# Rotaciones Parte 3: Propiedades y Parametrización de Rotaciones

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles

ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

**Google Classroom code: gzt5pya**

# Propiedades de las Rotaciones

- El conjunto de las matrices de rotación forma un grupo con respecto a la multiplicación matricial.

- Dicho grupo es conocido como el **Grupo Especial Ortonormal de orden 3** y se denota como $\boldsymbol{SO}(3)$.

- Un elemento de este grupo $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$ cumple con las siguiente propiedades:

  - Es **cerrado con respecto a la multiplicación matricial**. Es decir, al multiplicar dos matrices de rotación siempre se obtiene otra matriz de rotación[1].

[1] Nótese que no es un grupo Abeliano debido a que la multiplicación matricial no es conmutativa.

# Propiedades de las Rotaciones

- Se cumple que $\det(\boldsymbol{R}) = 1$, para la representación de sistemas coordenados dextrógiros[2].
- Su matriz inversa es igual a su transpuesta, i.e.

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \,. \tag{1}$$

- Lo anterior implica que

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} \,. \tag{2}$$

- Si una matriz de rotación relaciona dos sistemas coordenados, utilizando la notación de este curso, como ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$, entonces sus columnas representan a los vectores que forman el sistema coordenado $\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{b}}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{a}}$.

[2] Si se permite representar también sistemas levógiros, entonces $\det(\boldsymbol{R}) \pm 1$ y se conoce simplemente como Grupo Ortonormal de orden 3.

# Propiedades de las Rotaciones

- De la misma forma, los renglones de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$ representan los vectores que definen al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{a}}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{b}}$.

- Las propiedades anteriores implican que

- Sus columnas (renglones) tienen norma unitaria.

- Sus columnas (renglones) son mutuamente ortogonales, i.e. su producto punto siempre es cero.

- Reglas de composición: una rotación sobre el sistema actual **postmultiplica** la ecuación, mientras que una rotación sobre el sistema fijo **premultiplica** la ecuación.

# Parametrización de rotaciones

- Una pregunta que surge al estudiar la composición de rotaciones es si cualquier rotación arbitraria se puede expresar como una composición de rotaciones básicas.
- Y en el caso de que la respuesta sea afirmativa, cuál es el número mínimo de rotaciones básicas necesarias para llegar a una matriz de rotación arbitraria.
- La respuesta fue encontrada hace más de 200 años por Leonhard Euler, en el siglo XVIII y se enuncia a continuación.
- **Proposición [ángulos de Euler]:** Cualquier matriz de rotación arbitraria $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$ se puede obtener como una composición de tres rotaciones básicas, mientras no se realicen dos rotaciones consecutivas sobre el mismo eje.

# Parametrización de Rotaciones

- Lo anterior implica que existen doce posibles composiciones de matrices básicas de rotación sobre los ejes coordenados $x$, $y$ y $z$, i.e. XYX, XYZ, XZX, XZY, YXY, YXZ, YZX, YZY, ZXY, ZXZ, ZYX y ZYZ.

- De estas posibles combinaciones, las más utilizadas en robótica son las últimas dos, i.e. ZYX que se conoce como parametrización **Roll-Pitch-Yaw** y ZYZ que se conoce como **ángulos de Euler**.

- A continuación se estudiará cómo obtener la parametrización de ángulos de Euler ZYZ.

# Ángulos de Euler

- El problema se puede enunciar como sigue: dada una matriz $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$, cuyos componentes son

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

encontrar los ángulos $\phi$, $\theta$ y $\psi$, tales que

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\phi}\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\theta}\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\psi}\,. \tag{4}$$

- Desarrollando el lado derecho se tiene

$$\begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta\,. \end{bmatrix} \tag{5}$$

# Ángulos de Euler

- Igualando (3) y (5) se obtienen 9 ecuaciones algebraicas no lineales con tres incógnitas ($\phi$, $\theta$ y $\psi$).
- En este curso se utilizará únicamente la función $atan2(y, x)$ que calcula el ángulo correspondiente al cuadrante en el que se encuentra el vector de posición con coordenadas $(x, y)$.
- La función $atan2(y, x)$ está definido para casi todo el plano Cartesiano, con excepción del punto $(0, 0)$.
- La ecuación más sencilla de resolver es la del elemento $r_{33}$, i.e. $c_\theta = r_{33}$. Utilizando la función $atan2$ y la conocida identidad trigonométrica $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, se obtiene la solución para $\theta$

$$\theta = \text{atan2}(\pm\sqrt{1 - r_{33}^2}, r_{33})\,. \tag{6}$$

# Ángulos de Euler

1. En el caso $r_{33} \neq \pm 1$ se tiene $s_\theta \neq 0$ y se pueden utilizar los elementos $r_{13}$, $r_{23}$, $r_{31}$ y $r_{32}$ para obtener $\phi$ y $\psi$. En este caso existen dos soluciones, dependiendo del signo que se elija en (6), que a su vez es el signo de $\theta$.

   1.1 Si se elige $\theta > 0$

$$\phi = \operatorname{atan2}(r_{23}, r_{13}) \tag{7}$$

$$\psi = \operatorname{atan2}(r_{32}, -r_{31}) \,. \tag{8}$$

   1.2 Si se elige $\theta < 0$

$$\phi = \operatorname{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \tag{9}$$

$$\psi = \operatorname{atan2}(-r_{32}, r_{31}) \,. \tag{10}$$

2 En el caso $r_{33} = \pm 1$ se tiene un caso singular, ya que $s_\theta = 0$ y no se pueden utilizar los elementos $r_{13}$, $r_{23}$, $r_{31}$ y $r_{32}$ para obtener $\phi$ y $\psi$. De nuevo se consideran dos casos.

2.1 Si $r_{33} = 1$, entonces $c_\theta = 1$ y sustituyendo en (5) se tiene

$$c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi = r_{11} \tag{11}$$

$$s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi = r_{21}\,. \tag{12}$$

Utilizando las identidades

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

se tiene

$$\cos(\phi + \psi) = r_{11} \tag{13}$$

$$\sin(\phi + \psi) = r_{21}\,. \tag{14}$$

Por lo tanto, existen soluciones infinitas y sólo se puede determinar la suma, i.e.

$$\phi + \psi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})\,. \tag{15}$$

2.2 Por último, si $r_{33} = -1$, entonces $c_\theta = -1$, sustituyendo en (5) y utilizando las identidades anteriores, se tiene

$$-\cos(\phi - \psi) = r_{11} \tag{16}$$

$$-\sin(\phi - \psi) = r_{21}\,, \tag{17}$$

por lo que sólo se puede determinar la resta

$$\phi - \psi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11})\,. \tag{18}$$

Nota: una práctica común tanto en el caso 2.1 como en el 2.2 es elegir uno de los ángulos $\phi$ o $\psi$ igual a cero y entonces el otro queda automáticamente determinado.

# Ejemplo 1

- Consideremos la matriz de rotación

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

- Se puede verificar fácilmente que esta es una matriz de rotación y que cumple con las propiedades mencionadas al principio de este documento.

# Ejemplo 1

- Siguiendo el algoritmo de ángulos de Euler, se puede observar que nos encontramos en el caso 1, i.e. $r_{33} \neq \pm 1$. Por lo tanto una solución sería (eligiendo el signo menos en (6))

$$\theta = \text{atan2}(-\sqrt{1-0^2}, 0) = -\pi/2 \tag{20}$$

$$\phi = \text{atan2}(-(-1), 0) = \pi/2 \tag{21}$$

$$\psi = \text{atan2}(-(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}), \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}) = -5\pi/12\,. \tag{22}$$

# Ejemplo 1

- Podemos comprobar el resultado anterior mediante

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{y},-\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\frac{-5\pi}{12}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ -(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{23}$$

que es la matriz original.

# Ejemplo 2

- Ahora consideremos la matriz de rotación

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

- Este es el caso 2.2, cuya solución está dada por

$$\theta = \pi \tag{25}$$

$$\phi - \psi = \operatorname{atan2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}. \tag{26}$$

- Si se toma $\phi = 0$ entonces $\psi = \frac{\pi}{3}$.

# Ejemplo 2

- Comprobación:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\pi}\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\frac{\pi}{3}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{27}
$$

que es la matriz original.