



Control Parte II: Control Basado en Pasividad

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: **gzt5pya**



Control Basado en Pasividad

- Anteriormente, cuando se revisaron las propiedades del modelo Lagrangiano, se estableció la pasividad del mismo con entrada τ , salida $\dot{\mathbf{q}}$ y función de almacenamiento $\mathcal{H} = \mathcal{K} + \mathcal{P}$, llegando a la llamada **desigualdad de pasividad**

$$\dot{\mathcal{H}} \leq \dot{\mathbf{q}}^T \tau. \quad (1)$$

- La energía cinética $\mathcal{K}$ es una función cuadrática positiva definida en $\dot{\mathbf{q}}$. Por otra parte, la energía potencial no tiene signo definido. Sin embargo, si la energía potencial $\mathcal{P}$ fuera positiva definida en $\mathbf{q}$, entonces el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ calificaría como función candidata de Lyapunov y la desigualdad de pasividad probaría la estabilidad del punto de equilibrio si elegimos la entrada $\tau = \mathbf{0}$ o $\tau = -\mathbf{K}_v \dot{\mathbf{q}}$, donde $\mathbf{K}_v$ es una matriz simétrica positiva definida de $n \times n$.



Control Basado en Pasividad

- Recordemos el modelo Lagrangiano

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (2)$$

Como sabemos que existe un punto de equilibrio estable cuando elegimos $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, la única posibilidad es $\dot{\mathbf{q}} \equiv \mathbf{0}$ y por ende $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$, i.e. el sistema tiende al punto donde el par gravitatorio es igual a cero.

- Si se toma como función candidata de Lyapunov el Hamiltoniano, se demuestra la estabilidad de este punto de equilibrio.
- Pero no nos interesa en particular este punto de equilibrio. Además nos interesa que en lugar de $\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{0}$, sean los errores de posición y velocidad, i.e. $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.



Control Basado en Pasividad

- Al notar que la propiedad de pasividad del modelo Lagrangiano, depende de la estructura del mismo, y en particular de que $\dot{H} - 2C$ es antisimétrica, Slotine y Li propusieron ¹ el siguiente cambio de variables (conocido como Algoritmo de Slotine-Li)

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e \quad (3)$$

$$s = \dot{q} - \dot{q}_r = \dot{e} + \Lambda e, \quad (4)$$

donde $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de ganancias simétrica y positiva definida.

- Si se sustituyen estas variables en el modelo Lagrangiano, se obtiene

$$H(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + Ds = \tau - H(q)\ddot{q}_r - C(q, \dot{q})\dot{q}_r - D\dot{q}_r - g(q). \quad (5)$$

¹Slotine, J. J. E., and Li, W. (1987). On the adaptive control of robot manipulators. The international journal of robotics research, 6(3), 49-59.



Control Basado en Pasividad

- Es fácil demostrar que este nuevo modelo es pasivo de la entrada $\tau - \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{g}(\mathbf{q})$ a la salida $\mathbf{s}$ con función de almacenamiento $V = \frac{1}{2}\mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{s}$.
- Por lo tanto, es fácil estabilizar el sistema haciendo la salida cero o con una **retroalimentación negativa de la salida pasiva**.
- El algoritmo tiene la ventaja de que puede estabilizar ambos errores, de posición y de velocidad, mediante una sola variable $\mathbf{s}$.
- Nótese que si se logra hacer que $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$, de su definición se tiene la siguiente ecuación diferencial vectorial

$$\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (6)$$



Control Basado en Pasividad

- La solución de esta ecuación diferencial es una exponencial tendiente a cero, i.e. $(e, \dot{e}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Esto se cumple siempre que $\mathbf{s} = \mathbf{0}$.
- Sin embargo, en general la condición inicial $\mathbf{s}(t_0) \neq \mathbf{0}$, por lo que primero se debe de estabilizar $\mathbf{s}$ mediante la retroalimentación negativa de la salida pasiva dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_v\mathbf{s}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{K}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz de ganancias simétrica positiva definida.

- La primera parte de (7) hace que la salida pasiva sea igual a cero, mientras que el término $-\mathbf{K}_v\mathbf{s}$ añade una retroalimentación negativa de la salida pasiva (añade amortiguamiento).



Control Basado en Pasividad

- Este mismo término

$$-K_v s = -K_v (\dot{e} + \Lambda e) \quad (8)$$

es equivalente a un controlador PD.

- A diferencia del controlador Par Calculado, el término $H\ddot{q}_r + C\dot{q}_r + D\dot{q}_r + g$ no cancela exactamente el modelo dinámico, sino que es una prealimentación de la dinámica, debido a que depende de las velocidades y aceleraciones deseadas, por medio de la variable $\dot{q}_r$.
- Debido a lo anterior, puede demostrarse que este controlador es más robusto con respecto a errores en el modelo y perturbaciones externas que el control Par Calculado y compensa mejor las no linealidades que el controlador PD+.