Rotaciones Parte 1 y 2: Rotaciones Básicas y Composición

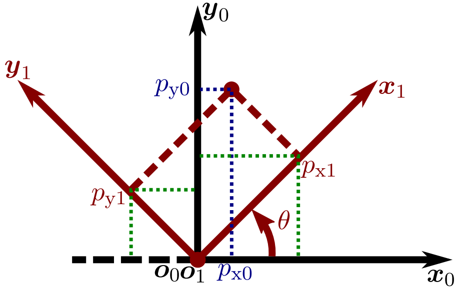
Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles
ivan.gutierrez@ingenieria.unam.edu

Robótica Industrial
Departamento de Control
Facultad de Ingeniería - UNAM

Google Classroom code: gzt5pya

Rotaciones en 2D

- Antes de analizar las rotaciones en 3D, primero consideremos el caso más simple en 2D mostrado en la siguiente figura.



Rotaciones en 2D

- El problema consiste en encontrar las coordenadas de un punto dado en el sistema en el sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$, i.e., $p_{\mathrm{x}0}$ y $p_{\mathrm{y}0}$ dadas las coordenadas del mismo punto, $p_{\mathrm{x}1}$ y $p_{\mathrm{y}1}$, con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$.

- El problema puede verse de la siguiente forma: consideremos que primero los dos sistemas coinciden y luego se gira el sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ un ángulo θ. Las coordenadas $p_{\mathrm{x}1}$ y $p_{\mathrm{y}1}$ no cambian puesto que giran con este sistema coordenado.

- Para encontrar las coordenadas con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$, se pueden tomar separadamente las componentes $p_{\mathrm{x}1}$ y $p_{\mathrm{y}1}$ y sumar los efectos (principio de superposición).

Rotaciones en 2D

- Por ejemplo, si sólo se tuviera la componente $p_{\mathrm{x}1}$, las componentes sobre el sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$ estarían dadas por

$$ {}^{0}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}0} \\ p_{\mathrm{y}0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}1}\cos(\theta) \\ p_{\mathrm{x}1}\sin(\theta) \end{bmatrix} . \tag{1} $$

- De la misma forma, si sólo se tuviera la componente $p_{\mathrm{y}1}$

$$ {}^{0}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}0} \\ p_{\mathrm{y}0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_{\mathrm{y}1}\sin(\theta) \\ p_{\mathrm{y}1}\cos(\theta) \end{bmatrix} . \tag{2} $$

- Si se toman las dos componentes

$$ \begin{aligned} {}^{0}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}0} \\ p_{\mathrm{y}0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}1}\cos(\theta) - p_{\mathrm{y}1}\sin(\theta) \\ p_{\mathrm{x}1}\sin(\theta) + p_{\mathrm{y}1}\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{{}^{0}\boldsymbol{R}_1(\theta)} \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}1} \\ p_{\mathrm{y}1} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{3} $$

Rotaciones en 2D

- La matriz

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4} $$

  es conocida como **matriz de rotación**, del sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$ en función del ángulo θ.

- La herramienta subyacente para encontrar las componentes de esta matriz es la **proyección de vectores** en el espacio Cartesiano.

- El operador para realizar esta operación es el **producto punto**, que en el espacio Cartesiano está dado por

$$ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos(\angle \mathrm{ab}) \,, \tag{5} $$

  donde $\angle$ab es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Rotaciones en 2D

- Como estamos considerando sistemas ortonormales, entonces siempre el módulo de los vectores que representan los ejes coordenados sera igual a 1.

- Por ejemplo, si tomamos los vectores $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{y}_1$, se tiene

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 = \cos(\theta) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin(\theta) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \cos(\theta)\,. \tag{9}$$

Rotaciones en 2D

- Entonces es claro que la matriz de rotación en 2D se puede escribir como

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 \end{bmatrix} . \tag{10} $$

- Dado que las mismas suposiciones de las que partimos se cumplen también en 3D, se puede generalizar el resultado anterior para el espacio Cartesiano en 3D como

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} . \tag{11} $$

- Nótese que cada columna corresponde a las componentes de cada vector unitario del sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_1$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ y viceversa, cada renglón de esta matriz representa las componentes de los vectores del sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_1$.

Matrices de rotación básicas

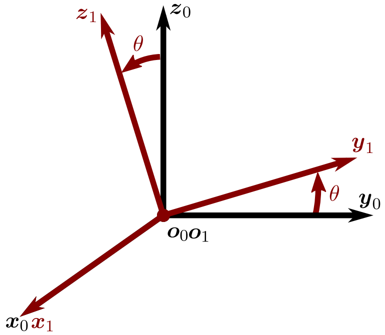
- La ecuación (11) representa a todas las rotaciones en el espacio Cartesiano.

- En el caso particular cuando las rotaciones se realizan sobre uno de los tres ejes coordenados $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ o $\boldsymbol{z}_0$, se les llama **matrices de rotación básicas**.

- Utilizando la forma general y apoyándonos en la representación gráfica, las matrices de rotación básicas que se muestran en las siguientes diapositivas.

Matrices de rotación básicas

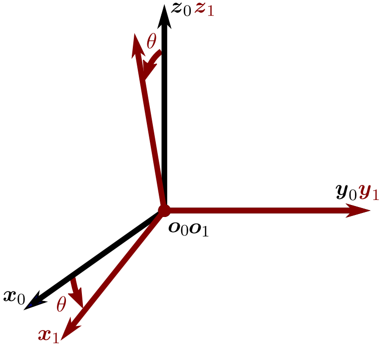
- Rotación básica sobre el eje x.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Matrices de rotación básicas

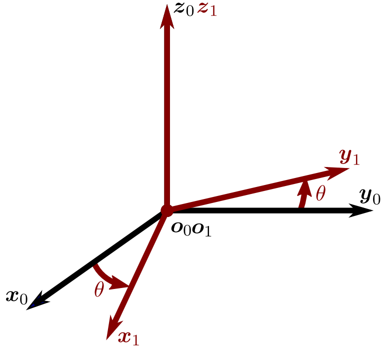
- Rotación básica sobre el eje y.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Matrices de rotación básicas

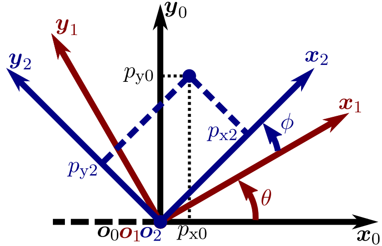
- Rotación básica sobre el eje z.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Composición de rotaciones

- Consideremos primero el caso más simple en 2D.
- Supongamos que ahora tenemos tres sistemas coordenados. El sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$ se queda fijo, mientras que el sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ rota un ángulo θ respecto a éste y el sistema $\boldsymbol{o}_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2$ rota un ángulo ϕ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$, como se muestra en la figura.



Composición de rotaciones

- El problema puede plantearse como sigue: si ${}^{2}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}2} & p_{\mathrm{y}2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ es conocido, calcular ${}^{0}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{x}0} & p_{\mathrm{y}0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ en función de los ángulos de rotación θ y ϕ.

- Siguiendo el mismo procedimiento que en el primer ejemplo en 2D, se puede encontrar fácilmente que los sistemas $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ y $\boldsymbol{o}_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2$ están relacionados mediante la matriz

$$ {}^{1}\boldsymbol{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \tag{15} $$

por lo que se puede calcular

$$ {}^{1}\boldsymbol{p} = {}^{1}\boldsymbol{R}_2 {}^{2}\boldsymbol{p}\,. \tag{16} $$

Composición de rotaciones

- De la misma forma, los sistemas $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$ y $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ están relacionados mediante

$$ {}^0\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{17} $$

por lo que se puede calcular

$$ {}^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{p}\,. \tag{18} $$

- Combinando (16) y (18) se puede calcular

$$ {}^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{R}_2 {}^2\boldsymbol{p}\,. \tag{19} $$

Composición de rotaciones

- Por otra parte, si se ignora el sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$, se puede escribir

$$^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{R}_2{}^2\boldsymbol{p}\,, \tag{20}$$

por lo que se obtiene directamente

$$^0\boldsymbol{R}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{R}_2\,. \tag{21}$$

- De igual forma, si se incluyera un cuarto sistema coordenado $\boldsymbol{o}_3\boldsymbol{x}_3\boldsymbol{y}_3$, se obtendría

$$^0\boldsymbol{R}_3 = {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{R}_2{}^2\boldsymbol{R}_3\,. \tag{22}$$

- En general, para n rotaciones

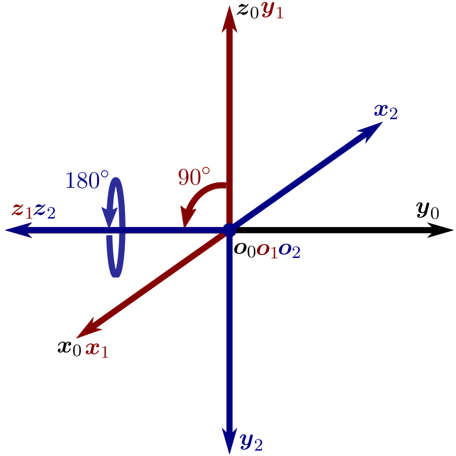
$$^0\boldsymbol{R}_n = {}^0\boldsymbol{R}_1{}^1\boldsymbol{R}_2\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{R}_n\,. \tag{23}$$

Composición de rotaciones

- El resultado anterior es válido **sólo si cada rotación se realiza con respecto al último sistema coordenado (sistema actual)**.

- Este resultado también se cumple en 3D, como se ilustra en el siguiente ejemplo: considere una rotación de 90° sobre el eje x seguida de una rotación de 180° sobre el eje z, como se muestra en la figura.

Composición de rotaciones



Composición de rotaciones

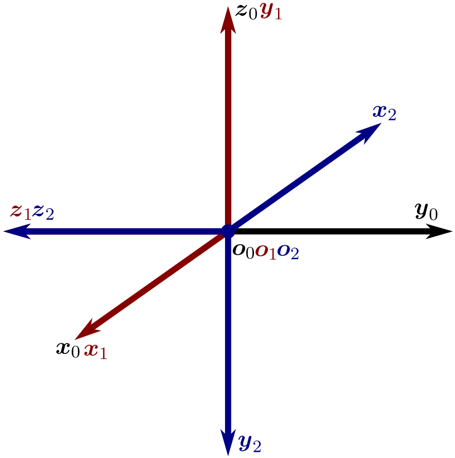
- En este caso la matriz de rotación resultante está dada por la composición

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\boldsymbol{R}_2 &= \boldsymbol{R}_{\mathrm{x},90^\circ}\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},180^\circ} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

- Las columnas de esta matriz de rotación representan a los vectores ${}^{0}\boldsymbol{x}_2$, ${}^{0}\boldsymbol{y}_2$ y ${}^{0}\boldsymbol{z}_2$, respectivamente.

Rotaciones sobre el sistema fijo

- Consideremos de nuevo la figura del ejemplo anterior



Rotaciones sobre el sistema fijo

- En este caso, el sistema actual es el $\boldsymbol{o}_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_2$.
- Se deseara realizar una rotación sobre alguno de los ejes coordenados del sistema fijo $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$, digamos sobre $\boldsymbol{y}_0$, un ángulo ϕ.
- Sin embargo, las matrices de rotación postmultiplican la ecuación, por lo que se utiliza el siguiente "truco":
  - Primero se realiza una rotación tal que alinee el sistema $\boldsymbol{o}_2\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{z}_2$ con el sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$, en este caso mediante ${}^2\boldsymbol{R}_0 = {}^0\boldsymbol{R}_2^{-1}$.
  - Luego se realiza la rotación deseada sobre el eje fijo $\boldsymbol{y}_0$, i.e. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\phi}$.
  - Por último se regresa la rotación que se canceló en el primer paso, i.e. ${}^0\boldsymbol{R}_2$.

Rotaciones sobre el sistema fijo

- Lo anterior se resume como

$$^{0}\boldsymbol{R}_3 = {}^{0}\boldsymbol{R}_2 {}^{0}\boldsymbol{R}_2^{-1} \boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\phi} {}^{0}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\phi} {}^{0}\boldsymbol{R}_2 \,, \qquad (25)$$

  dado que ${}^{0}\boldsymbol{R}_2 {}^{0}\boldsymbol{R}_2^{-1} = \boldsymbol{I}$.

- Por lo tanto, el efecto neto de realizar una rotación sobre el sistema base $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ es que dicha matriz de rotación **premultiplica** toda la ecuación.

- En resumen, **una rotación sobre el sistema actual postmultiplica** la ecuación, mientras que **una rotación sobre el sistema fijo premultiplica** la ecuación.

Ejemplo

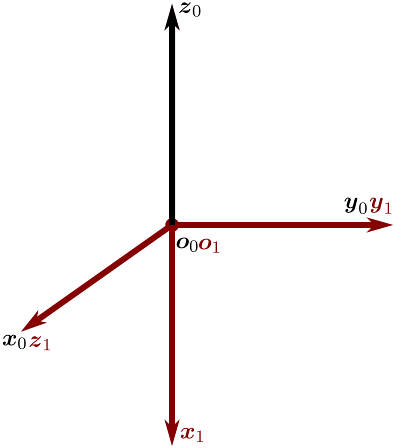
- Realizar la siguiente composición de rotaciones:

  1. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},90^\circ}$.
  2. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},180^\circ}$ sobre z fijo.
  3. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{x},-90^\circ}$ sobre x actual.
  4. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},90^\circ}$ sobre z actual.
  5. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},-180^\circ}$ sobre y fijo.
  6. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},45^\circ}$ sobre y actual.

- Se realizará primero de forma gráfica (sólo se indicará el sistema fijo y el actual por claridad).

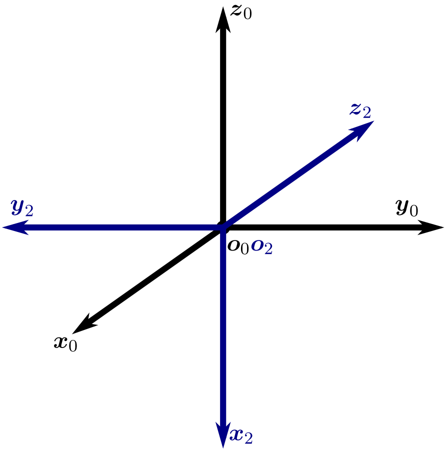
Ejemplo

- 1. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},90^{\circ}}$.



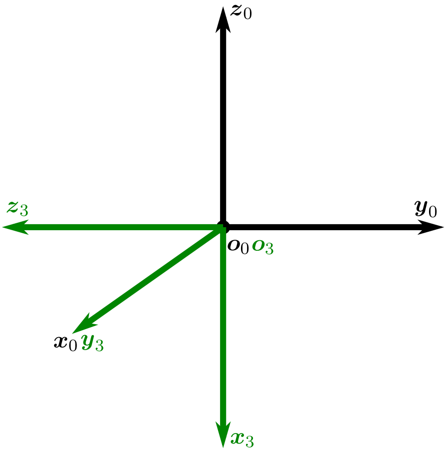
Ejemplo

- $2.\boldsymbol{R}_{\text{z},180^\circ}$ sobre z fijo.



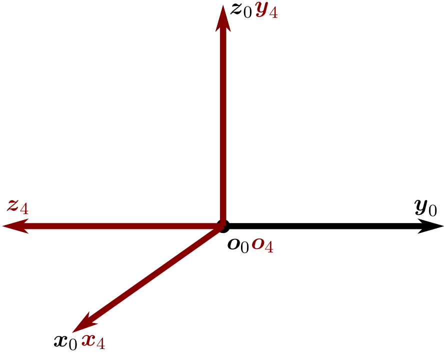
Ejemplo

- 3. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{x},-90^\circ}$ sobre x actual.



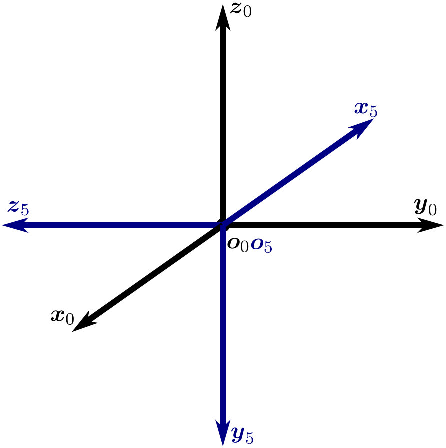
Ejemplo

- 4. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},90^\circ}$ sobre z actual.



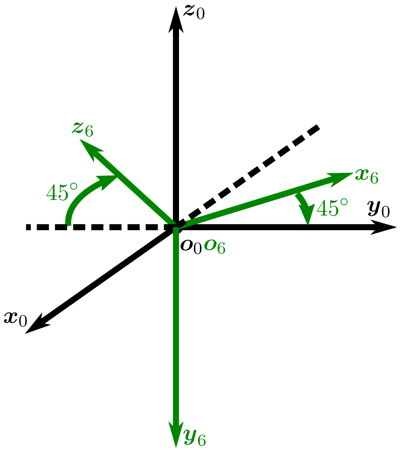
Ejemplo

- 5. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},-180^\circ}$ sobre y fijo.



Ejemplo

- 6. $\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},45^\circ}$ sobre y actual.



Ejemplo

- Ahora, utilizando composición de rotaciones se tiene

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\boldsymbol{R}_6 &= \underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},-180^\circ}}_{5}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},180^\circ}}_{2}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},90^\circ}}_{1}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{x},-90^\circ}}_{3}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},90^\circ}}_{4}\underbrace{\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},45^\circ}}_{6} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

- Continuación

$$
{}^{0}\boldsymbol{R}_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}
$$

- Se puede notar que las columnas de ${}^{0}\boldsymbol{R}_6$ coinciden con los vectores $\boldsymbol{x}_6$, $\boldsymbol{y}_6$ y $\boldsymbol{z}_6$ de la figura.