Cinemática Directa Parte 1

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

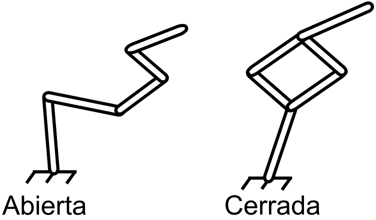
Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Cadenas cinemáticas

- Una cadena cinemática es la sucesión de eslabones conectados por medio de articulaciones.

- Existen dos tipos de cadenas cinemáticas: abiertas y cerradas.



Cadenas cinemáticas

- Los robots manipuladores tipo serie se representan por medio de cadenas cinemáticas abiertas.

- En las cadenas cinemáticas abiertas, existe un primer eslabón llamado **base** y un último eslabón llamado **efector final**.

- Entonces, una cadena cinemática abierta consta de n articulaciones, nombradas desde 1 hasta n, y $n+1$ eslabones, nombrados desde 0 hasta n.

- La articulación i conecta a los eslabones $i-1$ e i y crea un movimiento relativo lineal (articulaciones prismáticas) o angular (articulaciones de revolución).

Cadenas cinemáticas

- Si se le asigna un sistema coordenado a cada eslabón, entonces cualquier punto sobre el robot puede expresarse con respecto al sistema base mediante una composición de transformaciones homogéneas.

- En particular, nos interesa encontrar la transformación homogénea del sistema base $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ al sistema del efector final $\boldsymbol{o}_n\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n\boldsymbol{z}_n$, en términos de las transformaciones entre sistemas adyacentes. Aún más, estas transformaciones deben de depender de las variables articulares, i.e.

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_n = {}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1)\,{}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2)\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{H}_n(q_n)\,. \tag{1} $$

Denavit-Hartenberg

- En general, cada una de estas transformaciones homogéneas necesitará al menos seis parámetros: 3 para la posición y 3 para representar la rotación (e.g. ángulos de Euler), para un movimiento rígido en general.

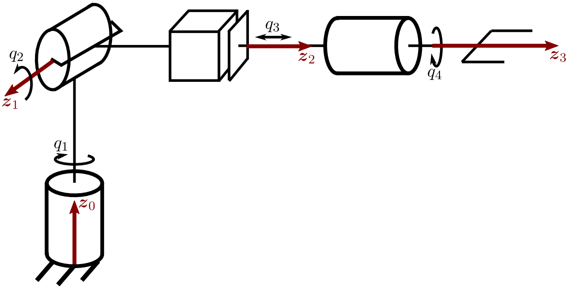
- Una pregunta interesante es conocer el menor número de parámetros necesarios para representar un movimiento rígido en una cadena cinemática.

- Esta situación fue resuelta en la década de 1950 por Jacques Denavit y Richard Hartenberg, llegando a la conclusión de que se necesitan sólo 4 parámetros si se introducen las siguientes dos restricciones:
  - [**DH1**] El eje x_i siempre interseca al eje z_{i-1}.
  - [**DH2**] El eje x_i siempre es perpendicular al eje z_{i-1}.

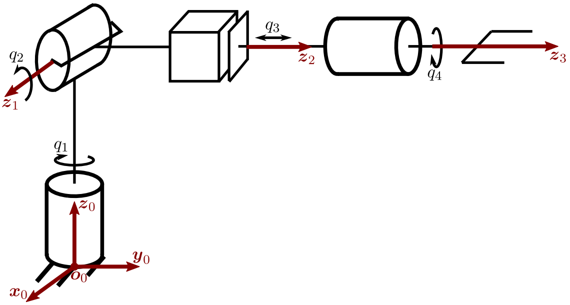
Denavit-Hartenberg

- Las restricciones DH1 y DH2 se pueden forzar si se realiza la asignación de los sistemas coordenados por medio del siguiente algoritmo de Denavit–Hartenberg (DH):

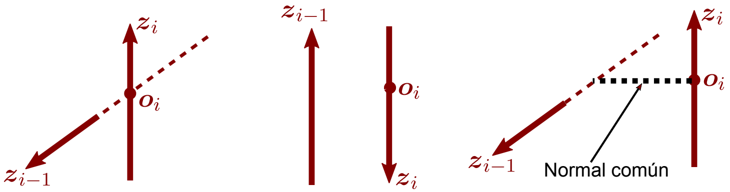
1. Colocar los ejes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Colocar el eje z_{i-1} sobre el eje de giro de la articulación i si es de revolución o sobre el eje de desplazamiento de la articulación i si es prismática.



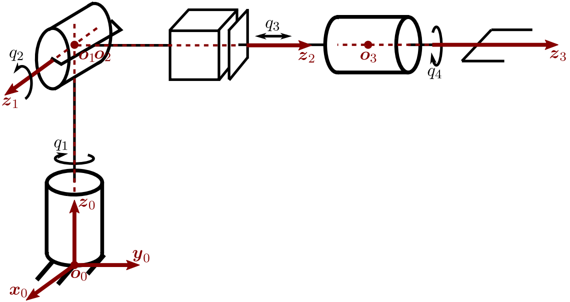
2 Completar el sistema coordenado de la base. Comenzar por o_0 en un punto conveniente sobre el eje z_0. Colocar x_0 y y_0 para formar un sistema dextrógiro ortonormal.



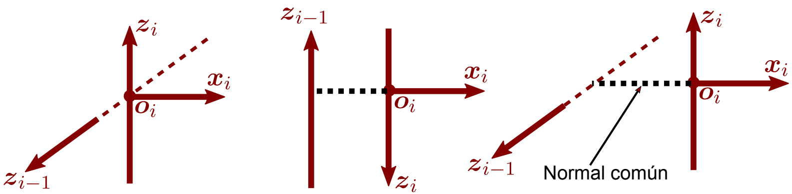
3 Colocar los orígenes $\boldsymbol{o}_1 \ldots \boldsymbol{o}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ son paralelos, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en cualquier lugar conveniente sobre $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no son paralelos ni se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección de $\boldsymbol{z}_i$ con la normal común de $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$.



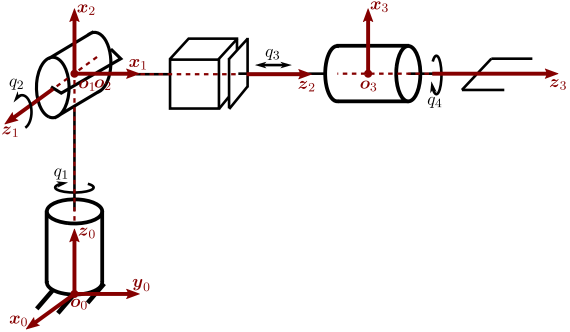
Para el ejemplo:



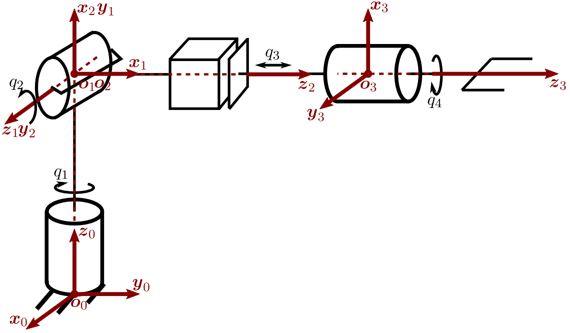
4 Colocar los ejes $\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal al plano que forman $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal común a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$.



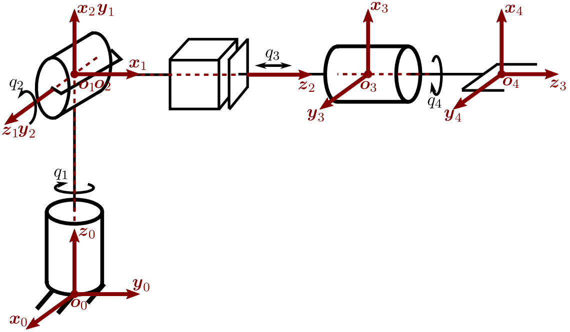
Para el ejemplo:



5 Colocar los ejes $\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_{n-1}$, completando los sistemas coordenados dextrógiros.

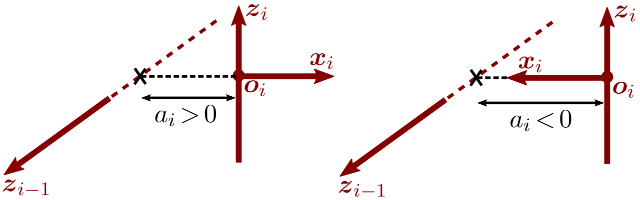


6 Colocar el sistema coordenado del efector final. Colocar $\boldsymbol{o}_n$ en el punto más importante (centro de la pinza, punta de la herramienta, etc.). Luego, colocar el eje $\boldsymbol{z}_n$ paralelo a $\boldsymbol{z}_{n-1}$ y pasando por $\boldsymbol{o}_n$. Colocar el eje $\boldsymbol{x}_n$ de tal forma que interseque a $\boldsymbol{z}_{n-1}$. Completar el sistema colocando $\boldsymbol{y}_n$ para formar un sistema dextrógiro.



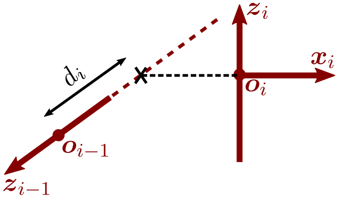
7 Formar la tabla de parámetros cuyas columnas son a_i, d_i, α_i, θ_i y $C.I.$ y cuyas filas son los números de las articulaciones.

- El parámetro a_i es la distancia desde la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$ hasta el origen $\boldsymbol{o}_i$. Si esta distancia está sobre el eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es negativa, mientras que si está del lado opuesto al eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es positiva.



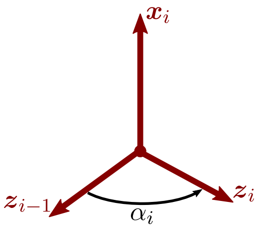
Denavit-Hartenberg

- El parámetro d_i es la distancia desde el origen $\boldsymbol{o}_{i-1}$ hasta la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$. Si la articulación i es prismática, este parámetro es variable y se denota como d_i^*.

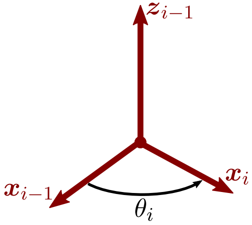


Denavit-Hartenberg

- El parámetro α_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{z}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{z}_i$ tomando a $\boldsymbol{x}_i$ como eje de giro.



- El parámetro θ_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{x}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{x}_i$ tomando a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ como eje de giro. Si la articulación i es de revolución, este parámetro es variable y se denota como θ_i^*.



Denavit-Hartenberg

- Por último, la columna de condiciones iniciales (C.I.) se llena tomando las cantidades variables d_i^* y θ_i^* como si fueran constantes.

- La tabla de parámetros para el ejemplo es

i	a_i	d_i	α_i	θ_i	C.I.
1	0	d_1	$90°$	θ_1^*	$0°$
2	0	0	$90°$	θ_2^*	$90°$
3	0	d_3^*	$0°$	$0°$	d_3
4	0	d_4	$0°$	θ_4^*	$0°$

8 Formar las n transformaciones homogéneas ${}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i)$ de acuerdo con la siguiente *plantilla*:

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (2)
$$

donde $c_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$, $s_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$, $c_{\alpha_i} = \cos(\alpha_i)$, $s_{\alpha_i} = \sin(\alpha_i)$

- Para el ejemplo

$$
{}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & 0 \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & 0 & s_{\theta_2} & 0 \\ s_{\theta_2} & 0 & -c_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\boldsymbol{H}_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{3}\boldsymbol{H}_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} & -s_{\theta_4} & 0 & 0 \\ s_{\theta_4} & c_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Denavit-Hartenberg

9 Obtener la cinemática directa, i.e., la transformación homogénea del sistema de la base al sistema del efector final, mediante la composición

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{q}) = {}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1)\,{}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2)\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{H}_n(q_n)\,. \tag{3} $$

- Para el ejemplo:

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1}c_{\theta_2}c_{\theta_4} + s_{\theta_1}s_{\theta_4} & c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}c_{\theta_2}s_{\theta_4} & c_{\theta_1}s_{\theta_2} & c_{\theta_1}s_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ c_{\theta_2}c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}s_{\theta_4} & -c_{\theta_1}c_{\theta_4} - c_{\theta_2}s_{\theta_1}s_{\theta_4} & s_{\theta_1}s_{\theta_2} & s_{\theta_1}s_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ c_{\theta_4}s_{\theta_2} & -s_{\theta_2}s_{\theta_4} & -c_{\theta_2} & d_1 - c_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$