



Dinámica Parte I: Método de Euler–Lagrange

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles
ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: [gzt5pya](#)



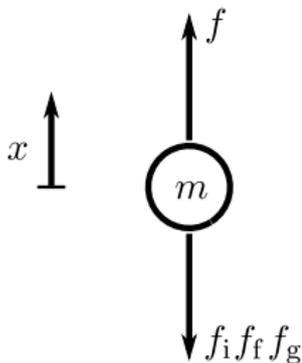
Introducción

- Hasta ahora se ha estudiado la relación entre los espacios articular y Cartesiano, tanto en posiciones como en velocidades, pero sin considerar las fuerzas que actúan sobre el robot manipulador.
- En este capítulo se estudiará la **dinámica** de los robots manipuladores tipo serie.
- Se considerarán las fuerzas presentes en el movimiento del robot, tales como gravedad, fricción, inercia, etc.
- Se obtendrá un modelo matemático que representa la física del sistema.



Modelo de una masa puntual

- Para introducir el modelado por el método de Euler–Lagrange, considérese el problema de una masa puntual sujeta a diferentes fuerzas, como se muestra en la figura.



donde f es una fuerza externa, f_i es la fuerza inercial, f_f es la fuerza de fricción y f_g es la fuerza debida a la gravedad.

- El enfoque más básico de modelado de sistemas requiere escribir las leyes de elementos y las leyes de conjunto.



Modelo de una masa puntual

- En el caso de la masa puntual mostrada en la figura, las leyes de elementos son

$$f_i = m\ddot{x} \quad (1)$$

$$f_f = b\dot{x} \quad (2)$$

$$f_g = mg, \quad (3)$$

donde g es la constante de aceleración gravitatoria.

- Por otra parte, la ley de conjunto en este caso está dada por el principio de D'Alembert, *i.e.*, la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa puntual es cero.



Método de Euler–Lagrange

- Por lo tanto, el modelo matemático está dado por

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + mg = f. \quad (4)$$

- En contraste, el **método de Euler–Lagrange** está basado en el intercambio de energía dentro de un sistema.
- El método se basa en el **Lagrangiano**, que es la diferencia de la energía cinética menos la energía potencial, *i.e.*,

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{P}(\mathbf{q}), \quad (5)$$

donde $\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es la energía cinética, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ son las llamadas **coordenadas generalizadas** del sistema.



Método de Euler–Lagrange

- Una vez expresado el Lagrangiano en términos de las coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo, se aplican las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_f, \quad (6)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ son las fuerzas generalizadas y $\boldsymbol{\tau}_f$ son las fuerzas disipativas (*e.g.*, fricción).

- En el ejemplo de la masa puntual, la coordenada generalizada es la posición vertical, *i.e.*, $q = x$.



Método de Euler–Lagrange

- La energía cinética se tiene que escribir en términos de las coordenadas generalizadas y sus derivadas con respecto al tiempo. Para el ejemplo se tiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (7)$$

- Por otra parte, la energía potencial se debe de escribir en términos de las coordenadas generalizadas. Para el ejemplo

$$\mathcal{P} = mgx. \quad (8)$$

- La fuerza disipativa (fricción) para el ejemplo es

$$\tau_f = b\dot{x}. \quad (9)$$



Método de Euler–Lagrange

- Sustituyendo en la ecuación de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt} \{m\dot{x}\} - (-mg) = f - f_f, \quad (10)$$

es decir

$$m\ddot{x} + mg = f - b\dot{x}, \quad (11)$$

que es equivalente al modelo obtenido en (4).



Método de Euler–Lagrange

- Normalmente, uno de los principales retos para utilizar el método de Euler–Lagrange, consiste en definir un conjunto válido de coordenadas generalizadas que describan completamente la configuración de un sistema físico.
- Afortunadamente para el caso de robots manipuladores rígidos este problema es trivial, ya que las variables articulares \mathbf{q} funcionan siempre como un conjunto válido de coordenadas generalizadas.
- El reto consiste en expresar las energías potencial y cinética en términos de estas variables articulares y sus derivadas con respecto al tiempo.



Energía cinética

- Considérese el k -ésimo eslabón de un robot manipulador, que se mueve con una velocidad lineal $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ y una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^3$. En términos de estas velocidades, su energía cinética está dada por

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T {}^0\mathcal{I}_k(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega}_k, \quad (12)$$

donde m_k es la masa del eslabón y ${}^0\mathcal{I}_k(\mathbf{q})$ es el momento de inercia del eslabón con respecto al sistema de referencia inercial (base).

- En este punto existen dos problemas: 1) El momento de inercia ${}^0\mathcal{I}_k(\mathbf{q})$, al ser expresado con referencia al sistema inercial, depende de la posición del robot y es en general muy difícil de calcular. 2) Aún no se expresa la energía cinética en términos de las variables articulares, que sirven como coordenadas generalizadas.



Energía cinética

- Para resolver el segundo punto, se utiliza el Jacobiano. Sólo que ahora se calculará un Jacobiano por cada eslabón.
- El cálculo es muy parecido al del Jacobiano geométrico, excepto que para cada eslabón k se calcula como si el robot sólo tuviera los primeros k eslabones, es decir, las columnas correspondientes al movimiento de las articulaciones que se encuentren después de dicho eslabón, serán cero.



Energía cinética

- Para la velocidad lineal del k -ésimo eslabón se tiene la relación ${}^0\mathbf{v}_k = \mathbf{J}_{vck}\dot{\mathbf{q}}$. La i -ésima columna del Jacobiano \mathbf{J}_{vck} está dada por

$$\mathbf{J}_{vck_i} = \begin{cases} \begin{cases} {}^0\mathbf{z}_{i-1} \times ({}^0\mathbf{o}_{ck} - {}^0\mathbf{o}_{i-1}) & \text{(R)} \\ {}^0\mathbf{z}_{i-1} & \text{(P)} \end{cases}, & \text{si } i \leq k \\ \mathbf{0}, & \text{si } i > k \end{cases}, \quad (13)$$

donde ${}^0\mathbf{o}_{ck}$ es el vector de posición del centro de masa del eslabón k y (R)/(P) denotan si la articulación i es de revolución o prismática.



Energía cinética

- Para la velocidad angular del k -ésimo eslabón se sigue una regla parecida. Se tiene la relación ${}^0\boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{J}_{\omega ck} \dot{\mathbf{q}}$. La i -ésima columna del Jacobiano $\mathbf{J}_{\omega ck}$ está dada por

$$\mathbf{J}_{\omega ck_i} = \begin{cases} \begin{cases} {}^0\mathbf{z}_{i-1} & (\text{R}) \\ \mathbf{0} & (\text{P}) \end{cases}, & \text{si } i \leq k \\ \mathbf{0}, & \text{si } i > k \end{cases}. \quad (14)$$



Energía cinética

- Sustituyendo en la ecuación de la energía cinética (12) se obtiene

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\text{vck}}^T \mathbf{J}_{\text{vck}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\omega\text{ck}}^T {}^0\mathcal{I}_k(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega\text{ck}} \dot{\mathbf{q}}. \quad (15)$$

- Una de las grandes ventajas de este método reside en que para obtener la energía cinética total del sistema, simplemente se suman las contribuciones de cada elemento, *i.e.*,

$$\mathcal{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} m_k \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\text{vck}}^T \mathbf{J}_{\text{vck}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\omega\text{ck}}^T {}^0\mathcal{I}_k(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega\text{ck}} \dot{\mathbf{q}} \right\}. \quad (16)$$