Matemáticas Discretas

Cursos Propedéuticos 2007
Ciencias Computacionales
INAOE

Dr. Luis Villaseñor Pineda
villasen@inaoep.mx
http://ccc.inaoep.mx/~villasen
Mayo-Julio 2007

Material del curso recopilado por:
Dr. César Torres Huitzil y Dr. Francisco Martínez Trinidad

TERCERA PARTE

- Relaciones
  - Relaciones de equivalencia
- Funciones

Breve repaso

- ¿Qué es una relación?
- Propiedades de las relaciones
- Relaciones de orden

Relaciones

Definición 3.2 Dados los conjuntos A, $B \subseteq \mathsf{U}$, cualquier subconjunto de $A \times B$ se denomina ***relación de A a B***.

A cualquier subconjunto de $A \times A$ se denomina *relación binaria*.

Propiedades de las relaciones

- Una relación R en A es ***reflexiva*** si:
  - Si $(a, a) \in R$ para toda $a \in A$
- Una relación R en A es ***antireflexiva*** si:
  - Si $(a, a) \notin R$ para toda $a \in A$
- Una relación R es ***simétrica*** si:
  - Si $(a, b) \in R$ entonces $(b, a) \in R$
- Una relación R en A es ***antisimétrica*** si:
  - Si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ entonces $a=b$
- Una relación R es ***transitiva*** si:
  - Si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces $(a, c) \in R$

Relaciones de Orden

- Si a R b ó b R a, entonces los elementos a y b son ***comparables***

- Si todos los pares a y b posibles son comparables, R es un ***ordenamiento total*** o cadena

- (A, R) es un ***conjunto ordenado parcialmente*** o ***poset*** si R es un ordenamiento parcial en A

Relaciones de equivalencia

Definición Una *relación de equivalencia* R en un conjunto A es una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

EJEMPLO Sea $n \in \mathbf{Z}^+$. Para $x, y \in \mathbf{Z}$, se define la *relación* R *de módulo n* por medio de x R y si y sólo si, $x - y$ es un múltiplo de n. Con $n = 7$, se halla que 9 R 2, -3 R 11, $(14,0) \in$ R pero 3 $\not\mathrel{R}$ 7.

Relaciones de equivalencia

Para cualquier conjunto A, $A \times A$ es una relación de equivalencia en A, y si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, la relación de equivalencia más pequeña en A es $\mathsf{R} = \{(a_i, a_i) \mid 1 \le i \le n\}$.

Relaciones de equivalencia

Si se considera la relación R en **Z** definida por x R y, si $x - y$ es un múltiplo de 2, entonces R es una relación de equivalencia en **Z**, donde todos los enteros pares e impares están relacionados. Por ejemplo, aquí no se tiene 4 = 8, pero si 4 R 8, pues ya no interesa el tamaño de un número, sino sólo dos propiedades: paridad e imparidad. Esta relación descompone **Z** en dos subconjuntos formados por los enteros pares e impares: **Z** = {... , -3, -1, 1, 3, ...} ∪ {... , -4, -2, 2, 4, ...}. Esta descomposición de Z es un ejemplo de partición, concepto íntimamente ligado a la relación de equivalencia.

Relaciones de equivalencia

Definición Dados un conjunto A y un conjunto de índices, I, sea $\varnothing \neq A_i \subseteq A$, para cada $i \in I$. Entonces $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A si

a) $A = \bigcup_{i \in I} A_i$

b) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i, j \in I,\ i \neq j$.

Cada conjunto A_i se llama *celda* o *bloque* de la partición.

Relaciones de equivalencia

EJEMPLO Si A = {1, 2, 3, ..., 10}, entonces los siguientes conjuntos son particiones de A:

a) $A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_2 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$;

b) $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

c) $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{4, 6, 7, 9\}$, $A_3 = \{5, 8, 10\}$;

d) $A_i = \{i, i+5\}$, $1 \leq i \leq 5$.

Relaciones de equivalencia

Definición Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Para cualquier $x \in A$, la clase de equivalencia de x, denotada por $[x]$, se define mediante

$$[x] = \left\{ y \in A \,\middle|\, y \mathrm{R} x \right\}$$

Relaciones de equivalencia

EJEMPLO Defínase la relación R en *Z*, por *x*R*y*, si 4 divide a (*x*–*y*). Para esta relación se encuentra que

$[0] = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$

$[1] = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} = \{4k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$

$[2] = \{\ldots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\} = \{4k + 2 \mid k \in \mathbf{Z}\}$

$[3] = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\} = \{4k + 3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$

$\{[0], [1], [2], [3]\}$ proporciona una partición de **Z**.

Relaciones de equivalencia

Teorema Si *A* es un conjunto, entonces:

a) Cualquier relación de equivalencia R en *A* origina una partición de *A*.

b) Cualquier partición de *A* origina una relación de equivalencia R en *A*.

Funciones

Definición Dados los conjuntos no vacíos A, B, una función, o transformación f de A a B, definida por $f : A \to B$, es una relación de A a B donde cada elemento de A aparece exactamente una vez como primera componente de un par ordenado de la relación.

Funciones

Suele escribirse $f(a) = b$ cuando (a, b) es un par ordenado de la función f. Para $(a, b) \in f$, b se denomina *imagen* de a en f, mientras que a es un *antecedente* de b. Además la definición sugiere que f es un método para asociar a cada $a \in A$ una única $b \in B$; este proceso se denota mediante $f(a) = b$. Por tanto, (a, b) , $(a, c) \in f$ implica que $b = c$.

Funciones

EJEMPLO Para $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, $f = \{(1, w), (2, x), (3, x)\}$ es una función y, por tanto una relación de A a B. $\mathsf{R}_1 = \{(1, w), (1, x), (2, x)\}$, $\mathsf{R}_2 = \{(1, w), (2, w), (2, x), (3, z)\}$ son relaciones, pero no funciones, de A a B. (¿Por qué no lo son?).

Funciones

Definición Para la función $f : A \rightarrow B$, A y B se denominan *dominio* y *codominio* de f, respectivamente. El subconjunto de B formado por aquellos elementos que aparecen como segundas componentes en los pares ordenados de f, se llama *imagen* de f y también se define por $f(A)$.

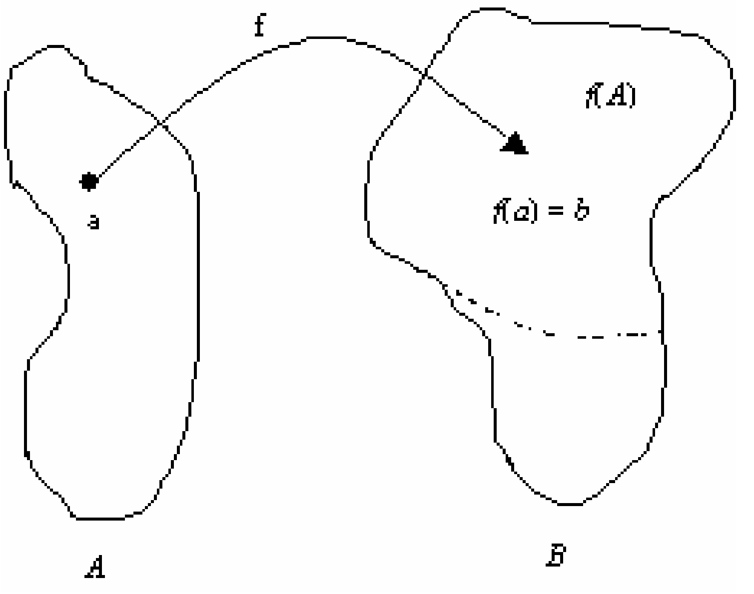
Funciones

Para $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, $f = \{(1, w), (2, x), (3, x)\}$

1. el dominio de $f = \{1, 2, 3\}$,
2. el codominio de $f = \{w, x, y, z\}$,
3. y la imagen de $f = f(A) = \{w, x\}$.

Funciones

Estas ideas se pueden representar mediante un diagrama de Venn, como en la figura siguiente. Este diagrama muestra que *a* puede considerarse como una entrada que es transformada mediante *f* en la correspondiente salida *f*(*a*).



Funciones

En Pascal se presenta la función trunc (por truncamiento), que es una función con valores enteros definida en **R**. La función elimina la parte fraccionaria de un número real. Por ejemplo, trunc(3.78) = 3, trunc(5) = 5, trunc(-7.22) = -7.

Funciones

¿Cuántas funciones hay de A a B?

Para el caso general, sean A, B conjuntos con $|A| = m$, $|B| = n$. En consecuencia, si $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, ... ,b_n\}$, una función típica $f : A \to B$ se puede describir por medio de $\{(a_1, x_1), (a_2, x_2), ..., (a_m, x_m)\}$. Se puede seleccionar cualquier elemento entre los n de B para x_1 y a continuación hacer lo mismo para x_2. (Se puede elegir cualquier elemento de B para x_2 de modo que se puede elegir un mismo elemento de B para x_1 y para x_2). Este proceso de selección continúa hasta que uno de los n elementos de B sea finalmente seleccionado para x_m. Así, por la regla del producto, hay $n^m = |B|^{|A|}$ funciones de A a B.

Funciones

Por tanto, si $|A| = 3$ y $|B| = 4$ entonces hay $4^3 = |B|^{|A|} = 64$ funciones de A a B y $3^4 = |A|^{|B|} = 81$ funciones de B a A.

Funciones uno a uno

Definición Una función $f : A \rightarrow B$ se llama *uno a uno* o *inyectiva* si cada elemento de B aparece a lo sumo una vez como la segunda componente de un par ordenado de f.

Si $f : A \rightarrow B$ es uno a uno, con A, B finitos, entonces $|A| \leq |B|$. Para conjuntos generales A, B, si f: $A \rightarrow B$ es uno a uno, entonces para $a_1, a_2 \in A$, $f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2$. Entonces, una función de este tipo se puede caracterizar como aquella donde cada elemento de la imagen es imagen de exactamente un elemento del dominio.

Funciones uno a uno

EJEMPLO Sea $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$. La función $f=\{(1,1),(2,3),(3,4)\}$ es una función inyectiva de A a B. Mientras que $g=\{(1,1),(2,3),(3,3)\}$es una función de A a B, aunque no es inyectiva, pues $g(2)=g(3)$, pero $2\neq 3$.

Para A, B del ejemplo hay 2^{15} relaciones de A a B, y 5^3 de ellas son funciones. Lógicamente, la siguiente cuestión que se quiere resolver es **¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow B$ son uno a uno?**.

Funciones uno a uno

Teorema Sea f: $A \to B$ con A_1, $A_2 \subseteq A$. Entonces,

a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

b) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

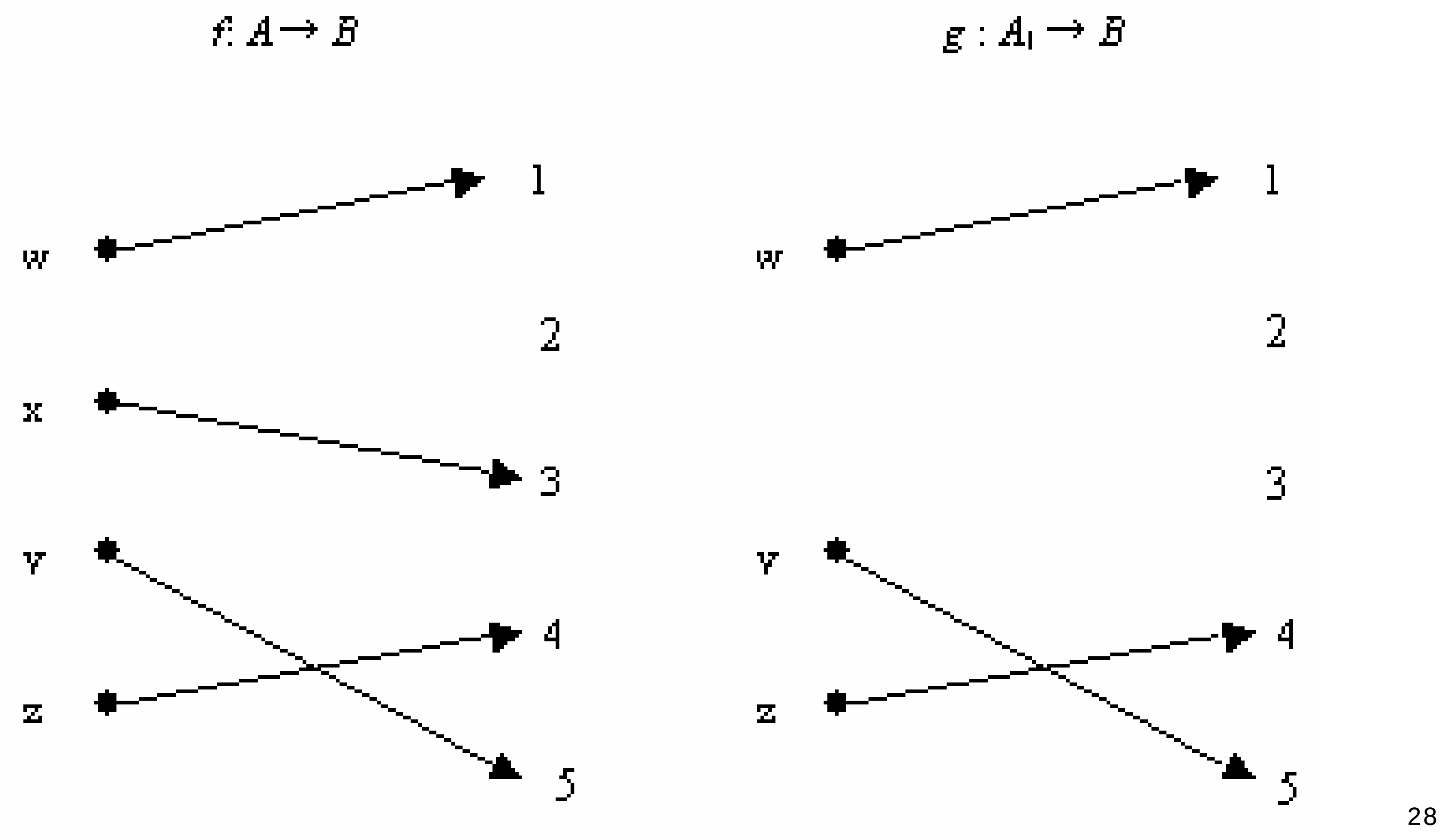
c) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ cuando f es inyectiva.

Funciones uno a uno

Definición Si f: $A \to B$ y $A_1 \subseteq A$, $f\big|_{A_1}(a)$: $A_1 \to B$ se denomina *restricción de f* a A_1 si $f\big|_{A_1}(a) = f(a)$ para toda $a \in A_1$.

Definición Sea $A_1 \subseteq A$ y f: $A_1 \to B$. Si g: $A \to B$ y $g(a) = f(a)$ para toda $a \in A_1$, g se denomina *extensión* de f a A.

EJEMPLO Sea $A = \{w, x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A_1=\{w, y, z\}$. Sean $f: A\to B$, $g: A_1\to B$. Entonces, $g = f|_{A_1}$ y f es una extensión de g de A_1 a A.



Funciones suprayectivas

Definición Si f: $A \to B$, f se llama *sobre* o *suprayectiva* si $f(A)=B$ (es decir, si para toda $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Funciones suprayectivas

EJEMPLO Con $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $f_1 = \{(1, z), (2, y), (3, x), (4, y)\}$ y $f_2=\{(1,x), (2, x), (3, y), (4, z)\}$ son funciones de A *sobre* B.

La función $g = \{(1, x), (2,x), (3,y), (4,y)\}$ no es suprayectiva, pues $g(A) = \{x, y\} \subset B$.

Tipos de Funciones

Definición Una función $f : A \to B$ se llama *uno a uno* o *inyectiva* si cada elemento de B aparece a lo sumo una vez como la segunda componente de un par ordenado de f.

Definición Si f: $A \to B$, f se llama *sobre* o *suprayectiva* si $f(A)=B$ (es decir, si para toda $b \in B$ existe al menos un $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

Funciones

Definición Para cualquier conjunto A, cualquier función $f: A \times A \to A$ se llama *operación binaria* en A.

EJEMPLO La función $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, definida por $f(a, b) = a - b$, es una operación binaria en $\mathbf{Z}$.

EJEMPLO Sea $\mathsf{U} = \{1, 2, 3, 4\}$. Para los conjuntos arbitrarios $A, B \subseteq \mathsf{U}$, $g: \mathsf{P}(\mathsf{U}) \times \mathsf{P}(\mathsf{U}) \to \mathsf{P}(\mathsf{U})$, definida por
$g(A, B) = A \cup B$, es una operación binaria en $\mathsf{P}(\mathsf{U})$.

Funciones

Definición Sea $f: A \times A \to A$.

a) Se dice que f es conmutativa si
$f(a, b) = f(b, a)$ para toda $(a, b) \in A \times A$.

b) Se dice que f es asociativa si
para $a, b, c \in A$, $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$.

Funciones

Definición Para conjuntos A, B, si $D \subseteq A \times B$, entonces π_A: $D \rightarrow A$ definida por $\pi_A(a, b)=a$ se denomina *proyección* sobre la primera coordenada.

La función π_B se define de manera análoga, y se observa que si $D = A \times B$, entonces π_A y π_B son suprayectivas.

Funciones especiales

Ampliamos el concepto de proyección de la siguiente forma: si $A_1, A_2, \ldots , A_n$ son conjuntos e $\{i_1, i_2, \ldots , i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots , n\}$, con $i_1 < i_2 < ,.., < i_m$, $m \leq n$, para $D \subseteq A_1 \times A_2 \times , \ldots, \times A_n = \times_{i=1}^{n} A_i$, la función $\pi: D \rightarrow Ai_1 \times Ai_2 \times , \ldots, \times Ai_m$ definida por $\pi(a_1,\ldots,a_n) = (a_{i1}, a_{i2},\ldots,a_{im})$ es una proyección de D sobre las i_1-ésima, i_2-ésima, ..., i_m-ésima coordenadas. Los elementos de D se denominan n-tuplas, mientras que un elemento en $\pi(D)$ es una m-tupla.

Estas proyecciones aparecen de manera natural en el estudio de las *bases de datos relacionales*

EJEMPLO En determinada universidad se relacionan los siguientes conjuntos para hacer distintos registros:

A_1= conjunto de número de cursos ofrecidos en matemáticas.

A_2= conjunto de nombres de cursos ofrecidos en matemáticas.

A_3= conjunto de los profesores de matemáticas.

A_4= el conjunto de las letras del alfabeto.

Considere la tabla, o relación $D \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4$

Número del curso	**Nombre del curso**	**Profesor**	**Letra**
MA 111	**Cálculo I**	**G. Sosa**	**A**
MA 111	**Cálculo I**	**V. Lara**	**B**
MA 112	**Cálculo II**	**J. Quintana**	**A**
MA 112	**Cálculo II**	**A. Suárez**	**B**
MA 112	**Cálculo II**	**R. Martínez**	**C**
MA 113	**Cálculo III**	**J. Quintana**	**A**
MA 113	**Cálculo III**	**A. Suárez**	**B**

Los conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 se denominan *campos* de la base de datos relacional, y se dice que la tabla D tiene grado 4. A cada elemento de D se le suele denominar *registro*.

En la tabla **a)** se muestra la proyección de D sobre $A_1 \times A_3 \times A_4$. La tabla **b)** indica el resultado de la proyección de D sobre $A_1 \times A_2$.

a)

Número del curso	Profesor	Letra
MA 111	G. Sosa	A
MA 111	V. Lara	B
MA 112	J.Quintana	A
MA 112	A. Suárez	B
MA 112	R.Martínez	C
MA 113	J. Quintana	A
MA 113	A. Suárez	B

b)

Número del curso	Nombre del curso
MA 111	Cálculo I
MA 112	Cálculo II
MA 113	Cálculo III

Funciones

Definición Si f: $A \to B$, se dice que f es *biyectiva* si f es al mismo tiempo uno a uno y suprayectiva.

EJEMPLO Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{w, x, y, z\}$, entonces $f = \{(1, \text{w}), (2, \text{x}), (3, \text{y}), (4, \text{z})\}$ es una correspondencia biyectiva de A a (en) B.

Funciones

Para cualquier conjunto A, siempre hay una correspondencia biyectiva simple, pero importante, como se observa a continuación.

Definición La función 1_A: $A \rightarrow A$, definida por $1_A(a)=a$, para toda $a \in A$, se denomina *función identidad* para A.

Funciones

Definición Si $f, g: A \to B$, se dice que f y g son iguales, y se escribe $f = g$ si $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$.

Un fallo común al tratar la igualdad de funciones tiene lugar cuando f, g son funciones con un dominio común A y $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$, y aún así puede darse el caso que no sea $f = g$.

Funciones

Definición Si $f, g: A \to B$, se dice que f y g son iguales, y se escribe $f = g$ si $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$.

Un fallo común al tratar la igualdad de funciones tiene lugar cuando f, g son funciones con un dominio común A y $f(a) = g(a)$ para toda $a \in A$, y aún así puede darse el caso que no sea $f = g$. *El error se origina por no prestar atención a los codominios de las funciones.*

Funciones

EJEMPLO Sea f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, g: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, donde $f(x) = x = g(x)$ para toda $x \in \mathbf{Z}$. Por tanto f, g comparten el mismo dominio **Z**, tienen la misma imagen **Z** y actúan igual sobre cada elemento de **Z**. Pero $f \neq g$, pues f es una correspondencia uno a uno, mientras que g es uno a uno, pero no suprayectiva, pues los codominios las diferencian.

Funciones

Definición Si f: $A \rightarrow B$, g: $B \rightarrow C$, se define la función compuesta, denotada $g \circ f : A \rightarrow C$, por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, para cada $a \in A$.

Funciones

EJEMPLO Sean $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{a, b, c\}$, $C=\{w, x, y, z\}$, con $f: A \to B$, $g: B \to C$, dadas por:
$f=\{(1,a), (2,a), (3,b), (4,c)\}$ y $g=\{(a,x), (b,y), (c,z)\}$.
Para cada elemento de A resulta:

$(g \circ f)(1)=g(f(1))=g(a)=x$ $(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(b)= y$

$(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(a)=x$ $(g \circ f)(4) =g(f(4))=g(c)=z$

De modo que

$$g \circ f =\{(1, x), (2, x), (3, y), (4, z)\}.$$

EJEMPLO Sean f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, g: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definidas por $f(x)= x^2$, $g(x)= x + 5$. Por tanto,

$$(g \circ f)(x)= g(f(x))=g(x^2) = x^2 + 5,$$

mientras que

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))=f(x + 5) = (x + 5)^2 \\ &= x^2 + 10x + 25.\end{aligned}$$

Aquí, $g \circ f$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, pero $(g \circ f)(1) = 6 \neq 36 = (f \circ g)(1)$; así, aunque puedan formarse las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$, no resulta $f \circ g = g \circ f$. En consecuencia, la composición de funciones no es, en general, una operación conmutativa.

Funciones

En la definición y ejemplos para funciones compuestas se requería que el codominio de f = dominio de g. En realidad, es suficiente para generar la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow C$ si la imagen de $f \subseteq$ del domino de g. Se observa también que para cualquier f: $A \rightarrow B$, $f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$.

Funciones

Una idea importante que se repite en matemáticas es la investigación de si la combinación de dos entidades con una propiedad común proporciona un resultado con esta propiedad. Por ejemplo, si A y B son conjuntos finitos, entonces $A \cap B$, $A \cup B$ también son finitos. Sin embargo, para los conjuntos infinitos A, B, $A \cup B$ es infinito, pero $A \cap B$ podría ser finito.

Funciones

Para la composición de funciones, se tiene el siguiente resultado.

Teorema Sean f: $A \to B$, g: $B \to C$.

a) Si f, g son uno a uno, entonces $g \circ f$ es uno a uno.

b) Si f, g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.

Funciones

Demostración

a) Probar que $g \circ f : A \rightarrow C$ es uno a uno, sea $a_1, a_2 \in A$ con $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Entonces, $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$ $\Leftrightarrow g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$, pues g es uno a uno. Además, $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ ya que f es uno a uno. Por tanto, $g \circ f$ es uno a uno.

Funciones

Demostración (Continuación...)

b) Para $g \circ f : A \to C$, sea $z \in C$. Como g es suprayectiva, existe $y \in B$, con $g(y) = z$. Si f es suprayectiva, existe $x \in A$, con $f(x) = y$. De ahí que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, pues la imagen de $(g \circ f) = C =$ codominio de $(g \circ f)$ y $g \circ f$ es suprayectiva.

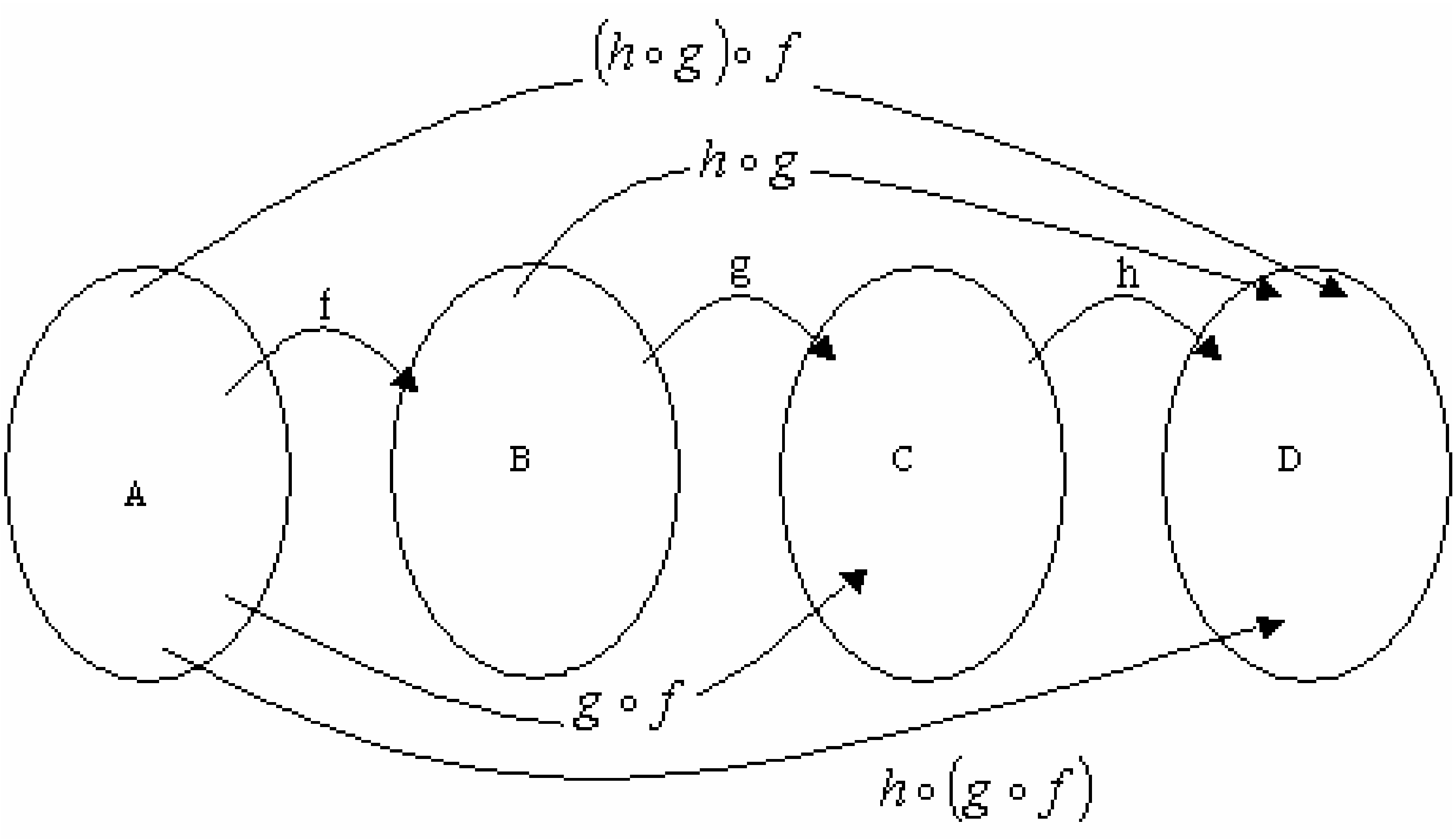
Funciones

Aunque la composición de funciones no sea conmutativa, si $f\colon A \to B,\quad g\colon B \to C,\quad h\colon C \to D$

- ¿Qué se puede afirmar sobre las funciones $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$?
- ¿Por ejemplo, es asociativa la composición de funciones ?

Teorema Dadas f: $A \to B$, g: $B \to C$, h: $C \to D$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$



Funciones

Demostración Como las dos funciones tienen el mismo dominio, A, y codominio, D, el resultado se obtendrá mostrando que para cada $x \in A, \left(h \circ g\right) \circ f(x) = h \circ \left(g \circ f\right)(x)$. Véase el diagrama de Venn de la figura

Mediante la definición de función compuesta , resulta que

$$\left(\left(h \circ g\right) \circ f\right)(x) = \left(h \circ g\right)\left(f(x)\right) = h\left(g\left(f(x)\right)\right)$$

mientras que

$$\left(h \circ \left(g \circ f\right)(x)\right) = h\left(\left(g \circ f\right)(x)\right) = h\left(g\left(f(x)\right)\right)$$

Por tanto, la composición de funciones es una operación asociativa.

Funciones

En virtud de la propiedad asociativa de la composición de funciones, es posible escribir sin problema de ambigüedad $h \circ g \circ f$, $(h \circ g) \circ f$ ó $h \circ (g \circ f)$.

Funciones

Definición Para los conjuntos A, $B \subseteq \mathsf{U}$, si R es una relación de A a B, la conversa de R, denotada por R^c, es una relación de B a A definida por $\mathsf{R}^c = \{(b,a) \mid (a,b) \in \mathsf{R}\}$.

Funciones

Para obtener R^c de R, no hay más que intercambiar las componentes de cada par ordenado en R, de modo que si A $=\{1,2,3,4\}$, $B=\{w,x,y\}$ y $\mathsf{R}=\{(1, x), (2,w), (3,x)\}$, entonces $\mathsf{R}^c = \{(x, 1), (w, 2), (x, 3)\}$, es una relación de B a A.

Funciones

Para los conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{w,x,y\}$, sea $f\colon A \to B$, donde $f = \{(1, w), (2, x), (3, y), (4, x)\}$.
Entonces, $f^{\,c} = \{(w, 1), (x, 2), (y, 3), (x, 4)\}$ es una relación, pero no una función, de B a A. Se pretende investigar en qué condiciones la conversa de una función genera una función, pero antes de entrar en abstracciones, se considerará el siguiente ejemplo.

Funciones

EJEMPLO Para $A=\{1,2,3\}$, $B=\{w,x,y\}$,

Sea $f{:}A\rightarrow B$ dada por $f=\{(1,w),(2,x),(3,y)\}$.

Entonces $f^c=\{(w,1),(x,2),(y,3)\}$ es una función de B a A.

La función f^c se llama *función inversa* para f, y se halla que

$f^c \circ f = 1_A$ y $f \circ f^c = 1_B$

Funciones

Definición Si f: $A \to B$, se dice que f es invertible si existe una función g: $B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$

EJEMPLO Sea f, g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definidas por $f(x)=2x+5$, $g(x)=(1/2)(x-5)$.

Entonces,

$(g \circ f)(x)= g(f(x))= g(2x+5) = (1/2)[(2x+5)-5]= x$,

$(f \circ g)(x)= f(g(x))= f((1/2)(x-5))= 2[(1/2)(x-5)]+5= x$

De modo que $f \circ g=1_{\mathbf{R}}$ y $g \circ f=1_{\mathbf{R}}$. En consecuencia, f y g son funciones invertibles.

Funciones

Teorema Si una función f: $A \rightarrow B$ es invertible, entonces su función inversa g: $B \rightarrow A$ es única.

Demostración Si g es una inversa de f, se tiene $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$. Si g no es única, existe otra función h: $B \rightarrow A$ con $h \circ f = 1_A$, $f \circ h = 1_B$.

En consecuencia,

$$h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ g) = 1_A \circ g = g.$$

Funciones

Como resultado de este teorema, se puede denotar la inversa de una función invertible f por f^{-1}; ¿pero cuándo es invertible una función?

Funciones

Teorema Una función $f: A \rightarrow B$ es invertible si, y sólo si, es uno a uno y suprayectiva.

Demostración

Al suponer que $f: A \rightarrow B$ es invertible, se tiene una función única $g: B \rightarrow A$, con $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$. Si $a_1, a_2 \in A$, con $f(a_1) = f(a_2)$, entonces $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ o $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Como $g \circ f = 1_A$, resulta que $a_1 = a_2$, de modo que f es uno a uno. Para la propiedad de suprayectividad, sea $b \in B$. Entonces, $g(b) \in A$ de manera que es posible hablar de $f(g(b))$. Como $f \circ g = 1_B$, resulta $b = 1_B(b) = (f \circ g)(b) = f(g(b))$, por lo que f es suprayectiva.

Funciones

Demostración. Continuación...

A la reciproca, supóngase que $f: A \to B$ es biyectiva. Como f es suprayectiva, para cada $b \in B$ existe alguna $a \in A$ con $f(a) = b$. En consecuencia, se define una función $g: B \to A$ por $g(b) = a$, donde $f(a) = b$. Esta definición produce una función única. El único problema que se puede presentar, es si $g(b) = a_1 \neq a_2 = g(b)$ debido a que $f(a_1) = b = f(a_2)$. Sin embargo, no puede darse esta situación, pues f es uno a uno. Como la definición de g es tal que $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$, se tiene que f es invertible, con $g = f^{-1}$.

Funciones

EJEMPLO Por el teorema anterior, la función f_1: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definida por $f_1(x) = x^2$ no es invertible (pues no es uno a uno), pero f_2:$[0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, definida por $f_2(x) = x^2$ es invertible con $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Teorema Si $f: A \to B$, $g: B \to C$ son funciones invertibles, entonces $g \circ f : A \to C$ es invertible y
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Vistos algunos ejemplos de funciones y sus inversas, cabe pensar si existe un método algebraico para determinar la inversa de una función invertible. Si la función es finita, no hay más que intercambiar las componentes de los pares ordenados dados pero, ¿y si la función está definida por una fórmula? Por fortuna, las manipulaciones algebraicas son poco más que un análisis cuidadoso del intercambio de las componentes de los pares ordenados. Esto se demuestra en los siguientes ejemplos.

Funciones

EJEMPLO Para m, $b \in \mathbf{R}$, $m \neq 0$, f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f = \{(x, y) | y = mx + b\}$, es una función invertible.

Para obtener f^{-1}, se observa que

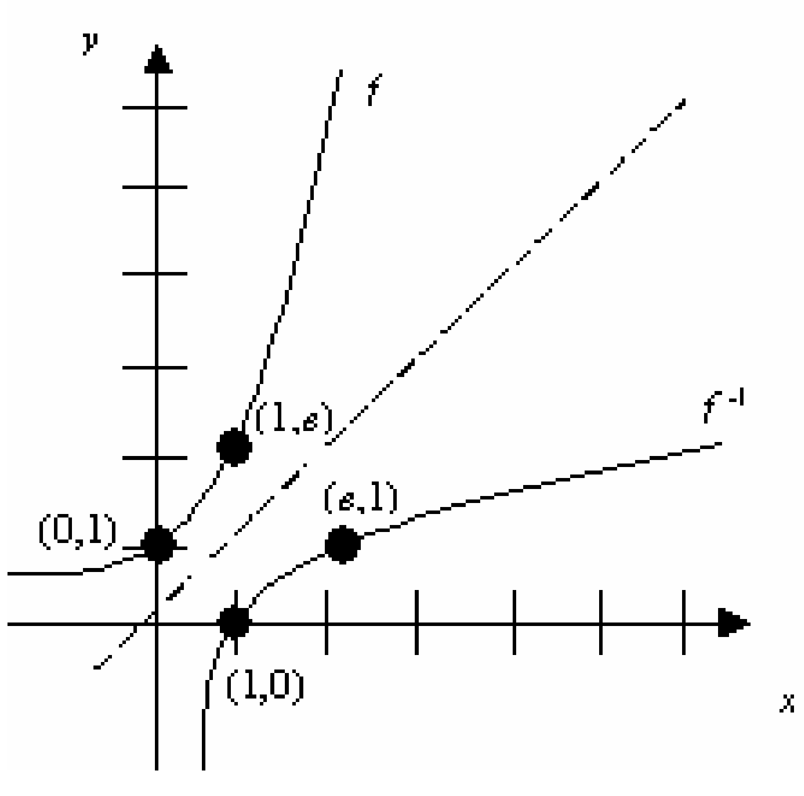
$$f^{-1} = \{(x, y) | y = mx + b\}^{-1}$$
$$= \{(x, y) | y = (1/m)(x - b)\}$$

Así que f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ está definida por $f(x) = mx + b$, mientras que f^{-1}: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se define por $f^{-1}(x) = (1/m)(x - b)$.

EJEMPLO Sea f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ definida por $f(x) = e^x$, donde $e = 2.7183$, es la base para el logaritmo natural. En la gráfica de la figura se observa que f es uno a uno y suprayectiva, de modo que existe f^{-1}: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$. Entonces,

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid y = e^x\}^{-1} = \{(x, y) \mid x = e^y\} = \{(x, y) \mid y = \ln x\},$$

así que $f^{-1}(x) = \ln x$.



Funciones

El resultado $x = e^{\ln x}$ para x > 0 es muy útil. En la aplicación estándar de Pascal no hay exponenciación. Para determinar 2^3, se puede recurrir a la repetición de la multiplicación, pero esto es inútil cuando se trata de evaluar un número como $(5.73)^{4.32}$. Como *exp* y *ln* son funciones definidas en Pascal, se puede determinar $(5.73)^{4.32}$ expresándolo de nuevo como $e^{4.32 \ln (5.73)}$, pues por la fórmula anterior, $5.73 = e^{\ln(5.73)}$. En Pascal, esto se transforma en *exp*(4.32 × *ln*(5.73)).