Jacobiano Parte I: Jacobiano Analítico y Jacobiano Geométrico

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

alejandro_giles@cecav.unam.mx

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Introducción

- Una de las herramientas más útiles en la robótica es el Jacobiano. Es, de hecho, la base de la robótica moderna.
- Se emplea para muchísimas cosas:
  - Planeación de trayectorias
  - Cálculo de cinemática inversa en línea para robots con muchas articulaciones
  - Modelado dinámico
  - Control de fuerza
  - Control servovisual
  - Análisis de singularidades
  - Manipulabilidad, etc.
- El Jacobiano describe la cinemática diferencial, *i.e.*, la relación entre las velocidades en el espacio articular y las velocidades en el espacio Cartesiano.

Jacobiano Analítico

- El nombre *Jacobiano* es muy conocido en matemáticas y se define como una matriz cuyos elementos son las derivadas parciales de una función vectorial de variable vectorial.

- Considere una función que relacione las variables articulares $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ con la posición del efector final ${}^0\boldsymbol{o}_n = \begin{bmatrix} o_{\mathrm{x}} & o_{\mathrm{y}} & o_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$ y una parametrización de su orientación $\boldsymbol{\varphi}$ (*e.g.*, para ángulos de Euler $\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$), es decir

$$\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{o}_n \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) \,. \tag{1}$$

- Note que dicha función representa la cinemática directa del robot.

Jacobiano Analítico

- Si derivamos ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo

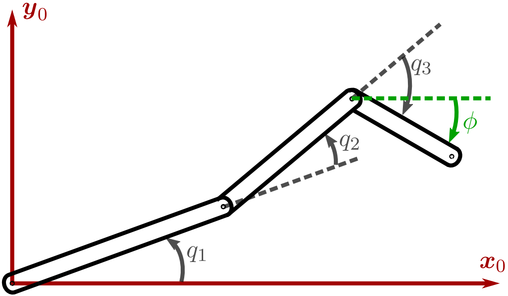
$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\boldsymbol{o}}_n \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}} \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) \dot{\boldsymbol{q}} \,. \tag{2}$$

- A la matriz $\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}$ se le conoce como Jacobiano analítico.

- En este caso, ${}^0\dot{\boldsymbol{o}}_n$ es la velocidad lineal del efector final. Sin embargo, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ no es la velocidad angular del efector final. De hecho $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ no tiene significado físico.

Ejemplo: Jacobiano analítico

- Considérese el robot planar de 3 grados de libertad de la figura



- En este caso la posición del efector final es ${}^0\boldsymbol{o}_n = \begin{bmatrix} o_x & o_y \end{bmatrix}$ y la parametrización de la orientación es $\boldsymbol{\varphi} = \phi$, es decir, el ángulo entre el último eslabón y la horizontal.

Ejemplo: Jacobiano analítico

- La función que describe la cinemática directa en términos de estas cantidades es

$$\begin{bmatrix} o_{\mathrm{x}} \\ o_{\mathrm{y}} \\ \phi \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ q_1 + q_2 + q_3 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

donde $s_{123} = \sin(q_1 + q_2 + q_3)$ y similarmente para las demás c_x y s_x. Recuerden que a_1, a_2 y a_3 son las longitudes de los eslabones.

Ejemplo: Jacobiano analítico

- El Jacobiano analítico se obtiene tomando las derivadas parciales de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$ con respecto a cada una de las variables articulares, *i.e.*,

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Este Jacobiano relaciona las derivadas temporales de la posición y el ángulo con respecto a la horizontal con las velocidades articulares como sigue

$$\begin{bmatrix} \dot{o}_{\mathrm{x}} \\ \dot{o}_{\mathrm{y}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Desventajas

- El Jacobiano analítico es poco utilizado, debido a que
  - Es díficl obtener una forma cerrada para expresar una parametrización de la orientación como una función continua y diferenciable de las variables articulares.
  - Aunque sea posible encontrar funciones diferenciables tanto para posición como para orientación, éstas pueden ser muy complejas y sus derivadas pueden ser muy difíciles de obtener.
  - La derivada de una parametrización de la orientación (*e.g.*, ángulos de Euler) no tiene una interpretación física.
- Por lo anterior, es más ampliamente utilizado el llamado Jacobiano Geométrico.

Jacobiano geométrico

- El Jacobiano geométrico o simplemente Jacobiano, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$, relaciona directamente velocidades en el espacio articular con velocidades en el espacio Cartesiano

$$\begin{bmatrix} {}^{0}\dot{\boldsymbol{o}}_n \\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\,, \tag{5}$$

  donde ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_n$ es la velocidad angular del sistema coordenado del efector final con respecto al sistema base.
- El Jacobiano geométrico es siempre de dimensión $6 \times n$ y frecuentemente se divide en dos submatrices como sigue

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\,. \tag{6}$$

- El Jacobiano geométrico no es estrictamente un Jacobiano, dado que no es la derivada parcial de una función vectorial, solo lleva el nombre.

Matrices antisimétricas

- Para obtener el Jacobiano es necesario entender primero la relación entre la velocidad angular del efector final ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_n$ y la derivada de una matriz de rotación.

- Las herramientas matemáticas que permiten obtener esta relación son las matrices antisimétricas y sus propiedades.

- Una matriz antisimétrica $\boldsymbol{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es aquella que cumple con la ecuación
$$\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{O}\,. \tag{7}$$

Matrices antisimétricas

- Estamos interesados en particular en ciertas matrices antisimétricas formadas como sigue. Sea un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ con componentes $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

- Entonces, se puede construir una matriz antisimétrica

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

- A continuación se enlistan cuatro propiedades importantes que utilizaremos en este curso.

Propiedades

1. El operador $\boldsymbol{S}(\cdot)$ es lineal, *i.e.*, si $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{S}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a}) + \beta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{b})\,. \tag{9}$$

2. El producto cruz de dos vectores $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como un producto de una matriz por un vector

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\,. \tag{10}$$

Propiedades

3. Sea la matriz de rotación $\boldsymbol{R} \in SO(3)$, se cumple que

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{a})\,. \tag{11}$$

4. Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$. La forma cuadrática de esta matriz antisimétrica cumple con

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{12}$$

Esta última propiedad es válida para todas las matrices antisimétricas, no sólo para las formadas a partir de (8).