# Transformaciones Homogéneas


Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM


**Google Classroom code: gzt5pya**

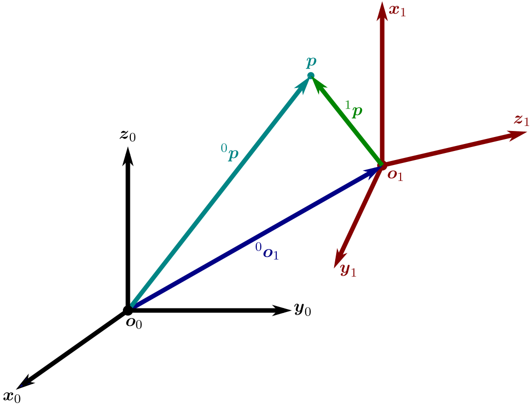
# Movimientos rígidos

- Un movimiento rígido es aquél en el que un cuerpo se mueve conservando siempre la misma distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo.

- Por ello, un movimiento rígido de un cuerpo sólo puede ser de translación y/o de rotación.

- Para motivar el desarrollo de la descripción de movimientos rígidos mediante herramientas matemáticas, considérese la siguiente figura.

# Movimientos rígidos




- ¿Cómo se calcula ${}^0\boldsymbol{p}$ conociendo ${}^1\boldsymbol{p}$, la matriz de rotación ${}^0\boldsymbol{R}_1$ y el vector de posición ${}^0\boldsymbol{o}_1$?

# Movimientos rígidos

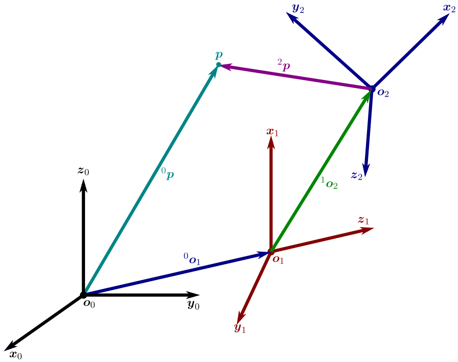
- De la figura puede observarse que se trata de una suma vectorial, que se puede llevar a cabo **sólo si todos los vectores están en la misma base**.

- Por lo tanto, antes de sumar los vectores, todos se expresarán primero con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$, de donde se tiene

$$^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{o}_1 + {}^0\boldsymbol{R}_1\,{}^1\boldsymbol{p}\,. \tag{1}$$

- Ahora, consideremos tres sistemas coordenados transladados y rotados relativamente como se muestra en la figura.

# Movimientos rígidos




- Haciendo de nuevo una suma vectorial se obtiene

$$ {}^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{o}_1 + {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{o}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{R}_2 {}^2\boldsymbol{p}\,. \tag{2} $$

# Movimientos rígidos

- Puede verse fácilmente que el número de términos en la ecuación crecerá conforme al número de sistemas coordenados que se vayan agregando.
- Una de las ventajas de las matrices de rotación es que forman un grupo (el grupo SO(3)) con respecto a la multiplicación matricial. Por lo tanto, al multiplicar dos matrices de rotación siempre se obtiene otra matriz de rotación.
- Se puede forzar la estructura de grupo para representar movimientos rígidos, de acuerdo con la siguiente construcción, que se conoce como **matriz de transformación homogénea**.

$$
{}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}} & {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}} \\ \underset{1\times 3}{\mathbf{0}} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}
$$

# Transformaciones homogéneas

- Donde ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}} \in SO(3)$ es una matriz de rotación, ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}}$ es el vector de posición del origen del sistema $b$ con respecto al sistema $a$ y $\underset{1\times 3}{\mathbf{0}} = [0\,0\,0]$.

- De la misma forma que un vector se puede representar con respecto a diferentes sistemas coordenados utilizando matrices de rotación, se puede hacer lo mismo utilizando matrices de transformación homogéneas.

# Transformaciones homogéneas

- Sin embargo, debido a que las matrices de transformación homogéneas son de $4 \times 4$, se deben de adecuar los vectores de acuerdo con su naturaleza:

  - Vectores de posición: se les agrega un 1 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{p}$ es

$$ {}^{\mathrm{a}}\bar{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{4} $$

  - Vectores libres o deslizantes: se les agrega un 0 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{v}$ es

$$ {}^{\mathrm{a}}\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{v} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{5} $$

# Transformaciones homogéneas

- Para el ejemplo de la figura, se tienen las transformaciones homogéneas

$$ {}^0\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_1 & {}^0\boldsymbol{o}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{6} $$

$$ {}^1\boldsymbol{H}_2 = \begin{bmatrix} {}^1\boldsymbol{R}_2 & {}^1\boldsymbol{o}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{7} $$

- Por lo que el cálculo del ejemplo se puede realizar mediante

$$ {}^0\bar{\boldsymbol{p}} = {}^0\boldsymbol{H}_1 {}^1\boldsymbol{H}_2 {}^2\bar{\boldsymbol{p}} \tag{8} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_1 & {}^0\boldsymbol{o}_1 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\boldsymbol{R}_2 & {}^1\boldsymbol{o}_2 \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{R}_2 {}^2\boldsymbol{p} + {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{o}_2 + {}^0\boldsymbol{o}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10} $$

# Transformaciones homogéneas

- Entonces, al multiplicar dos matrices de transformación homogéneas, se obtiene otra matriz del mismo tipo. Esto forma un grupo con respecto a la multiplicación matricial, llamado Grupo Euclideano Especial de Orden 3, o $SE(3)$.

- Sea ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}} \in SE(3)$, entonces cumple con las siguientes propiedades:

  1. Determinante:
  $$\det({}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}}) = 1\,.$$
  2. Inversa:
  $${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}}^{-1} = {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} & -{}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}\,{}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

# Transformaciones homogéneas

3 Reglas de composición: si un movimiento rígido se hace con respecto al sistema **actual**, la matriz de transformación homogénea **postmultiplica** la ecuación, mientras que si el movimiento es con respecto al sistema **fijo**, dicha matriz **premultiplica** la ecuación.

# Transformaciones homogéneas

- Así como existen matrices de rotación básicas, existen **matrices de transformación homogéneas básicas**. Tres de traslación:

$$Tras_{\mathrm{x},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Tras_{\mathrm{y},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tras_{\mathrm{z},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformaciones homogéneas

- Y tres de rotación:

$$Rot_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{\mathrm{y},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{\mathrm{z},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo

- Realizar la siguiente composición:
  1. $Rot_{\mathrm{x},\alpha}$.
  2. $Tras_{\mathrm{z},d}$, sobre $z$ fijo.
  3. $Tras_{\mathrm{x},a}$, sobre $x$ actual.
  4. $Rot_{\mathrm{z},\theta}$ sobre $z$ fijo.
- Resulta en

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= Rot_{\mathrm{z},\theta} Tras_{\mathrm{z},d} Rot_{\mathrm{x},\alpha} Tras_{\mathrm{x},a} \\
&= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\alpha & s_\theta s_\alpha & a c_\theta \\ s_\theta & c_\theta c_\alpha & -c_\theta s_\alpha & a s_\theta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$