Cinemática Inversa Parte I: Robot esférico de 6 grados de libertad

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Problema cinemático inverso

- Dada una posición ${}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} o_{\mathrm{x}} \\ o_{\mathrm{y}} \\ o_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$ y una orientación ${}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{z}_{\mathrm{d}} \end{bmatrix} \in SO(3)$ para el efector final, donde el subíndice d indica *deseados*, hallar las posiciones articulares $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{n}$ tales que se cumpla

$$
{}^{0}\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}
$$

  donde ${}^{0}\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{q})$ es la matriz de transformación homogénea que representa la cinemática directa del robot como función de $\boldsymbol{q}$.

- El primer paso para resolver el problema cinemático inverso es realizar la cinemática directa, *i.e.*, realizar la asignación de Denavit-Hartenberg.

Desacople cinemático

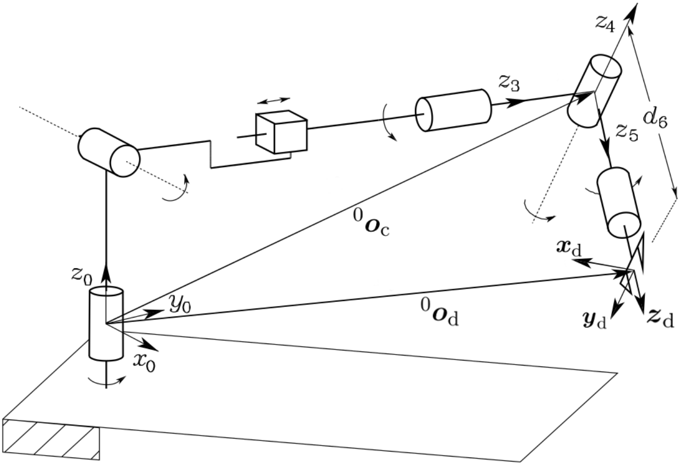
- Si se tiene un robot de 6 articulaciones (grados de libertad), cuyas últimas 3 forman una muñeca esférica, se puede dividir el problema cinemático inverso en dos problemas más simples: posición inversa y orientación inversa.[1]
- Para lograrlo, se realiza el desacople cinemático, que consiste en expresar el centro de la muñeca en función de los datos del problema, *i.e.*,

$$
{}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6\,{}^{0}\boldsymbol{z}_{\mathrm{d}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6\,{}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)
$$

donde d_6 es una distancia constante de Denavit-Hartenberg.

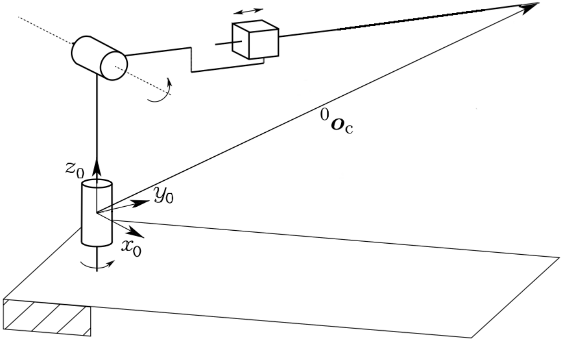
[1] De hecho, esta es la principal razón por la que la mayoría de los robots industriales adquirieron su forma actual.

Desacople cinemático



Posición inversa

- Una vez calculado el centro de la muñeca $\boldsymbol{o}_\mathrm{c}$, se resuelve la cinemática inversa de posición, *i.e.*, se calculan q_1, q_2 y q_3, dejando de lado por el momento la orientación.



Orientación inversa

- Una vez resuelta la cinemática inversa de posición, se puede garantizar que el centro de la muñeca cumplirá con $\boldsymbol{o}_4 = \boldsymbol{o}_5 = \boldsymbol{o}_\mathrm{c}$. Para "corregir" la orientación debemos recordar que se desea ${}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) = {}^0\boldsymbol{R}_\mathrm{d}$.

- Además, nótese que ${}^0\boldsymbol{R}_n(\boldsymbol{q}) = {}^0\boldsymbol{R}_3(q_1, q_2, q_3)\,{}^3\boldsymbol{R}_6(q_4, q_5, q_6)$.

- Combinando estas ecuaciones y premultiplicando por ${}^0\boldsymbol{R}_3^\mathrm{T}$, se tiene

$$ {}^3\boldsymbol{R}_6 = {}^0\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}\,0}\boldsymbol{R}_\mathrm{d}\,, \tag{3} $$

  donde el lado derecho está en función de cantidades conocidas en este punto.

Orientación inversa

- La importancia de la muñeca esférica radica en que, si le **extraemos los ángulos de Euler ZYZ al lado derecho de (3)** los podemos igualar a $(q_4, q_5, q_6) = (\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ y así resolver el problema cinemático inverso de orientación.

- Si se define la matriz de rotación de ángulos de Euler como la composición $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z,\phi}\boldsymbol{R}_{y,\theta}\boldsymbol{R}_{z,\psi}$, entonces podemos calcular θ_4, θ_5 y θ_6 como

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \phi \\
\theta_5 &= \theta \\
\theta_6 &= \psi\,.
\end{aligned}
$$

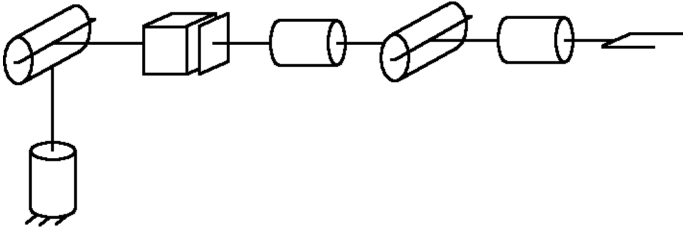
En Resumen

No existe una metodología exacta para obtener la cinemática inversa, pero pueden seguirse estos consejos:

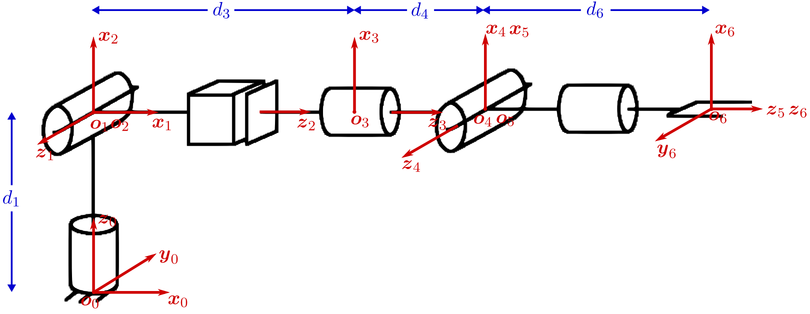
- Hacer la asignación de Denavit-Hartenberg.
- Realizar el desacople cinemático para obtener $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Redibujar el robot sin las últimas 3 articulaciones y terminando en $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Mover el robot de tal manera que las cantidades variables $\theta_i^* \neq \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$ y $d_i^* \neq 0$.
- Si la i-ésima articulación es de revolución, proyectar el robot sobre el plano $x_{i-1}y_{i-1}$ para encontrar θ_i.
- Si la i-ésima articulación es prismática , proyectar el robot sobre un plano que contenga a z_{i-1} para encontrar d_i.

Ejemplo

- Calcular la cinemática inversa del robot esférico de 6 grados de libertad mostrado en la Figura

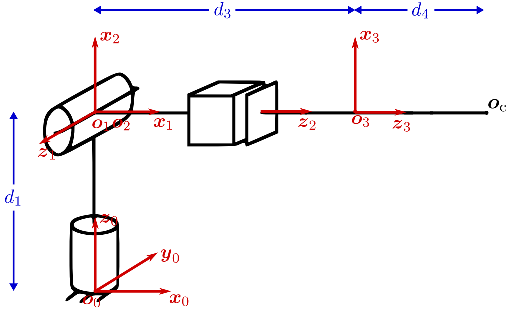


- Primero se hace la asignación de Denavit-Hartenberg (se omiten $y_1, \ldots, y_5$ por claridad)



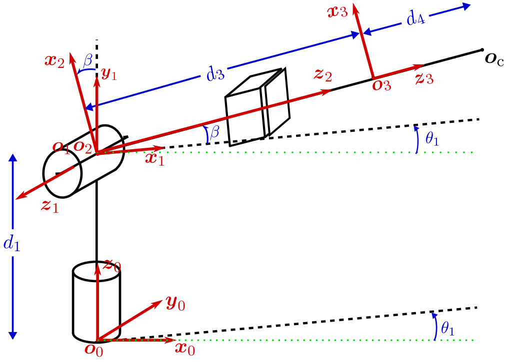
Ejemplo

- Luego se realiza el desacople cinemático ${}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{c} = {}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{d} - d_6{}^0\boldsymbol{z}_\mathrm{d}$ y se redibuja el robot (nótese que la articulación 4 desaparece, pero se extiende el eslabón 3)



Ejemplo

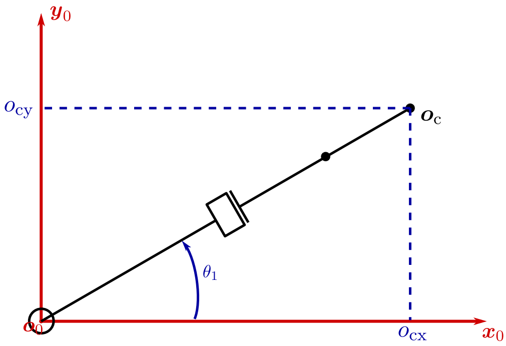
- El siguiente paso es redibujar el robot movido, de tal forma que $\theta_1 \neq 0$, $\theta_2 \neq \pi/2$ y $d_3 \neq 0$.



- Nótese que como el ángulo inicial para θ_2 era $\pi/2$ (90°), entonces $\theta_2 = \beta + \pi/2$

Ejemplo

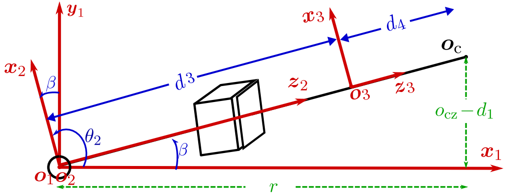
- Ahora, para resolver θ_1 se proyecta el robot sobre el plano $x_0 y_0$



- De donde puede observarse fácilmente que la solución es

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(o_{\mathrm{cy}}, o_{\mathrm{cx}}) \,. \tag{4}$$

- Para encontrar θ_2 y d_3, se proyecta el robot sobre el plano $x_1 y_1$.



- Nótese que $r^2 = o_{\mathrm{cx}}^2 + o_{\mathrm{cy}}^2$ y entonces, por el teorema de Pitágoras, se tiene

$$(d_3 + d_4)^2 = o_{\mathrm{cx}}^2 + o_{\mathrm{cy}}^2 + (o_{\mathrm{cz}} - d_1)^2 \,, \tag{5}$$

Ejemplo

- Por lo tanto

$$d_3 = \sqrt{o_{\mathrm{cx}}^2 + o_{\mathrm{cy}}^2 + (o_{\mathrm{cz}} - d_1)^2} - d_4 \tag{6}$$

$$\theta_2 = \mathrm{atan2}(o_{\mathrm{cz}} - d_1, \sqrt{o_{\mathrm{cx}}^2 + o_{\mathrm{cy}}^2}) + \pi/2\,. \tag{7}$$

- Para obtener θ_4, θ_5 y θ_6, en este punto podemos calcular

$$^0\boldsymbol{R}_3 = {}^0\boldsymbol{R}_3(\theta_1, \theta_2, d_3)\,, \tag{8}$$

y podemos obtener

$$^3\boldsymbol{R}_6 = {}^0\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}}\,. \tag{9}$$

- Por último, le extraemos los ángulos de Euler ZYZ a la matriz $^3\boldsymbol{R}_6$ y los igualamos como $\theta_4 = \phi$, $\theta_5 = \theta$ y $\theta_6 = \psi$.