y θ son los mismos que para Eje-Ángulo.

- Los componentes del cuaternión satisfacen

$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2 = 1.$$

Cuaterniones Unitarios

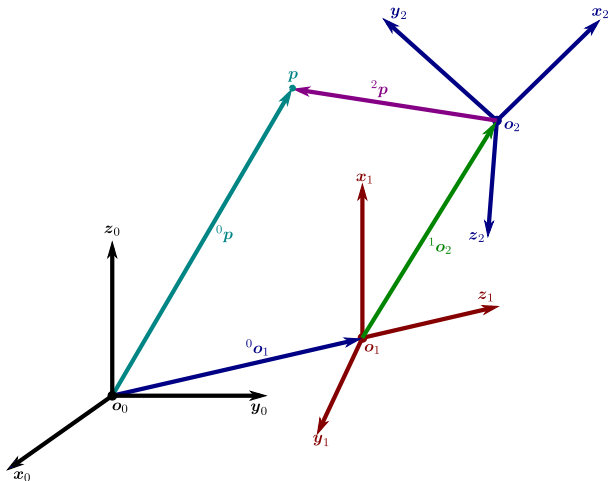
- Dado un cuaternión $\mathbf{q} = [q_x \ q_y \ q_z \ q_w]^T$, se puede calcular la matriz de rotación

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2(q_x^2 + q_w^2) - 1 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 2(q_y^2 + q_w^2) - 1 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 2(q_z^2 + q_w^2) - 1 \end{bmatrix}$$

- Problema inverso

$$\mathbf{q}_r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{sign}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \text{sign}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \text{sign}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$
$$q_w = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

Movimientos rígidos



- Haciendo la suma vectorial se obtiene

$${}^0p = {}^0o_1 + {}^0R_1{}^1o_2 + {}^0R_1{}^1R_2{}^2p.$$

Transformaciones Homogéneas

- Se puede forzar la estructura de grupo mediante la **matriz de transformación homogénea**.

$${}^aH_b = \begin{bmatrix} {}^aR_b & {}^a\mathbf{o}_b \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

- Se deben ampliar los vectores:
 - Vectores de posición: se les agrega un 1 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^a\mathbf{p}$ es

$${}^a\bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

- Vectores libres: se les agrega un 0 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^a\mathbf{v}$ es

$${}^a\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Transformaciones Homogéneas

- Para el ejemplo de la figura

$${}^0\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{o}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$${}^1\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2 & {}^1\mathbf{o}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} . \quad (42)$$

- Por lo que

$${}^0\bar{\mathbf{p}} = {}^0\mathbf{H}_1 {}^1\mathbf{H}_2 {}^2\bar{\mathbf{p}} \quad (43)$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{o}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{R}_2 & {}^1\mathbf{o}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$= \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{p} + {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{o}_2 + {}^0\mathbf{o}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Propiedades de $SE(3)$

- Sea ${}^a\mathbf{H}_b \in SE(3)$, entonces cumple con las siguientes propiedades:

1 Determinante:

$$\det({}^a\mathbf{H}_b) = 1.$$

2 Inversa:

$${}^a\mathbf{H}_b^{-1} = {}^b\mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{R}_b^T & -{}^a\mathbf{R}_b^T \mathbf{o}_b \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

3 Reglas de composición: si un movimiento rígido se hace con respecto al sistema **actual**, la matriz de transformación homogénea **postmultiplica** la ecuación, mientras que si el movimiento es con respecto al sistema **fijo**, dicha matriz **premultiplica** la ecuación.

Transformaciones Homogéneas

- **Matrices de transformación homogéneas básicas.**
Tres de traslación:

$$\begin{aligned} \text{Tras}_{x,a} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{Tras}_{y,a} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{Tras}_{z,a} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Transformaciones Homogéneas

- Y tres de rotación:

$$Rot_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$Rot_{z,\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Libros Recomendados

1. Marco A. Arteaga, Alejandro Gutiérrez-Giles y Javier Pliego-Jiménez. Local Stability and Ultimate Boundedness in the Control of Robot Manipulators. Springer. 2022.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-85980-0>
2. Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani y Giuseppe Oriolo. Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer London. 2008.
<https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>
3. Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. Robot Modeling and Control. 2nd Edition. Wiley. 2020
4. K. S. Fu, R.C. Gonzalez y C.S.G. Lee. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. Mcgraw-Hill. 1987.