Dinámica Parte III: Modelo Lagrangiano

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Lagrangiano

- De acuerdo con el desarrollo anterior, se puede expresar el Lagrangiano del robot en términos de las coordenadas generalizadas y sus derivadas temporales como

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{P}_k(\boldsymbol{q}) \,. \tag{1}$$

- Para aplicar las ecuaciones de Euler–Lagrange, es conveniente expresar la energía cinética en términos de cada uno de sus productos, *i.e.*,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - \mathcal{P}(\boldsymbol{q}) \,. \tag{2}$$

Ecuaciones de Euler–Lagrange

- Se aplicarán las ecuaciones de Euler–Lagrange por cada articulación, *i.e.*,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \tau_k - \tau_{\mathrm{f}k}\,. \tag{3}$$

- Comencemos calculando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} h_{ki}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\,, \tag{4}$$

  en donde se aprovecha que la matriz de inercia es siempre simétrica, *i.e.*, $h_{ij}(\boldsymbol{q}) = h_{ji}(\boldsymbol{q})$.

- La derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} h_{ki}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j\,. \tag{5}$$

Ecuaciones de Euler–Lagrange

- Por otra parte, se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\,. \tag{6}$$

- Por lo tanto, las ecuaciones de Euler–Lagrange son

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} h_{ki}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j \\ - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} = \tau_k - \tau_{\mathrm{f}k}\,,\end{aligned} \tag{7}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Modelo Lagrangiano

- Estas n ecuaciones diferenciales no lineales ya son un modelo matemático del robot manipulador. Sin embargo, suele escribirse de forma más compacta mediante el siguiente desarrollo.

- Primero, dada la simetría de la matriz de inercia, el segundo término de (7) se puede dividir en dos partes, como

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j}+\frac{\partial h_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j\,. \tag{8}$$

- Si se combina con el tercer término, las Ecuaciones de Euler–Lagrange (7) se pueden reescribir como

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ki}(\boldsymbol{q})\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial h_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} \right\}}_{c_{ijk}} \dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} = \tau_k - \tau_{\mathrm{f}k} \,. \tag{9}$$

- A los términos

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial h_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} \right\} \tag{10}$$

se les conoce como símbolos de Christoffel del primer tipo.

Modelo Lagrangiano

- Como $i, j, k = 1, \ldots, n$, dado un manipulador de n articulaciones, se tienen que calcular n^3 símbolos de Christoffel (*e.g.*, para un robot de 6 grados de libertad se tienen que calcular $6^3 = 216$ símbolos de Christoffel).
- Se pueden reducir un poco los cálculos nuevamente gracias a la simetría, más o menos a la mitad, ya que $c_{ijk} = c_{jik}$.
- Para los términos disipativos, si se considera sólo fricción viscosa se tiene

$$\tau_{\mathrm{f}k} = c_{\mathrm{f}k}\dot{q}_k \,, \tag{11}$$

  donde $c_{\mathrm{f}k}$ es el coeficiente de fricción viscosa de la k-ésima articulación.
- Además, se define el par debido a la gravedad como $g_k = \frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k}$.

Modelo Lagrangiano

- Si ahora consideramos las n ecuaciones diferenciales, en lugar de la k-ésima, el modelo (9) se puede escribir de forma matricial como

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{12}$$

  donde $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de inercia, previamente definida.

- La matriz $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(c_{\mathrm{f}1}, \ldots, c_{\mathrm{f}n}) \tag{13}$$

  es la matriz de coeficientes de fricción viscosa.

Modelo Lagrangiano

- El vector $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^n$ definido como

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \left(\frac{\partial \mathcal{P}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

  es el vector de pares debidos a la gravedad.
- El vector $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n = \begin{bmatrix} \tau_1 & \ldots & \tau_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ es el vector de pares de entrada (señales de control) que se utilizarán para mover al robot.
- Por último, al término $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$ se le conoce como vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis. De este término, los componentes de la matriz $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se pueden calcular a partir de los símbolos de Christoffel como

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial h_{ki}(\boldsymbol{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial h_{kj}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial h_{ij}(\boldsymbol{q})}{\partial q_k} \right\} \dot{q}_i \,. \tag{15}$$