Jacobiano Parte II: Jacobiano Geométrico

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles
ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Derivada de $\boldsymbol{R} \in SO(3)$

- Si ahora consideramos que una matriz de rotación cambia con el tiempo, *i.e.*, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t)$, para cada instante de tiempo se cumple

$$\boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t) = \boldsymbol{I}\,. \tag{1}$$

- Si se toma la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación se tiene

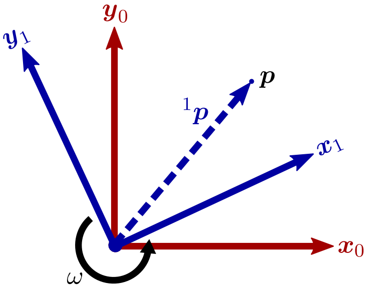
$$\underbrace{\dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)}_{\boldsymbol{S}(t)} + \underbrace{\boldsymbol{R}(t)\dot{\boldsymbol{R}}^{\mathrm{T}}(t)}_{\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(t)} = \boldsymbol{O}\,. \tag{2}$$

- Es decir,

$$\boldsymbol{S}(t) = \dot{\boldsymbol{R}}(t)\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(t)\,, \tag{3}$$

es una matriz antisimétrica.

- Ahora veamos cómo es esta matriz antisimétrica. Con respecto a la siguiente figura



donde el vector de posición ${}^1\boldsymbol{p}$ es fijo con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ y a su vez este sistema está girando con una velocidad $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$.

Velocidades

- Entonces se cumple para cada instante de tiempo

$$ {}^{0}\boldsymbol{p}(t) = {}^{0}\boldsymbol{R}_1(t)\,{}^{1}\boldsymbol{p}\,. \tag{4} $$

- La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación nos da la velocidad lineal del punto $\boldsymbol{p}$ con respecto al sistema fijo

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{p}}(t) = {}^{0}\dot{\boldsymbol{R}}_1(t)\,{}^{1}\boldsymbol{p}\,. \tag{5} $$

- Postmultiplicando (3) por ${}^{0}\boldsymbol{R}_1(t)$ y sustituyendo se obtiene

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{S}(t)\,{}^{0}\boldsymbol{R}_1(t)\,{}^{1}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{S}(t)\,{}^{0}\boldsymbol{p}(t)\,. \tag{6} $$

Velocidades

- Por otra parte, de los cursos básicos de mecánica, para un disco girando con una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, se sabe que

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{\omega} \times {}^{0}\boldsymbol{p}(t)\,. \tag{7} $$

- De la Propiedad 2 vista en la clase anterior, se tiene que

$$ \boldsymbol{\omega} \times {}^{0}\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega})^{0}\boldsymbol{p}(t)\,. \tag{8} $$

- De lo anterior se obtiene un resultado importante, *i.e.*, la derivada con respecto al tiempo de la matriz de rotación y la propia matriz de rotación se relacionan mediante

$$ {}^{\mathrm{a}}\dot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{b}}(t) = \boldsymbol{S}({}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a,b}})^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}(t)\,, \tag{9} $$

donde ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a,b}}$ es la velocidad angular del sistema b con respecto al sistema a expresada en coordenadas del sistema a.

Ejemplo

- La velocidad angular se puede obtener de $\boldsymbol{S}({}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{a,b}})$ dado que la transformación inversa está bien definida, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

- Considere la matriz de rotación

$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_1(t) = \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t)) & 0 & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix}, \qquad (10)
$$

cuya derivada con respecto al tiempo es

$$
{}^{0}\dot{\boldsymbol{R}}_1(t) = \begin{bmatrix} \sin(\theta(t)) & 0 & -\cos(\theta(t)) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\theta(t)) & 0 & -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} \dot{\theta}(t)\,. \qquad (11)
$$

Ejemplo

- De donde se puede calcular

$$\boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1}) = {}^0\dot{\boldsymbol{R}}_1(t)\,{}^0\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dot{\theta}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\theta}(t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (12)$$

de donde se obtiene

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (13)$$

es decir, la velocidad angular para este ejemplo tiene magnitud $\dot{\theta}(t)$ y dirección $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Suma de velocidades angulares

- Ahora consideremos dos rotaciones sucesivas (omitiendo el argumento t por simplicidad)

$$
{}^0\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2\,. \tag{14}
$$

- Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$
{}^0\dot{\boldsymbol{R}}_2 = {}^0\dot{\boldsymbol{R}}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\dot{\boldsymbol{R}}_2\,. \tag{15}
$$

- Sustituyendo (9) en ambos lados

$$
\boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,2})^0\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1})^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{S}({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2})^1\boldsymbol{R}_2\,. \tag{16}
$$

- Si se introduce ${}^0\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{I}$ en el último término, no se altera la ecuación, *i.e.*,

$$
\boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,2})^0\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1})^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{S}({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2})^0\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{R}_2\,. \tag{17}
$$

Suma de velocidades angulares

- Si se sustituye la propiedad ${}^0\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{S}({}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2}){}^0\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2})$ y además ${}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_2$ se obtiene

$$\boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,2}){}^0\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1}){}^0\boldsymbol{R}_2 + \boldsymbol{S}({}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{\omega}_{1,2}){}^0\boldsymbol{R}_2\,. \tag{18}$$

- Postmultiplicando por ${}^0\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}$ y por la linealidad del operador $\boldsymbol{S}(\cdot)$ se tiene

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{0,2} = {}^0\boldsymbol{\omega}_{0,1} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{1,2}\,. \tag{19}$$

En otras palabras, la velocidad angular del sistema 2 con respecto al sistema 0 es la suma de las velocidades relativas de los sistemas sucesivos, siempre y cuando se expresen en el mismo sistema.

Suma de velocidades angulares

- Este resultado se puede generalizar para encontrar la velocidad resultante de n composiciones de rotaciones

$$ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{0,n} = {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{0,1} + {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{1,2} + \cdots + {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{n-1,n} \,. \tag{20} $$

- En los robots manipuladores, cada velocidad angular entre dos sistemas adyacentes está determinada por la velocidad articular y la posición de la articulación, así como por el tipo de articulación (prismática o de revolución).