Matemáticas Discretas

Cursos Propedéuticos 2007
Ciencias Computacionales
INAOE

Dr. Luis Villaseñor Pineda
villasen@inaoep.mx
http://ccc.inaoep.mx/~villasen
Mayo-Julio 2007

Material del curso recopilado por:
Dr. César Torres Huitzil y Dr. Francisco Martínez Trinidad

3. Series

- Notación
- Series y recurrencias
- Manipulación de series
- Series múltiples

Series

- Una ***serie*** o *secuencia* o *sucesión* es una lista donde se toma en cuenta el orden.
  - Cada elemento en la serie tiene un número ***índice*** asociado
  - Puede ser infinita

- Una ***sumatoria*** es una notación compacta para la suma de todos los términos en una *serie* posiblemente infinita

Series

- Se denota por $\boldsymbol{s}$ ó $\{\boldsymbol{s_n}\}$, por $\boldsymbol{s_n}$ identificamos al n-ésimo elemento de la serie
- Una secuencia o serie $\{\boldsymbol{a_n}\}$ se identifica con una función generatriz $\boldsymbol{f : S \rightarrow A}$ de algún subconjunto $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{N}$ y para algún conjunto A.

- Si $\boldsymbol{f}$ es una función generatriz de una serie $\{\boldsymbol{a_n}\}$, entonces para $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{S}$, el símbolo $\boldsymbol{a_n}$ denota $\boldsymbol{f(n)}$, también llamado término n de la serie.
  - El índice de $\boldsymbol{a_n}$ es n (comúnmente se intercambia por i)

Series

- Una serie se denota comúnmente por una lista de sus primeros y/o últimos elementos.
- Ejemplo
  - "$\{a_n\}$ = 0, 1, 4, 9, 16, 25, …" es equivalente a $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = n^2$.

Ejemplos de secuencias o series

- Un ejemplo de una serie infinita:
  - Considere la serie $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots,$
    donde $(\forall n \geq 1)\ a_n = f(n) = 1/n$
  - Equivalentemente: $\{a_n\} = 1, 1/2, 1/3, \ldots$
- Una serie puede contener instancias repetidas de un elemento
  - Considere la secuencia $\{b_n\} = b_0, b_1, \ldots$ (notar que 0 es un índice) donde $b_n = (-1)^n$.
  - $\{b_n\}$ denota una secuencia infinita de 1's y –1's, *no el conjunto con 2 elementos* $\{1, -1\}$.

Inferencia de secuencias

- Algunas veces sólo se proporcionan los primeros términos de una secuencia
  - Encontrar cuál es la función generatriz, ó
  - Procedimiento para enumerar la secuencia

- ¿Cuál es el siguiente elemento de la secuencia?
  - 1, 2, 3, 4, ...
  - 1, 3, 5, 7, 9, …
  - 2, 3, 5, 7, 11, …

Cadenas

- Sea Σ un conjunto finito de *símbolos*, *i.e.* un *alfabeto*
  - Una cadena sobre el alfabeto Σ es cualquier secuencia $\{s_i\}$ de símbolos, $s_i \in \Sigma$, normalmente indexados por **N** o **N**–{0}.
- Si ***a*, *b*, *c*, …** son símbolos, la cadena ***s* = *a*, *b*, *c*, …** puede escribirse como ***abc*…**
- Si ***s*** es una cadena finita y ***t*** es cualquier otra cadena, entonces la *concatenación de **s** con **t***, se denota como ***st***

Cadenas

- La longitud |***s***| de una cadena finita ***s*** es el número de posiciones (*i.e.*, el número de valores del índice ***i***).
- Si ***s*** es una cadena finita y $n \in \mathbf{N}$,
  - Entonces s^n denota la concatenación de n copias de s.
- Ejemplos
  - $s = abc$ $\quad$ $|s| = 3$
  - $t = de$ $\quad$ $|t| = 2$
  - $st = abcde$ $\quad$ $ts = deabc$
  - $s^2t^3 = abcabcdedede$

Notación sumatorias

- Dada una serie $\{a_n\}$, una cota inferior entera (o *límite*) $j \geq 0$, y una cota superior entera $k \geq j$, entonces la sumatoria de $\{a_n\}$ *de j a k* se define y denota por:

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = a_j + a_{j+1} + \ldots + a_k$$

- *i* se denomina *índice de la sumatoria*

Sumatorias generalizadas

- Para una serie infinita, se puede denotar:

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \ldots$$

- Para sumar una función sobre todos los miembros de un conjunto ***X***={x$_1$, x$_2$, …}:

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots$$

- Si X={x|P(x)}, se puede escribir

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots$$

Ejemplo: sumatoria

- Sumatoria finita

$$\sum_{i=2}^{4} i^2 + 1 = (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1)$$

$$= (4 + 1) + (9 + 1) + (16 + 1)$$

$$= 5 + 10 + 17$$

$$= 32$$

Ejemplos: sumatoria

- Una serie infinita con un resultado finito

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2^0 + 2^{-1} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots = 2$$

- Uso de predicados para definir un conjunto de elementos sobre una sumatoria

$$\sum_{\substack{(x \text{ es primo}) \wedge \\ x<10}} x^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 4 + 9 + 25 + 49 = 87$$

Operaciones de sumatorias

- Algunas identidades útiles:

$$\sum_{x} cf(x) = c\sum_{x} f(x)$$

$$\sum_{x} f(x) + g(x) = \left(\sum_{x} f(x)\right) + \sum_{x} g(x)$$

$$\sum_{i=j}^{k} f(i) = \sum_{i=j+n}^{k+n} f(i-n)$$

Operaciones de sumatorias

- Otras identidades útiles:

$$\sum_{i=j}^{k} f(i) = \left(\sum_{i=j}^{m} f(i) \right) + \sum_{i=m+1}^{k} f(i) \quad \text{if } j \le m < k$$

$$\sum_{i=0}^{k} f(i) = \sum_{i=0}^{k} f(k-i)$$

$$\sum_{i=0}^{2k} f(i) = \sum_{i=0}^{k} f(2i) + f(2i+1)$$

Sumatorias múltiples

- Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{3} ij\right) = \sum_{i=1}^{4} i\left(\sum_{j=1}^{3} j\right) = \sum_{i=1}^{4} i(1+2+3)$$

$$= \sum_{i=1}^{4} 6i = 6\sum_{i=1}^{4} i = 6(1+2+3+4)$$

$$= 6 \cdot 10 = 60$$

- Note la independencia de los límites de sumatoria

Ejemplo

- Evalué la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

- $1+2+\ldots+(n/2)+((n/2)+1)+\ldots+(n-1)+n$

$$\begin{matrix} n+1 \\ \vdots \\ n+1 \\ n+1 \end{matrix}$$

  - Hay n/2 pares de elementos que suman n+1

Expresiones útiles

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = a(r^{n+1} - 1)/(r - 1), r \neq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^2(n+1)^2/4$$