



Jacobiano Parte III: Velocidades Lineales

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: **gzt5pya**

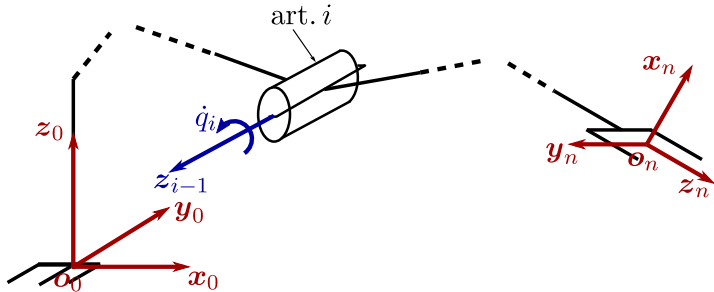


Articulación de Revolución

- Si la articulación i -ésima es de revolución se tiene

$${}^0\omega_{i-1,i} = {}^0z_{i-1}\dot{q}_i, \quad (1)$$

dado que el eje de giro de la articulación i es el vector ${}^0z_{i-1}$ y la magnitud es $\dot{q}_i$.



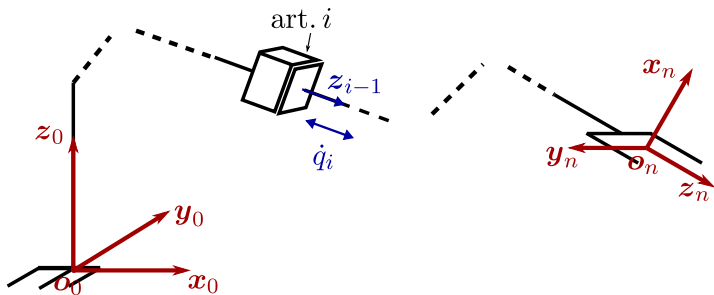


Articulación Prismática

- Por otro lado, si la articulación i -ésima es prismática

$${}^0\omega_{i-1,i} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

es decir, el movimiento de la articulación prismática no produce ninguna velocidad angular en el efector final.





Velocidades Lineales

- Para la parte de velocidad lineal, se puede utilizar la expresión

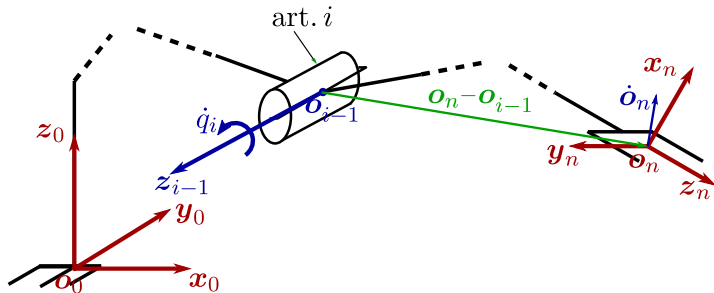
$${}^0\dot{\mathbf{o}}_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial {}^0\mathbf{o}_n}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (3)$$

- Por lo que se puede utilizar el principio de superposición y tomar el efecto de cada articulación por separado.
- Entonces, equivale a preguntar cuál sería la velocidad lineal del efector final si todas las articulaciones se bloquearan, excepto la articulación i .



Articulación de Revolución

- Considere la siguiente figura



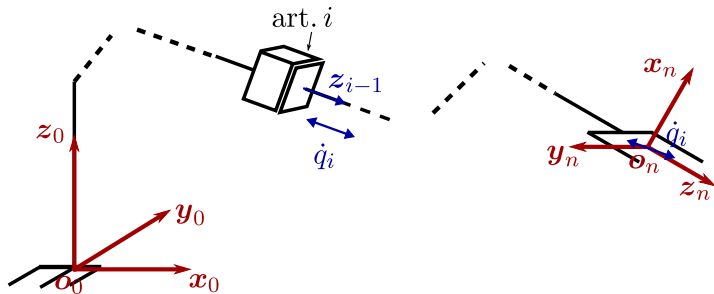
- Se tiene un disco de radio $\mathbf{o}_n - \mathbf{o}_{i-1}$ con una velocidad angular cuya magnitud es $\dot{q}_i$ y cuya dirección es $\mathbf{z}_{i-1}$. Por lo tanto, se tiene

$${}^0\dot{\mathbf{o}}_n = {}^0\mathbf{z}_{i-1} \times ({}^0\mathbf{o}_n - {}^0\mathbf{o}_{i-1}) \dot{q}_i. \quad (4)$$



Articulación Prismática

- Si la articulación i -ésima es prismática



entonces la velocidad lineal del efector final es la misma que la de la articulación, *i.e.*,

$${}^0\mathbf{o}_n = {}^0\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i. \quad (5)$$



- En resumen, el Jacobiano es una matriz de $6 \times n$, que puede dividirse en dos matrices de $3 \times n$

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ es la parte de velocidad lineal y $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ es la parte de velocidad angular.



- Cada columna corresponde a una articulación. Para $\mathbf{J}_v(\mathbf{q})$ se tiene que la i -ésima columna

$$\mathbf{J}_{vi} = \begin{cases} {}^0\mathbf{z}_{i-1} \times ({}^0\mathbf{o}_n - {}^0\mathbf{o}_{i-1}) , & \text{art. } i \text{ de revolución} \\ {}^0\mathbf{z}_{i-1} , & \text{art. } i \text{ prismática} \end{cases} \quad (7)$$

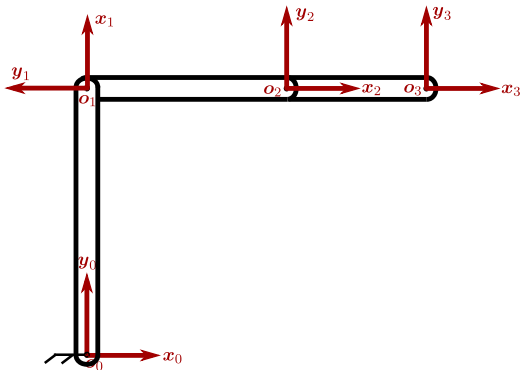
- Mientras que para $\mathbf{J}_\omega(\mathbf{q})$ se tiene que la i -ésima columna

$$\mathbf{J}_{\omega i} = \begin{cases} {}^0\mathbf{z}_{i-1} , & \text{art. } i \text{ de revolución} \\ \mathbf{0} , & \text{art. } i \text{ prismática} \end{cases} \quad (8)$$



Ejemplo

- Considérese el robot planar de 3 grados de libertad mostrado en la figura





Ejemplo

- En la clase de cinemática directa se obtuvo la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg que se muestra a continuación

i	a_i	d_i	α_i	θ_i	C.I.
1	a_1	0	0°	θ_1	90°
2	a_2	0	0°	θ_2	0°
3	a_3	0	0°	θ_3	0°



Ejemplo

- A partir de esta tabla se pueden obtener las matrices de transformación homogéneas necesarias para calcular el Jacobiano, *i.e.*,

$${}^0H_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$${}^0H_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$${}^0H_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$



Ejemplo

- Recuerde que los subíndices y superíndices deben de coincidir, *e.g.*, ${}^0\mathbf{z}_2$ son los primeros tres elementos de la tercera columna de ${}^0\mathbf{H}_2$; ${}^0\mathbf{o}_3$ son los primeros tres elementos de la cuarta columna de ${}^0\mathbf{H}_3$, etc.
- Para los elementos con subíndice y superíndice 0, *e.g.*, ${}^0\mathbf{z}_0$, se puede considerar que la matriz ${}^0\mathbf{H}_0$ es la identidad de 4×4 .
- Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{v1} &= {}^0\mathbf{z}_0 \times ({}^0\mathbf{o}_3 - {}^0\mathbf{o}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_1s_1 + a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_1s_1 - a_2s_{12} - a_3s_{123} \\ a_1c_1 + a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} .\end{aligned}\tag{12}$$



Ejemplo

- De la misma forma

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{v2} = {}^0\mathbf{z}_1 \times ({}^0\mathbf{o}_3 - {}^0\mathbf{o}_1) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ a_2s_{12} + a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_2s_{12} - a_3s_{123} \\ a_2c_{12} + a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{v3} = {}^0\mathbf{z}_2 \times ({}^0\mathbf{o}_3 - {}^0\mathbf{o}_2) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3c_{123} \\ a_3s_{123} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_3s_{123} \\ a_3c_{123} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (14)\end{aligned}$$



Ejemplo

- Para la parte de velocidad angular se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\omega 1} = {}^0\mathbf{z}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{\omega 2} = {}^0\mathbf{z}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_{\omega 3} = {}^0\mathbf{z}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (15)$$



Ejemplo

- Por último, se agrupan todas estas columnas para formar el Jacobiano

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \quad (16)$$