



Control Parte IV: Control por Modos Deslizantes

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: **gzt5pya**



Control por Modos Deslizantes

- A pesar de las ventajas que tiene el Controlador Basado en Pasividad, aún necesita del conocimiento del modelo dinámico para obtener dichas ventajas.
- Una forma de obviar el conocimiento del modelo es si se conoce la cota máxima de la norma

$$\|H\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + D\dot{q}_r + g\| \leq \rho. \quad (1)$$

- Como punto de partida, considérese el modelo *pasivizado*

$$H(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ds = \tau - H(q)\ddot{q}_r - C(q, \dot{q})\dot{q}_r - D\dot{q}_r - g(q). \quad (2)$$

- Para probar la estabilidad de $s = 0$ se toma la función candidata de Lyapunov $V = \frac{1}{2}s^T H(q)s$, cuya derivada a lo largo de las trayectorias es

$$\dot{V} = s^T H(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{H}(q)s. \quad (3)$$



Control por Modos Deslizantes

- Si se sustituye $\mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}}$ de (2) se obtiene (omitiendo argumentos)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \mathbf{s}^T (-\mathbf{C}\mathbf{s} - \mathbf{D}\mathbf{s} + \boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{g}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q})\mathbf{s} \\ &= -\mathbf{s}^T \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau} - \mathbf{s}^T (\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}) , \quad (4)\end{aligned}$$

donde se utilizó la propiedad de antisimetría para eliminar el término $\mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{s}$.

- El objetivo es obtener $\dot{V} \leq 0$, por lo que pensaremos en el peor caso.



Control por Modos Deslizantes

- El primer término de (4) ayuda al objetivo. Por otro lado, el último término es de signo indefinido y el peor caso se puede encontrar por medio de la norma como

$$\dot{V} \leq \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau} + \|\mathbf{s}\| \| \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g} \| \leq \mathbf{s}^T \boldsymbol{\tau} + \|\mathbf{s}\| \rho. \quad (5)$$

- Se puede definir la entrada de control como

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}_m \text{sign}(\mathbf{s}), \quad (6)$$

donde $\mathbf{K}_m$ es una matriz de ganancias diagonal positiva definida y la función $\text{sign}(\cdot)$ se define como

$$\text{sign}(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s > 0 \\ 0, & \text{si } s = 0 \\ -1, & \text{si } s < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

En el caso vectorial, se aplica a cada componente.



Control por Modos Deslizantes

- Si se toma es escalar $k_m = \min(k_{m_{ii}})$, i.e. el elemento más pequeño en la diagonal de $\mathbf{K}_m$ y utilizando la ley de control (6) se puede acotar

$$\dot{V} \leq (\rho - k_m) \|\mathbf{s}\|, \quad (8)$$

de donde se concluye que $\dot{V} < 0$ si $k_m > \rho$, con lo que se concluye estabilidad asintótica de $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.

- Por simplicidad se tomó una sola cota para todo el vector que depende del modelo en (1), pero se obtiene mejor desempeño si se obtiene una cota para cada articulación, i.e.

$$\|\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}\|_i \leq \rho_i, \quad (9)$$

donde el subíndice i denota la i -ésima articulación. De esta forma, se puede sintonizar la matriz de ganancias diagonal $\mathbf{K}_m$ en (6) mediante $k_{m_{ii}} > \rho_i$.

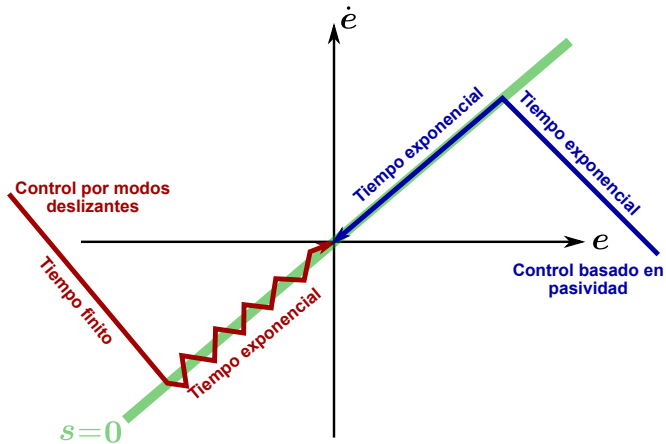


Control por Modos Deslizantes

- De hecho la estabilidad de $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ es más que asintótica, es **en tiempo finito**, i.e. el sistema llega, desde cualquier condición inicial a $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ en tiempo finito (teóricamente, la convergencia exponencial se acerca cada vez más rápido, pero nunca llega exactamente a $\mathbf{s} = \mathbf{0}$).
- Esto se puede observar si se analiza el plano de fase de ejes $\mathbf{e}$ y $\dot{\mathbf{e}}$ mostrado en la siguiente página. La convergencia a la superficie deslizante $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ es en tiempo finito y una vez en esta superficie, la convergencia al origen $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es en tiempo exponencial. En contraste, para el control basado en pasividad, ambas convergencias son exponenciales.



Control por Modos Deslizantes





Control por Modos Deslizantes

- El precio a pagar es el **chattering** (también ilustrado en la figura), que se traduce como *castaño*. Esto se debe a la dinámica propia de los actuadores y es inevitable en la práctica.
- Si la ganancia K_m se elige muy grande es más fácil cumplir con la condición necesaria para la estabilidad, sin embargo, aumentará el chattering. Mientras más pequeña sea la ganancia pero siga cumpliendo con la condición $k_{m_i} > \rho_i$, mejor será el desempeño del controlador.
- Este controlador es robusto ante incertidumbres en el modelo, ante perturbaciones y ante dinámicas no modeladas.