Dinámica Parte II: Energía Cinética y Energía Potencial

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

- Se mencionó que una de las dificultades para calcular la energía cinética es que el tensor de inercia ${}^{0}\mathcal{I}_k(\boldsymbol{q})$ está expresado con respecto al sistema base y entonces depende de las variables articulares.

- Sin embargo, este momento de inercia del eslabón k, sólo depende de la orientación del mismo y no de su posición, por lo que puede utilizarse una transformación de similitud para expresarlo con respecto al sistema coordenado k, fijo en el eslabón, *i.e.*,

$$ {}^{0}\mathcal{I}_k(\boldsymbol{q}) = {}^{0}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{q})\,{}^{k}\mathcal{I}_k\,{}^{0}\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\,, \tag{1} $$

donde ${}^{0}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{q})$ es la matriz de rotación del sistema k con respecto al sistema 0 y se obtiene de la cinemática directa.

Tensor de Inercia

- La ventaja del tensor de inercia con respecto al sistema del eslabón ${}^k\mathcal{I}_k$ es que es una matriz constante, calculada como

$$ {}^k\mathcal{I}_k = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \,, \tag{2} $$

donde

$$ I_{xx} = \int\int\int \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3} $$

$$ I_{yy} = \int\int\int \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4} $$

$$ I_{zz} = \int\int\int \rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \,, \tag{5} $$

se les conoce como momentos principales de inercia.

- Por otro lado a

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int\int\int \rho(x,y,z)(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (6)$$

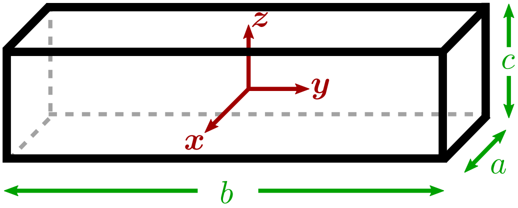
$$I_{xz} = I_{zx} = -\int\int\int \rho(x,y,z)(xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (7)$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\int\int\int \rho(x,y,z)(yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,, \qquad (8)$$

  se les conoce como productos cruzados de inercia.

- Si el cuerpo es homogéneo, la función de densidad de masa es constante, *i.e.*, $\rho(x,y,z) = \rho$.

- Calcular el tensor de inercia de un prisma rectangular con densidad de masa uniforme, como se muestra en la figura (el sistema coordenado está en el centro del prisma)



- El momento principal de inercia I_{xx} está dado por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (y^2 + z^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\ &= \frac{\rho abc}{12}(b^2 + c^2) = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ejemplo

- Los otros momentos principales son

$$I_{yy} = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + z^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{zz} = \rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \,.$$

- Los productos cruzados de inercia están dados por

$$I_{xy} = I_{yx} = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 0$$

$$I_{xz} = I_{zx} = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} xz \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 0$$

$$I_{yz} = I_{zy} = -\rho \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} yz \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 0 \,.$$

Ejemplo

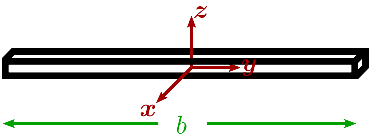
- Por lo tanto, el tensor de inercia para este ejemplo es

$$
{}^{k}\mathcal{I}_k = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}. \qquad (10)
$$

- En general, los productos cruzados de inercia son cero si el cuerpo es simétrico con respecto al sistema coordenado con respecto al que se obtienen.

Varilla Delgada

- Para el caso de una varilla delgada, como la que se muestra en la figura



siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, el tensor de inercia obtenido es

$$
{}^{k}\mathcal{I}_{k} = \begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(b^2) \end{bmatrix}. \tag{11}
$$

- Nótese que para una asignación diferente de los ejes coordenados, se tendrá un tensor de inercia diferente.

Energía cinética

- Finalmente, la energía cinética se calcula mediante

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} m_k \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v c}k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v c}k} \dot{\boldsymbol{q}} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}k}^{\mathrm{T}} {}^{0}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{q}) {}^{k}\mathcal{I}_k {}^{0}\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}k} \dot{\boldsymbol{q}} \right\} . \tag{12}$$

- Factorizando $\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(\cdot)\dot{\boldsymbol{q}}$ se puede escribir de forma compacta

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} \, , \tag{13}$$

donde a

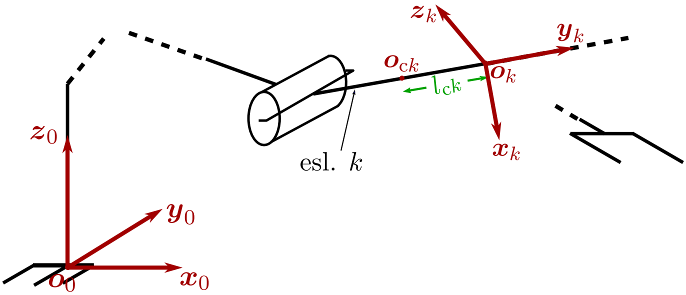
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ m_k \boldsymbol{J}_{\mathrm{v c}k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v c}k} + \boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}k}^{\mathrm{T}} {}^{0}\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{q}) {}^{k}\mathcal{I}_k {}^{0}\boldsymbol{R}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{J}_{\omega \mathrm{c}k} \right\} \tag{14}$$

se le conoce como matriz de inercia del sistema.

Energía Potencial

- Una de las grandes ventajas del método de Euler–Lagrange es que se puede calcular la energía potencial de cada eslabón como si éste fuera un cuerpo independiente y luego sumar las energías de cada eslabón para obtener la energía potencial total.
- Para calcular la energía potencial de un eslabón k, sólo se necesita conocer su masa, y la altura de su centro de masa con respecto a un sistema de referencia inercial (base).
- Se puede obtener el vector de posición del centro de masa del eslabón $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}k}$ a partir del origen ${}^0\boldsymbol{o}_k$ que se conoce por cinemática directa. Se debe de recordar que el k-ésimo eslabón no cambia de posición con respecto al sistema ${}^0\boldsymbol{o}_k{}^0\boldsymbol{x}_k{}^0\boldsymbol{y}_k{}^0\boldsymbol{z}_k$.

- Por ejemplo, para el robot de la figura



si se conoce la distancia l_{ck}, el vector de posición del centro de masa ${}^0\boldsymbol{o}_{ck}$ se puede obtener a partir de ${}^0\boldsymbol{o}_k$ como

$$ {}^0\boldsymbol{o}_{ck} = {}^0\boldsymbol{o}_k - l_{ck}\,{}^0\boldsymbol{y}_k \,. \tag{15}$$

- Nótese que este cálculo depende de la asignación de Denavit–Hartenberg y cambia para cada eslabón.

Energía Potencial

- Para obtener la altura del eslabón, basta con definir un vector $\bar{\boldsymbol{g}}$, cuya magnitud es la constante de aceleración de la gravedad $g = 9.81[\mathrm{m/s^2}]$ y cuya dirección es la del crecimiento de la energía potencial (la opuesta a la gravedad). Para el ejemplo de la figura, este vector es

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} . \tag{16}$$

- La energía potencial del eslabón está dada por

$$\mathcal{P}_k(\boldsymbol{q}) = m_k \bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{T}\,0}\boldsymbol{o}_{ck}(\boldsymbol{q}) . \tag{17}$$

- Por último, la energía total del robot es

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ m_k \bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{T}\,0}\boldsymbol{o}_{ck}(\boldsymbol{q}) \right\} . \tag{18}$$