Control Parte III: Control Adaptable

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

- A pesar de las ventajas que tiene el Controlador Basado en Pasividad, aún necesita del conocimiento del modelo dinámico para obtener dichas ventajas.
- Una forma de obviar el conocimiento del modelo es utilizando la propiedad de parametrización lineal del modelo Lagrangiano, i.e.

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\theta}\,. \tag{1}$$

- Si se parte del modelo *pasivizado*

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{s} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\tau} - \left(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})\right). \tag{2}$$

se puede observar que el término $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$ también es susceptible de ser parametrizado linealmente.

- Sólo que en este caso, el regresor es un poco diferente, i.e.

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}},\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{\theta}\,, \quad (3)$$

donde $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$ es el mismo vector de parámetros que en (1).

- La diferencia entre los dos regresores $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})$ y $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}},\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}})$ radica en los términos $\dot{\boldsymbol{q}}$, $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}}$.

- Recordemos que $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} = \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} - \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{d}})$.

Ejemplo

- Por ejemplo, para el robot planar de 2 grados de libertad, visto anteriormente, el regresor modificado es

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3(2c_2) + \theta_4 & \theta_3 c_2 + \theta_4 \\ \theta_3 c_2 + \theta_4 & \theta_4 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} \\ \ddot{q}_{r2} \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{q}}_r} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_3 s_2 \dot{q}_2 & -\theta_3 s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_3 s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}_r}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_5 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_{r1} \\ \dot{q}_{r2} \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{q}}_r} + \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_7 c_1 + \theta_8 c_{12} \\ \theta_8 c_{12} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r1} & 2c_2 \ddot{q}_{r1} + c_2 \ddot{q}_{r2} - s_2 \dot{q}_2 \dot{q}_{r1} - s_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \dot{q}_{r2} & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & \dot{q}_{r1} & 0 & c_1 & c_{12} \\ 0 & 0 & c_2 \ddot{q}_{r1} + s_2 \dot{q}_1 \dot{q}_{r1} & \ddot{q}_{r1} + \ddot{q}_{r2} & 0 & \dot{q}_{r2} & 0 & c_{12} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}_r,\ddot{\boldsymbol{q}}_r)}$$

$$\times \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}}.$$

- Una de las ventajas del regresor modificado es que no se necesita medir la aceleración para calcularlo, debido a que $\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} - \boldsymbol{\Lambda}(\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})$.

- Regresando al diseño del controlador, supóngase que no se conoce exactamente el vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$ sino un aproximado, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. En este caso, la ley de control basado en pasividad sería

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}}, \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}})\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{s}\,, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{K}_{\mathrm{v}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de ganancias positiva definida.

- Ahora, si proponemos que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no sea constante podemos definir cómo cambia su derivada con respecto al tiempo, a esto se le conoce como ley de adaptación.

- Para proponer dicha ley de adaptación, primero tenemos que definir el nuevo estado

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} \triangleq \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\,. \tag{5}$$

- Por lo tanto, ahora nuestro sistema tiene dos estados $\boldsymbol{s}$ y $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$. Si llevamos a estos dos estados asintóticamente a cero, habremos resuelto el problema de control.

- Para ello, considérese la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{s} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\theta}}\,, \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ es una matriz diagonal de ganancias positivas.

- La derivada de V a lo largo de las trayectorias de (2) en lazo cerrado con la ley de control (4) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\big(-\boldsymbol{D}\boldsymbol{s} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}},\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}})\tilde{\boldsymbol{\theta}}\big) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= -\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}\big(\boldsymbol{K}_{\mathrm{v}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{s}\big) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}},\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}})\boldsymbol{s} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

dado que $\dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$.

- Desafortunadamente, no se puede elegir una ley de adaptación $\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ tal que $\dot{V}$ sea negativa definida. Lo mejor que se puede lograr es $\dot{V} \leq 0$ cancelando los últimos dos términos, i.e. eligiendo

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}}, \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{r}}) \boldsymbol{s} \,. \tag{8}$$

- Aunque todo el estado $(\boldsymbol{s}, \tilde{\boldsymbol{\theta}})$ no tiende asintóticamente a cero, se puede demostrar que de hecho $\boldsymbol{s} \to \mathbf{0}$ asintóticamente, lo que resuelve el problema de seguimiento de trayectorias.

- También es posible demostrar que $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow \mathbf{0}$ sólo si existe excitación persistente en las señales que componen el regresor. Esta condición implica que se exciten todas los modos (frecuencias) posibles para el robot. En el límite, seguimiento de una señal puramente aleatoria en todas las frecuencias (ruido blanco).

- Por lo anterior, no cabe esperar que los parámetros estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se aproximen a los reales $\boldsymbol{\theta}$, aunque los errores de seguimiento $\boldsymbol{e}$ y $\dot{\boldsymbol{e}}$ si tienden a cero.