Control Par Calculado y Control PD+

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Objetivo de Control

- Se parte de una posición, velocidad y aceleración deseadas para las coordenadas articulares, $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$, $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}$, respectivamente.
- Normalmente se diseña la pose del efector final como $\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} \in \mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{R} \in SO(3)$ y con ello se obtienen $\boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$, $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}$ mediante la cinemática inversa y la cinemática diferencial (Jacobiano) inversa.
- El objetivo de control es hacer que las coordenadas articulares reales $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ y $\ddot{\boldsymbol{q}}$ tiendan a las deseadas, al menos de forma asintótica. Si se define el error $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}$ y sus respectivas derivadas, el objetivo de control equivale a hacer $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{e}}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ cuando $t \to \infty$.
- Para lograr este objetivo se debe diseñar la entrada, que puede depender tanto de las señales deseadas como de las reales, i.e. $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}_{\mathrm{d}}, \dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}}, \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}})$.

Control Par Calculado

- Si se parte del modelo Lagrangiano

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{1}$$

  se puede cancelar la mayor parte del modelo, i.e.

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{u}\,, \tag{2}$$

  donde $\boldsymbol{u}$ es una nueva entrada a diseñar.
- Entonces, como $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ es siempre invertible, tenemos el nuevo sistema

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{u}\,. \tag{3}$$

- Si ahora definimos una nueva entrada

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{v}\,, \tag{4}$$

  tenemos el sistema lineal de segundo orden con entrada

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{v}\,. \tag{5}$$

Control Par Calculado

- Este sistema de segundo orden (**??**), lineal, totalmente actuado, controlable es el sistema más fácil de controlar de segundo orden. De hecho, se puede diseñar exactamente la respuesta deseada de acuerdo con el sistema ideal de segundo orden

$$\ddot{\boldsymbol{e}} + 2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{e} = \mathbf{0}\,, \tag{6}$$

  donde $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales de ganancias positivas. A $\boldsymbol{\xi}$ se le conoce como coeficiente de amortiguamiento y a $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}$ como frecuencia natural.
- Para obtener esta respuesta ideal, se diseña la nueva entrada de control como

$$\boldsymbol{v} = \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} - 2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{e}\,. \tag{7}$$

- Al sustituir esta entrada en (**??**) se obtiene exactamente (**??**).

Control Par Calculado

- La ley de control original es

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\left(\ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} - 2\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}\dot{\boldsymbol{e}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{e}\right) . \tag{8}$$

- A esta ley de control se le conoce como Control Par Calculado, o también como dinámica inversa o linealización por retroalimentación.

- Para analizar el sistema en lazo cerrado, se sustituye esta ley de control en el modelo Lagrangiano y se obtiene el sistema ideal de segundo orden (**??**).

Control Par Calculado

- Existen muchas formas de analizar este sistema lineal de segundo orden, desacoplado (porque las matrices de ganancias son diagonales), e.g. método directo y método indirecto de Lyapunov, etc.
- En este caso particular, por la linealidad y el desacoplamiento de las n ecuaciones diferenciales, el criterio de Routh–Hurwitz establece que una condición necesaria y suficiente para que el sistema en lazo cerrado sea exponencialmente estable es que los elementos de las matrices diagonales $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}$ sean positivos.
- Uno se pregunta naturalmente ¿Si el control par calculado nos permite obtener cualquier respuesta de segundo orden a voluntad, por qué utilizar otros controladores? La respuesta radica en la robustez ante incertidumbres en el modelo, dinámicas no modeladas y perturbaciones.

Control PD+

- Para este controlador en particular, se definirá el objetivo de control como regulación, i.e. $\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} = \ddot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{d}} = \mathbf{0}$. En otras palabras, no seguiremos una trayectoria suave, sino que sólo nos interesa ir de un punto del espacio de trabajo a otro. Esto se hace con el objetivo de simplificar el análisis del control en lazo cerrado [1].
- Para el caso de regulación, al control PD+ también se le conoce como control PD con compensación de gravedad. En este caso, la ley de control está dada por

$$\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \,, \tag{9}$$

  donde $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}, \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales positivas de ganancias.

[1] El control PD+ para seguimiento se puede encontrar en el capítulo 10 del libro *Control de Movimiento de Robots Manipuladores* de Rafael Kelly y Víctor Santibañez, Pearson 2003.

- La dinámica en lazo cerrado correspondiente es

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{10}$$

- Se analizará la estabilidad del punto de equilibrio $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ con el método directo de Lyapunov. Se propone la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{11}$$

Control PD+

- La derivada de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema, omitiendo los argumentos por simplicidad, está dada por

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\dot{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\ddot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{12}$$

- Como todos los términos son escalares, al trasponerlos no se altera la ecuación. Además, como $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}$ son simétricas y para regulación $\dot{\boldsymbol{e}} = \dot{\boldsymbol{q}}$, se tiene

$$\dot{V} = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\ddot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{13}$$

Control PD+

- Sustituyendo la dinámica en lazo cerrado (??), se obtiene

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{H}}\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\dot{\boldsymbol{q}}\right), \tag{14}$$

- Si se agrupan los primeros dos términos y los últimos dos, resulta

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\dot{\boldsymbol{H}} - 2\boldsymbol{C}\right)\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\right)\dot{\boldsymbol{q}} = -\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}\right)\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{15}$$

  dado que la matriz $\dot{\boldsymbol{H}} - 2\boldsymbol{C}$ es antisimétrica.

- Como la matriz $\boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{d}}$ es positiva definida, entonces $\dot{V}$ es negativa semidefinida (porque no aparece uno de los estados, $\boldsymbol{e}$) y se concluye que el punto de equilibrio $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ es estable.

Control PD+

- Para probar estabilidad asintótica del punto de equilibrio, se utilizará el lema de La Salle, de la siguiente forma.
- Considere el caso en el que $\dot{V} \equiv 0$. Esto implicaría, de (**??**), que $\dot{\boldsymbol{q}} \equiv \mathbf{0}$.
- Si $\dot{\boldsymbol{q}} \equiv \mathbf{0}$, entonces $\ddot{\boldsymbol{q}} \equiv \mathbf{0}$.
- Sustituyendo lo anterior en la dinámica en lazo cerrado (**??**) se obtiene que la única solución es $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$.
- Como $\boldsymbol{K}_{\mathrm{p}}$ es positiva definida, esto implica que la única solución cuando $\dot{V} \equiv \mathbf{0}$ es $\boldsymbol{e} \equiv \mathbf{0}$.
- Por lo tanto, se concluye que el punto de equilibrio $(\boldsymbol{e}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es asintóticamente estable.
- Además, como la función de Lyapunov es radialmente no acotada, la estabilidad es global, i.e. no importa en que punto del espacio de trabajo comience el robot, siempre llegará al punto deseado.

Control PD+

- La ventaja de este controlador con respecto al Par Calculado radica en que no se necesita conocer todo el modelo dinámico, sólo el vector de pares gravitatorios $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$.
- También puede demostrarse que este controlador es más robusto ante incertidumbres y perturbaciones que el controlador Par Calculado.
- La desventaja del control PD+ reside en su sintonización. Aunque existen algunas reglas de sintonización prácticas, e.g. Ziegler–Nichols, al ser un sistema no lineal, muchas veces se debe llevar a cabo esta sintonización de forma heurística.
- Además, al ser un controlador lineal en su mayor parte, la sintonización para un punto de operación puede ser inadecuada para otro punto del estado de trabajo o para diferentes movimientos, debido a que no toma en cuenta los efectos de las no linealidades.