Dinámica Parte IV: Modelado Dinámico

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

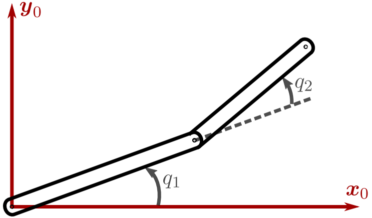
ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Ejemplo

- Se obtendrá el modelo dinámico del robot planar de 2 grados de libertad mostrado en la figura



- Se busca obtener el modelo Lagrangiano

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{1}$$

por lo que se deben calcular las matrices $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ y $\boldsymbol{D}$ y el vector $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$.

Ejemplo

- Comenzaremos calculando la matriz de inercia, dada por

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ m_k \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}ck}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}ck} + \boldsymbol{J}_{\omega ck}^{\mathrm{T}}\, {}^{0}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{q})\, {}^{k}\mathcal{I}_k\, {}^{0}\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{J}_{\omega ck} \right\} \tag{2}$$

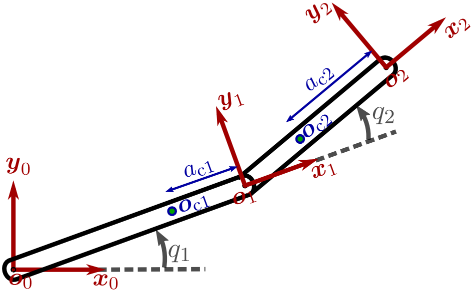
- El primer paso es obtener las n transformaciones homogéneas ${}^{0}\boldsymbol{H}_i$

$${}^{0}\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$${}^{0}\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ejemplo

- Los vectores de posición de los centros de masa pueden obtenerse de estas matrices y de la siguiente figura



Ejemplo

- Se calculan como

$$ {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}1} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{1} - a_{\mathrm{c}1}\,{}^{0}\boldsymbol{x}_{1} = \begin{bmatrix} (a_1 - a_{\mathrm{c}1})\,c_1 \\ (a_1 - a_{\mathrm{c}1})\,s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{\mathrm{c}_1} c_1 \\ l_{\mathrm{c}_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5} $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}2} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{2} - a_{\mathrm{c}2}\,{}^{0}\boldsymbol{x}_{2} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + (a_2 - a_{\mathrm{c}2})\,c_{12} \\ a_1 s_1 + (a_2 - a_{\mathrm{c}2})\,s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ a_1 s_1 + l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6} $$

donde $l_{\mathrm{c}_1} = a_1 - a_{\mathrm{c}1}$ y $l_{\mathrm{c}_2} = a_2 - a_{\mathrm{c}2}$.

Ejemplo

- Apoyándose en la misma figura, se pueden obtener los tensores de inercia (considerando varillas delgadas)

$$
{}^{1}\mathcal{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{12}a_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1}{12}a_1^2 \end{bmatrix} \tag{7}
$$

$$
{}^{2}\mathcal{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{12}a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_2}{12}a_2^2 \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

- A continuación se calculan los Jacobianos $\boldsymbol{J}_{\mathrm{v c}k}$ y $\boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}k}$, $k = 1, 2$
- Para el eslabón $k = 1$, columna $i = 1$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc11}} = {}^0\boldsymbol{z}_0 \times \left({}^0\boldsymbol{o}_{\mathrm{c1}} - {}^0\boldsymbol{o}_0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{\mathrm{c}_1} c_1 \\ l_{\mathrm{c}_1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{\mathrm{c}_1} s_1 \\ l_{\mathrm{c}_1} c_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

- Para el eslabón $k = 1$, columna $i = 2$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc12}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

porque $i > k$.

- Para el eslabón $k = 2$, columna $i = 1$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc}21} = {}^{0}\boldsymbol{z}_0 \times \left({}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}2} - {}^{0}\boldsymbol{o}_0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 c_1 + l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ a_1 s_1 + l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ a_1 c_1 + l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

- Para el eslabón $k = 2$, columna $i = 2$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc}22} = {}^{0}\boldsymbol{z}_1 \times \left({}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}2} - {}^{0}\boldsymbol{o}_1\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Ejemplo

- Por lo tanto, los Jacobianos de velocidad lineal son

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc1}} = \begin{bmatrix} -l_{\mathrm{c}_1} s_1 & 0 \\ l_{\mathrm{c}_1} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc2}} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - l_{\mathrm{c}_2} s_{12} & -l_{\mathrm{c}_2} s_{12} \\ a_1 c_1 + l_{\mathrm{c}_2} c_{12} & l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Ejemplo

- De la misma forma se calculan los Jacobianos $\boldsymbol{J}_{\omega ck}$, $k = 1, 2$
- Para el eslabón $k = 1$, columna $i = 1$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\omega c11} = {}^{0}\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

- Para el eslabón $k = 1$, columna $i = 2$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\omega c12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

porque $i > k$.

Ejemplo

- Para el eslabón $k = 2$, columna $i = 1$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\omega c21} = {}^{0}\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

- Para el eslabón $k = 2$, columna $i = 2$ se tiene

$$\boldsymbol{J}_{\omega c22} = {}^{0}\boldsymbol{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Ejemplo

- Por lo tanto, los Jacobianos de velocidad angular son

$$\boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Ejemplo

- Algunos cálculos son necesarios

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc1}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc1}} = \begin{bmatrix} l_{\mathrm{c}_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc2}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\mathrm{vc2}} = \begin{bmatrix} a_1^2 + 2a_1 l_{\mathrm{c}_2} c_2 + l_{\mathrm{c}_2}^2 & a_1 l_{\mathrm{c}_2} c_2 + l_{\mathrm{c}_2}^2 \\ a_1 l_{\mathrm{c}_2} c_2 + l_{\mathrm{c}_2}^2 & l_{\mathrm{c}_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega\mathrm{c1}}^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{0}\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\omega\mathrm{c1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{\omega\mathrm{c2}}^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{0}\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{\omega\mathrm{c2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- Sustituyendo en la ecuación de la matriz de inercia, se obtiene

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{c_1}^2 + m_2\left(a_1^2 + 2a_1 l_{c_2} c_2 + l_{c_2}^2\right) + I_1 + I_2 & m_2\left(a_1 l_{c_2} c_2 + l_{c_2}^2\right) + I_2 \\ m_2\left(a_1 l_{c_2} c_2 + l_{c_2}^2\right) + I_2 & m_2 l_{c_2}^2 + I_2 \end{bmatrix}$$

donde $I_1 = \frac{m_1}{12} a_1^2$, $I_2 = \frac{m_2}{12} a_2^2$.

Ejemplo

- A partir de $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})$ se pueden calcular los $2^3 = 8$ símbolos de Christoffel

$$
\begin{aligned}
c_{111} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1}\right) = 0 \\
c_{112} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2}\right) = m_2 a_1 l_{\mathrm{c}_2} s_2 \\
c_{121} =& c_{211} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1}\right) = -m_2 a_1 l_{\mathrm{c}_2} s_2 \\
c_{122} =& c_{212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2}\right) = 0 \\
c_{221} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1}\right) = -m_2 a_1 l_{\mathrm{c}_2} s_2 \\
c_{222} =& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2}\right) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Con los símbolos de Christoffel, se puede construir la matriz $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$. Recordemos que los elementos de esta matriz se pueden calcular mediante

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk} \dot{q}_i \,. \tag{21}$$

- Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
c_{11} =& c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 = -m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \dot{q}_2 \\
c_{12} =& c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 = -m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\
c_{21} =& c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 = m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \dot{q}_1 \\
c_{22} =& c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 = 0 \,.
\end{aligned}$$

Ejemplo

- Se obtiene la matriz

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \dot{q}_2 & -m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ m_2 a_1 l_{c_2} s_2 \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

- Por otro lado, para obtener la energía potencial, de la figura se puede ver que

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

- La energía potencial es

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{q}) = m_1 \bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{T}0} \boldsymbol{o}_{\mathrm{c}1} + m_2 \bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{T}0} \boldsymbol{o}_{\mathrm{c}2} = m_1 g l_{c_1} s_1 + m_2 g \left(a_1 s_1 + l_{c_2} s_{12}\right). \quad (23)$$

Ejemplo

- De donde se puede obtener el vector de pares debidos a la gravedad

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \left(m_1 l_{\mathrm{c}_1} + m_2 a_1\right) g c_1 + m_2 g l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \\ m_2 g l_{\mathrm{c}_2} c_{12} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

- Finalmente, la matriz $\boldsymbol{D}$ es simplemente

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} c_{\mathrm{f}_1} & 0 \\ 0 & c_{\mathrm{f}_2} \end{bmatrix}. \tag{25}$$