Cinemática Inversa Parte II: Robot antropomórfico de 6 grados de libertad

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

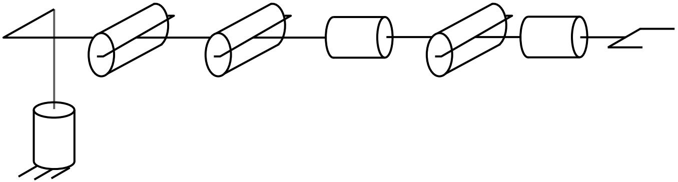
En Resumen

Recordemos los consejos del método geométrico para obtener la cinemática inversa:

- Hacer la asignación de Denavit-Hartenberg.
- Realizar el desacople cinemático para obtener $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Redibujar el robot sin las últimas 3 articulaciones y terminando en $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Mover el robot de tal manera que las cantidades variables $\theta_i^* \neq \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$ y $d_i^* \neq 0$.
- Si la i-ésima articulación es de revolución, proyectar el robot sobre el plano $x_{i-1}y_{i-1}$ para encontrar θ_i.
- Si la i-ésima articulación es prismática , proyectar el robot sobre un plano que contenga a z_{i-1} para encontrar d_i.

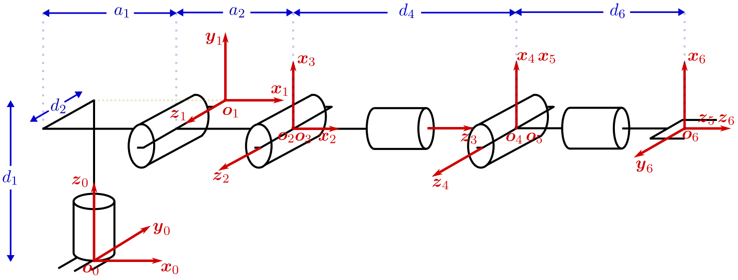
Ejemplo

- Calcular la cinemática inversa del robot antropomórfico de 6 grados de libertad mostrado en la Figura



Ejemplo

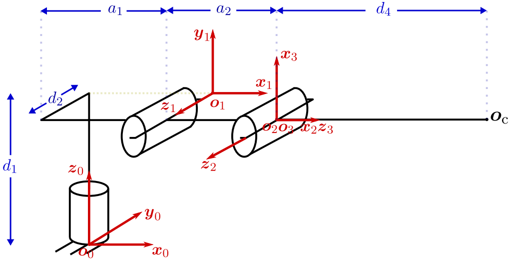
- Primero se hace la asignación de Denavit-Hartenberg (se omiten $y_2, \ldots, y_5$ por claridad)



- Debe notarse que la asignación del origen $\boldsymbol{o}_1$ no puede hacerse en otro lugar.

Ejemplo

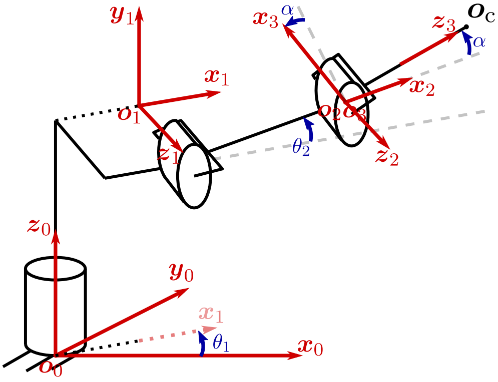
- Luego se realiza el desacople cinemático ${}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{c} = {}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{d} - d_6\,{}^0\boldsymbol{z}_\mathrm{d}$ y se redibuja el robot (la articulación 4 desaparece, pero se extiende el eslabón 3)



- Las condiciones iniciales articulares son $\theta_1 = 0°$, $\theta_2 = 0°$ y $\theta_3 = 90°$.

Ejemplo

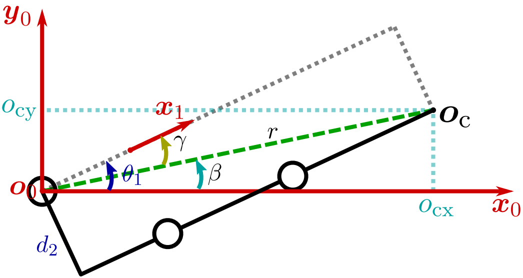
- El siguiente paso es redibujar el robot movido, de tal forma que $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 \neq 0$, $\theta_3 \neq \pi/2$.



- Nótese que como el ángulo inicial para θ_3 era $\pi/2$ (90°), entonces $\theta_3 = \alpha + \pi/2$

Ejemplo

- Ahora, para resolver θ_1 se proyecta el robot sobre el plano x_0y_0



- Recuerde que $r^2 = o_{cx}^2 + o_{cy}^2$.
- Puede observarse que

$$\theta_1 = \beta + \gamma\,. \tag{1}$$

Ejemplo

- El ángulo β se obtiene fácilmente como

$$\beta = \operatorname{atan2}(o_{\text{cy}}, o_{\text{cx}})\,. \tag{2}$$

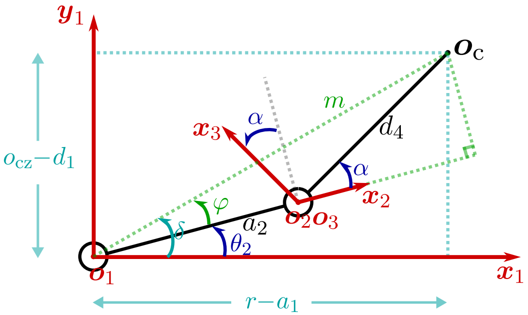
- Por otra parte, para obtener el ángulo γ, considere el triángulo rectángulo que forman los eslabones del brazo. El cateto opuesto es d_2, mientras que el cateto adyacente es, por el teorema de Pitágoras, igual a $\pm\sqrt{r^2 - d_2^2}$. Por lo tanto

$$\gamma = \operatorname{atan2}\left(d_2, \pm\sqrt{o_{\text{cx}}^2 + o_{\text{cy}}^2 - d_2^2}\right)\,. \tag{3}$$

- Por lo tanto, existen dos soluciones válidas (hasta el momento).

Ejemplo

- Para encontrar θ_2 y θ_3, se proyecta el robot sobre el plano $x_1 y_1$.



- Es igual a la configuración del robot planar!
- De la figura, se puede observar que $\theta_2 = \delta - \varphi$ y $\theta_3 = \alpha + \pi/2$.

Ejemplo

- Como se vio en el ejemplo del robot planar, primero se resuelve para α. Por ley de cosenos es

$$m^2 = a_2^2 + d_4^2 - 2a_2 d_4 \cos(\pi - \alpha)\,. \tag{4}$$

  Por propiedades del coseno y sustituyendo m^2, puede obtenerse

$$\cos(\alpha) = \frac{(r - a_1)^2 + (o_{cz} - d_1)^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2 d_4} \triangleq D \tag{5}$$

- Se tienen dos soluciones para θ_3

$$\alpha = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - D^2}, D\right) \tag{6}$$

$$\theta_3 = \alpha + \pi/2\,. \tag{7}$$

Ejemplo

- Una vez obtenida α, se puede resolver φ, considerando el triángulo rectángulo en verde de la figura, como

$$\varphi = \operatorname{atan2}\left(d_4 \sin(\alpha), a_2 + d_4 \cos(\alpha)\right) \, . \tag{8}$$

- Por otra parte, δ puede obtenerse con el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es m

$$\delta = \operatorname{atan2}\left(o_{\mathrm{cz}} - d_1, r - a_1\right) \, . \tag{9}$$

- Finalmente, θ_2 está dada por

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \delta - \varphi & (10) \\ &= \operatorname{atan2}\left(o_{\mathrm{cz}} - d_1, r - a_1\right) - \operatorname{atan2}\left(d_4 \sin(\alpha), a_2 + d_4 \cos(\alpha)\right) & (11) \end{aligned}$$

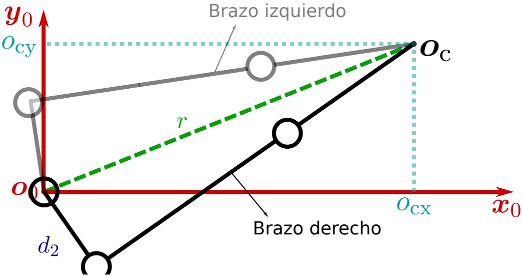
Ejemplo

- Entonces, existen dos soluciones para γ en la ecuación (3) y dos soluciones para α en la ecuación (7). Por lo tanto existen 4 soluciones válidas para la cinemática inversa de posición de este robot.

- Como se vio en el ejemplo del robot planar, los signos $+$ y $-$ para α corresponden a las soluciones *codo abajo* y *codo arriba*, respectivamente.

Ejemplo

- Para el caso en el que la longitud$a_1 = 0$, los signos $+$ y $-$ de γ corresponden a las soluciones *brazo derecho* y *brazo izquierdo*, como se muestra en la figura



Ejemplo

- Para obtener θ_4, θ_5 y θ_6, en este punto podemos calcular

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_3 = {}^{0}\boldsymbol{R}_3(\theta_1, \theta_2, d_3)\,, \tag{12} $$

y podemos obtener

$$ {}^{3}\boldsymbol{R}_6 = {}^{0}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\,{}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}\,. \tag{13} $$

- Por último, le extraemos los ángulos de Euler ZYZ a la matriz ${}^{3}\boldsymbol{R}_6$ y los igualamos como $\theta_4 = \phi$, $\theta_5 = \theta$ y $\theta_6 = \psi$.