



Dinámica Parte V: Propiedades del Modelo Dinámico

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: **gzt5pya**



Propiedades del Modelo Dinámico

- La matriz de inercia $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ es simétrica y positiva definida ($\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{q}) > \mathbf{O}$). Esto implica que su forma cuadrática siempre es estrictamente mayor que cero, i.e.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

- Los valores propios de la matriz de inercia dependen en general del valor de $\mathbf{q}$. Si se denota $\lambda_{\min}(\mathbf{q})$ como el valor propio más pequeño y $\lambda_{\max}(\mathbf{q})$ como el valor propio más grande de $\mathbf{H}(\mathbf{q})$, se cumple la siguiente propiedad

$$\lambda_{\min}(\mathbf{q})\mathbf{I} \leq \mathbf{H}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{q})\mathbf{I}, \quad (2)$$

donde las desigualdades implican que se pueden obtener matrices positivas o negativas semidefinidas, e.g.

$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{q})\mathbf{I}$ implica que la matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q}) - \lambda_{\max}(\mathbf{q})\mathbf{I}$ es negativa semidefinida.



Propiedades del Modelo Dinámico

- Si el robot manipulador sólo tiene articulaciones de revolución, se pueden encontrar valores mínimos y máximos de $\lambda_{\min}(\mathbf{q})$ y $\lambda_{\max}(\mathbf{q})$ independientes de $\mathbf{q}$ tales que

$$\lambda_{\min} \mathbf{I} \leq \mathbf{H}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\max} \mathbf{I}. \quad (3)$$

- Si se calcula la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ utilizando los símbolos de Christoffel del primer tipo, se cumple que la matriz $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es antisimétrica.
- El modelo Lagrangiano es **pasivo** con entrada $\boldsymbol{\tau}$, salida $\dot{\mathbf{q}}$ y función de almacenamiento dada por el **Hamiltoniano** $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{P}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{P}(\mathbf{q})$.



Propiedades del Modelo Dinámico

- La pasividad no es una propiedad intrínseca del sistema, sino que depende de la entrada y la salida elegidas, así como de la función de almacenamiento, que debe ser acotada por abajo (debe tener un valor mínimo finito, no necesariamente positivo).
- Para los sistemas mecánicos, el Hamiltoniano representa la energía total almacenada por el sistema. Si se toma su derivada con respecto al tiempo (omitiendo argumentos por simplicidad)

$$\dot{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}. \quad (4)$$



Propiedades del Modelo Dinámico

- Aprovechando que todos los términos son escalares, se pueden transponer sin alterar la ecuación. Además como $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T$ y $\mathbf{g} = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T$ se tiene

$$\dot{\mathcal{H}} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g}. \quad (5)$$

- Del modelo Lagrangiano se puede sustituir $\mathbf{H} \ddot{\mathbf{q}} = \tau - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}$ para obtener

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}} &= \dot{\mathbf{q}}^T (\tau - \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{g}) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{g} \\ &= \dot{\mathbf{q}}^T \tau - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (6)$$



Propiedades del Modelo Dinámico

- Como la matriz $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$ es antisimétrica, el último término es cero y se tiene

$$\underbrace{\dot{\mathcal{H}}}_{\text{Potencia almacenada}} = \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau}}_{\text{Potencia recibida}} - \underbrace{\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Potencia disipada}} . \quad (7)$$

- Como $\mathbf{D}$ es positiva semidefinida, en general se tiene

$$\dot{\mathcal{H}} \leq \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} , \quad (8)$$

que es conocida en la literatura como la **desigualdad de pasividad**.

- También se presenta en forma integral, si se integra esta desigualdad con respecto al tiempo

$$\underbrace{\mathcal{H}(t)}_{\text{Energía almacenada}} - \underbrace{\mathcal{H}(t_0)}_{\text{Energía inicial}} \leq \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\tau} d\vartheta}_{\text{Energía recibida}} . \quad (9)$$



Propiedades del Modelo Dinámico

- El lado izquierdo del modelo dinámico se puede expresar como un producto de una matriz $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ llamada **regresor** y un vector constante de p parámetros $\theta \in \mathbb{R}^p$, i.e.

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta. \quad (10)$$

- A esta forma de expresar el modelo se le conoce como **parametrización lineal**.
- Nótese que aunque el modelo sigue representando un conjunto de n ecuaciones no lineales de segundo orden, la linealidad es con respecto al vector de parámetros θ .
- Esta parametrización es muy útil para realizar la identificación de los parámetros del modelo y para diseñar algoritmos de control adaptable.



Ejemplo

- Continuando con el ejemplo del robot planar de 2 gdl, se realizará una parametrización del modelo.
- El método consiste en agrupar en el vector θ todas las cantidades constantes (masas, longitudes, coeficientes de fricción, etc.) y en el regresor todo lo que depende de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ y $\ddot{\mathbf{q}}$.
- Comencemos con la matriz

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 l_{c_1}^2 + m_2 (a_1^2 + 2a_1 l_{c_2} \cos(q_2) + l_{c_2}^2) + I_1 + I_2 & m_2 (a_1 l_{c_2} \cos(q_2) + l_{c_2}^2) + I_2 \\ m_2 (a_1 l_{c_2} \cos(q_2) + l_{c_2}^2) + I_2 & m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 (2 \cos(q_2)) + \theta_4 & \theta_3 \cos(q_2) + \theta_4 \\ \theta_3 \cos(q_2) + \theta_4 & \theta_4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde $\theta_1 = m_1 l_{c_1}^2 + I_1$, $\theta_2 = m_2 a_1^2$, $\theta_3 = m_2 a_1 l_{c_2}$ y $\theta_4 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2$.



Ejemplo

- De la misma forma

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} -m_2 a_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 a_1 l_{c_2} \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ m_2 a_1 l_{c_2} \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -\theta_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde aprovechamos la definición de θ_3 .

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \theta_5 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix},$$

donde $\theta_5 = c_{f_1}$ y $\theta_6 = c_{f_2}$.



- Para el vector de origen gravitatorio

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} (m_1 l_{c_1} + m_2 a_1) g \cos(q_1) + m_2 g l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 g l_{c_2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_7 \cos(q_1) + \theta_8 \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_8 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

donde $\theta_7 = (m_1 l_{c_1} + m_2 a_1) g$ y $\theta_8 = m_2 g l_{c_2}$.



Ejemplo

- Juntando todos los términos y expresando $\cos(q_1) = c_1$, $\cos(q_1 + q_2) = c_{12}$, $\sin(q_1) = s_1$ y $\sin(q_1 + q_2) = s_{12}$ por simplicidad

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3(2c_2) + \theta_4 & \theta_3c_2 + \theta_4 \\ \theta_3c_2 + \theta_4 & \theta_4 \end{bmatrix}}_{H(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_3s_2\dot{q}_2 & -\theta_3s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ \theta_3s_2\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{q}} \\
 & + \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_5 & 0 \\ 0 & \theta_6 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_7c_1 + \theta_8c_{12} \\ \theta_8c_{12} \end{bmatrix}}_{g(q)} \\
 & = \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 & 2c_2\ddot{q}_1 + c_2\ddot{q}_2 - s_2\dot{q}_2\dot{q}_1 - s_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & \dot{q}_1 & 0 & c_1 & c_{12} \\ 0 & 0 & c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 0 & \dot{q}_2 & 0 & c_{12} \end{bmatrix}}_{Y(q,\dot{q},\ddot{q})} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}}_{\theta}
 \end{aligned}$$



Ejemplo

- Esta es una de las múltiples parametrizaciones posibles, dado que se pueden elegir arbitrariamente los conjuntos de parámetros.
- Nótese que si se realizan los productos matriciales tanto del lado derecho como del lado izquierdo, debe de dar el mismo resultado.