Matemáticas Discretas

Cursos Propedéuticos 2007
Ciencias Computacionales
INAOE

Dr. Luis Villaseñor Pineda
villasen@inaoep.mx
http://ccc.inaoep.mx/~villasen
Mayo-Julio 2007

Material del curso recopilado por:
Dr. César Torres Huitzil y Dr. Francisco Martínez Trinidad

Contenido

1. Conjuntos
2. Relaciones y funciones
3. Lógica
4. Series

Introducción

- ***Definición***: *la matemática discreta, también llamada matemática finita, comprende el estudio de las estructuras matemáticas fundamentalmente* ***discretas*** *en el sentido de no soportar o requerir la noción de* ***continuidad***

Importancia

- Matemáticas necesarias para hacer ciencia de la computación en una forma confiable y eficiente:
  - Confiable: Lógica, teoría de conjuntos, funciones y relaciones, estructuras discretas
    - Cómo argumentar y probar
  - Eficiente: Combinatoria, teoría de probabilidad
    - Cómo contar cosas

PRIMERA PARTE

1. Conjuntos
   - Nociones generales
   - Operaciones de conjuntos

Conjuntos

Se tiene un “sentimiento íntimo” de que un conjunto debe ser una **colección bien definida de elementos**. A estos elementos se les suele llamar *objetos* y se dice que son miembros del conjunto.

El adjetivo “**bien definido**” implica que cualquiera que sea el objeto considerado, se pueda determinar si está o no en el conjunto que se analiza.

Conjuntos

Se utilizan letras mayúsculas, como A, B, C,..., para representar ***conjuntos***, y minúsculas para los ***elementos***.

Dado un conjunto A

Se escribe $x \in A$ si x **es un elemento** de A;

$y \notin A$ indica que y **no pertenece** a A.

Para **denotar un conjunto** se utiliza un par de llaves {} alrededor de los elementos del conjunto

Conjuntos

Un conjunto se puede determinar enlistando sus elementos entre llaves como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$ (***determinación extensional***).

Este conjunto también se puede determinar mediante una propiedad que indica cómo deben ser los elementos (***determinación intencional***). Entonces A también se puede escribir como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero, } 1 \leq x \leq 5\}.$$

Conjuntos

Cuando se trata un problema particular, hay un ***universo*** o ***conjunto universal***, formulado o implicado, del cual se seleccionan los elementos para formar los conjuntos.

EJEMPLO. Para el universo U $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considérese un conjunto $A = \{1, 2\}$. Si $B = \{x \mid x^2 \in \text{U}\}$ los elementos de B son 1, 2. Como A y B tienen los mismos elementos se considera que son el mismo conjunto.

Conjuntos

Definición Para un universo U se dice que los conjuntos *A* y *B* (tomados de U) **son iguales** y se escribe $A = B$, si *A* y *B* contienen los mismos elementos.

De esta definición se deduce que ni el orden ni la repetición tienen importancia para un conjunto, de modo que {1, 2, 3} = {3, 1, 2} = {2, 2, 1, 3} = {1, 2, 1, 3, 1}.

Conjuntos

EJEMPLO

Para U = {1, 2, 3,... }, el conjunto de enteros positivos, sea:

a) $A = \{1, 4, 9, \ldots, 64, 81\} = \{x^2 \mid x \in \text{U}, x^2 < 100\}$.

b) $B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2 \mid y \in \text{U}, y^2 < 20\}$

c) $C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2k \mid k \in \text{U}\}$

A y *B* son ejemplos de conjuntos ***finitos***, mientras que *C* se denomina conjunto ***infinito***.

Conjuntos

Definición Si C, D son conjuntos de un universo U, se dice que C es un **subconjunto de** D, y se escribe $C \subseteq D$ o $D \supseteq C$ si todo elemento de C es también un elemento de D.

Si existe algún elemento de D que no está en C, C se denomina **subconjunto propio** de D y se denota por $C \subset D$ o $D \supset C$.

- $A \subseteq B$ si y solo si $\forall x\ [x \in A \rightarrow x \in B]$

Conjuntos

EJEMPLO

Sea U = {1, 2, 3, 4, 5} con A = {1, 2, 3}, B = {3,4}, C = {1, 2, 3, 4}. Entonces se cumplen las siguientes relaciones de subconjuntos:

a) $A \subseteq C$ **b)** $A \subset C$ **c)** $B \subset C$ **d)** $A \subseteq A$

e) $B \nsubseteq A$ (es decir, B no es un subconjunto de A)

f) $A \not\subset A$

Conjuntos

Teorema Sea A, B, $C \subseteq$ U .

a) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

b) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$

c) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

d) Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Conjuntos

Definición El conjunto nulo o **vacío** es aquél que no contiene elementos y se denota por $\varnothing$ o $\{\}$.

Se observa que $|\varnothing| = 0$, pero $\{0\} \neq \varnothing$. Además, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, pues $\{\varnothing\}$ es un conjunto con un elemento: el conjunto vacío.

Conjuntos

Definición Si A es un conjunto del universo U, el ***conjunto potencia*** de A, denotado por P(A), es la colección de todos los subconjuntos de A.

Para cualquier conjunto finito A con $|A| = n \geq 0$, A tiene 2^n subconjuntos, de modo que $|P(A)| = 2^n$.

Conjuntos

EJEMPLO

- sea A={x, y, z}

Su conjunto potencia,

- P(A)={{},{x},{y},{z},{x, y},{x, z},{y, z},{x, y, z}}

Operaciones de Conjuntos

Definición Dados A, $B \subseteq$ U, se definen las propiedades siguientes:

a) $A \cup B$ (la ***unión*** de A y B) = $\{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

b) $A \cap B$ (la ***intersección*** de A y B) = $\{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

c) $A \triangle B$ (la ***diferencia simétrica*** de A y B) =

$A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\text{, pero } x \notin A \cap B\}$

Operaciones de Conjuntos

EJEMPLO

Con U ={1,2,3, ... ,9,10},

A={1,2,3,4,5}, B ={3,4,5,6,7}, C={7,8,9} tenemos

a) $A \cap B =$

b) $A \cup B =$

c) $B \cap C =$

d) $A \cap C =$

e) $A \triangle B =$

f) $A \cup C =$

g) $A \triangle C =$

Operaciones de Conjuntos

EJEMPLO

Con U ={1,2,3, ... ,9,10},

A={1,2,3,4,5}, B ={3,4,5,6,7}, C={7,8,9} tenemos

a) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ **b)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $B \cap C = \{7\}$ **d)** $A \cap C = \varnothing$

e) $A \triangle B = \{1, 2, 6, 7\}$ **f)** $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

g) $A \triangle C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Operaciones de Conjuntos

Definición Si S, $T \subseteq$ U, cuando $S \cap T = \varnothing$, entonces S y T se denominan ***disjuntos*** o ***mutuamente disjuntos***.

Teorema Si S, $T \subseteq$ U, $S \cup T = S \triangle T$ si y sólo si S y T son disjuntos.

Operaciones de Conjuntos

Definición Para un conjunto $A \subseteq$ U, el ***complemento de A***, denotado por U – A o $\overline{A}$, está dado por {x | $x \in$U, $x \notin A$ }.

Para U={1,2,3, ... ,9,10}

A={1,2,3,4,5}, B={3,4,5,6,7}, y C={7,8,9}

$\overline{A}$ ={6, 7, 8, 9, 10},

$\overline{B}$ ={1, 2, 8, 9, 10}, $\overline{C}$ ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 10}

Operaciones de Conjuntos

Definición Para A, $B \subseteq$ U, el ***complemento (relativo) de A en B***, denotado por $B - A$, está dado por $\{x \mid x \in B, x \notin A\}$.

Para U={1,2,3, ... ,9,10} A={1,2,3,4,5}, B={3,4,5,6,7}, y C={7,8,9} se tiene:

a) $B - A = \{6,7\}$ b) $A - B = \{1, 2\}$ c) $A - C = A$

d) $C - A = C$ e) $A - A = \varnothing$ f) $U - A = \overline{A}$

Proposiciones equivalentes

Teorema Las siguientes proposiciones son equivalentes para los conjuntos A, $B \subseteq$ U

a) $A \subseteq B$ b) $A \cup B = B$ c) $A \cap B = A$ d) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

1) a)$\Rightarrow$b) Si A, B son conjuntos cualesquiera, entonces $B \subseteq A \cup B$. Para la inclusión opuesta, si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$, pero como $A \subseteq B$, en ambos casos se tiene $x \in B$; de modo que $A \cup B \subseteq B$ y resulta la igualdad.

2) b)$\Rightarrow$c) Dados los conjuntos A, B, siempre se tiene que $A \supseteq A \cap B$. Para la inclusión opuesta, sea $y \in A$. Si se tiene $A \cup B = B$, $y \in A \Rightarrow y \in A \cup B \Rightarrow y \in B \Rightarrow y \in A \cap B$, entonces $A \subseteq A \cap B$ y se concluye que $A = A \cap B$.

Leyes de la teoría de conjuntos

Para conjuntos cualesquiera *A*, *B*, *C* de un universo U:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ **Doble complemento**

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **DeMorgan**

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. $A \cup B = B \cup A$ **Conmutativas**

$A \cap B = B \cap A$

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **Asociativas**

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **Distributivas**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de la teoría de conjuntos

6. $A \cup A = A$ **Idempotentes**

$A \cap A = A$

7. $A \cup \varnothing = A$ **Identidad**

$A \cap U = A$

8. $A \cup \overline{A} = U$ **Inversas**

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

9. $A \cup U = U$ **Dominación**

$A \cap \varnothing = \varnothing$

10. $A \cup (A \cap B) = A$ **Absorción**

$A \cap (A \cup B) = A$

Leyes de la teoría de conjuntos

Debe tener alguna importancia que las leyes 2 a 10 se presenten por pares. Estos pares se llaman ***duales***.

Una proposición se puede obtener a partir de la otra intercambiando en todos los casos en que se presente $\cup$ por $\cap$, y viceversa, y donde aparezca U por $\emptyset$, y viceversa.

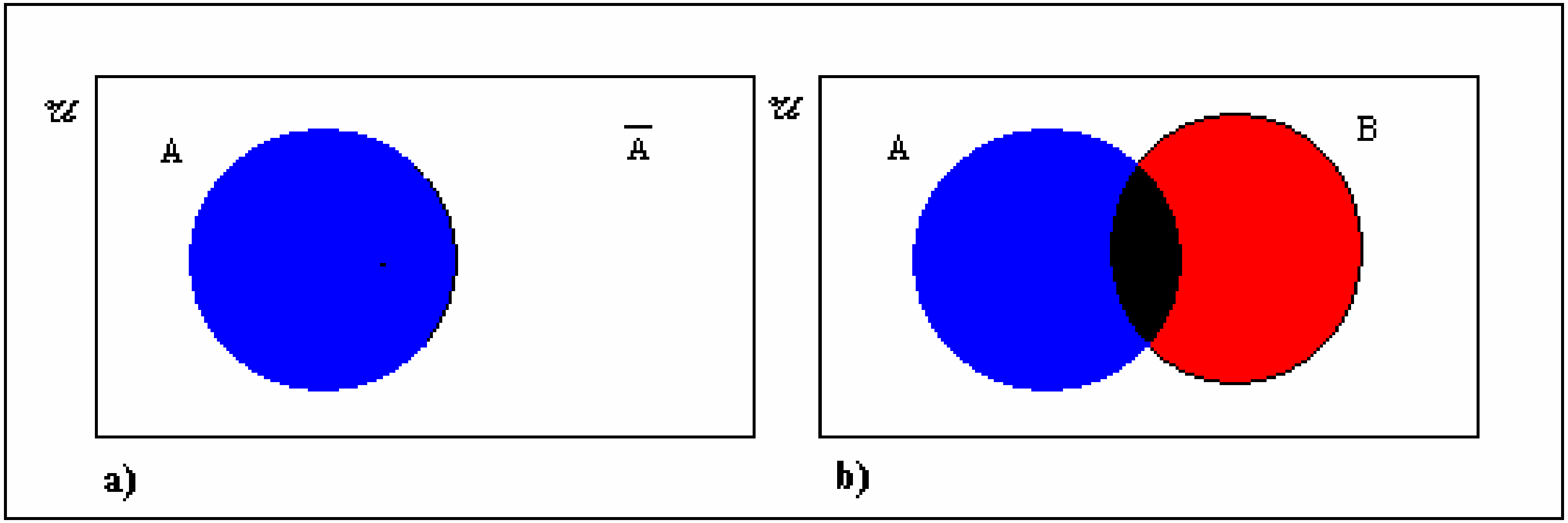
Leyes de la teoría de conjuntos

Teorema (El principio de dualidad) Si *s* es un teorema que trata de conjuntos e incluye sólo –, $\cap$, $\cup$, e =, entonces el dual de *s* también es un teorema de la teoría de conjuntos.

Este principio reduce el trabajo de forma considerable. Para cada par de las leyes 2 a 10 sólo se necesita demostrar una de las proposiciones y recurrir a este principio para obtener la otra proposición del par.

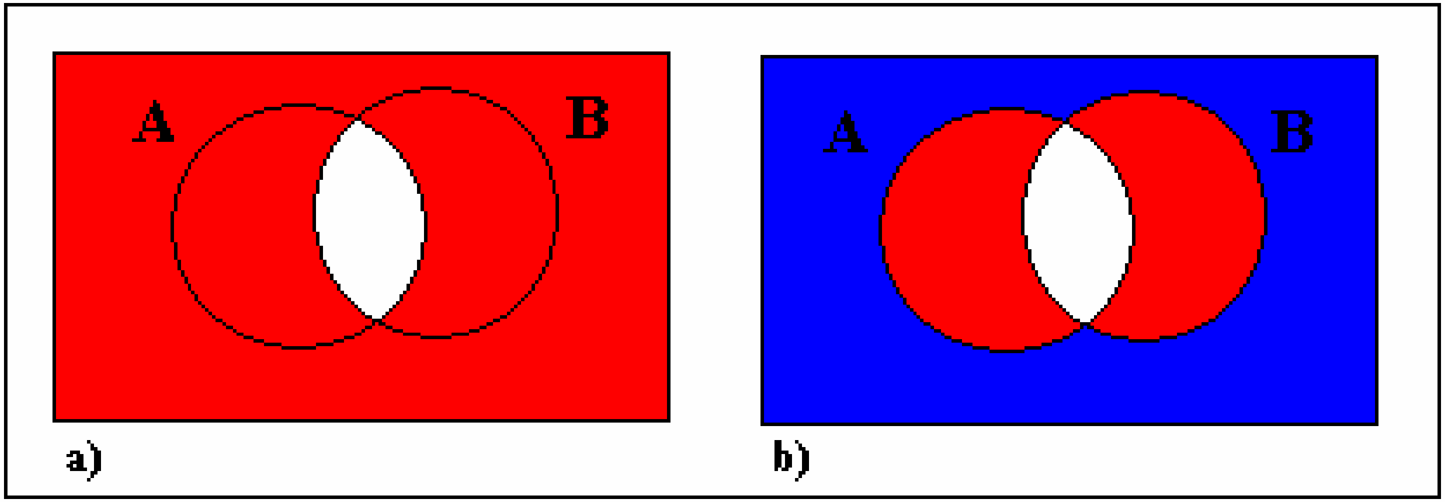
Diagramas de Venn

Un **diagrama de Venn**, se construye como sigue: U se representa por el interior de un rectángulo, mientras que sus subconjuntos se representan por círculos interiores y otras curvas cerradas.



Diagramas de Venn

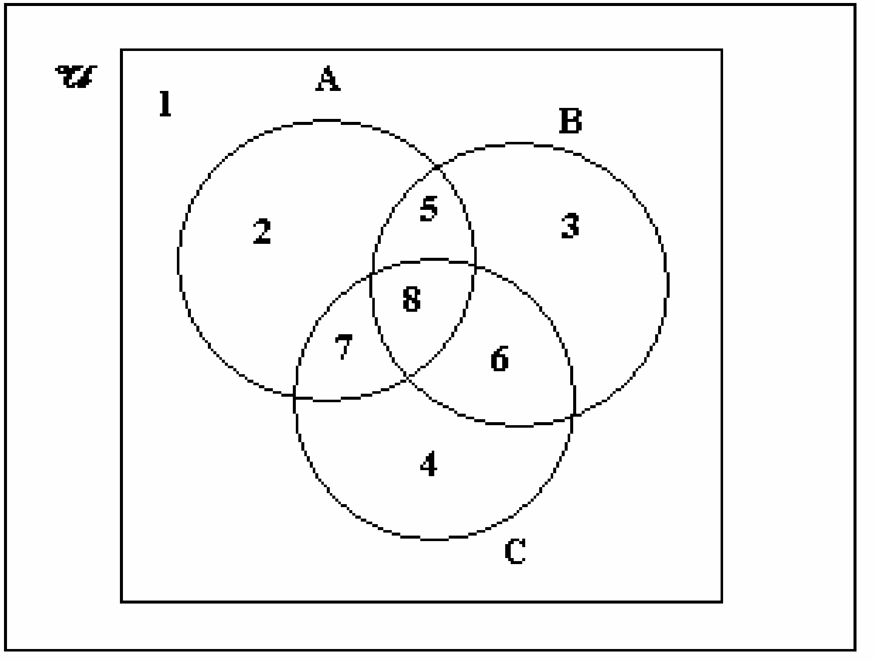
En la figura se usan diagramas de Venn para establecer una de las leyes de DeMorgan.



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Diagramas de Venn

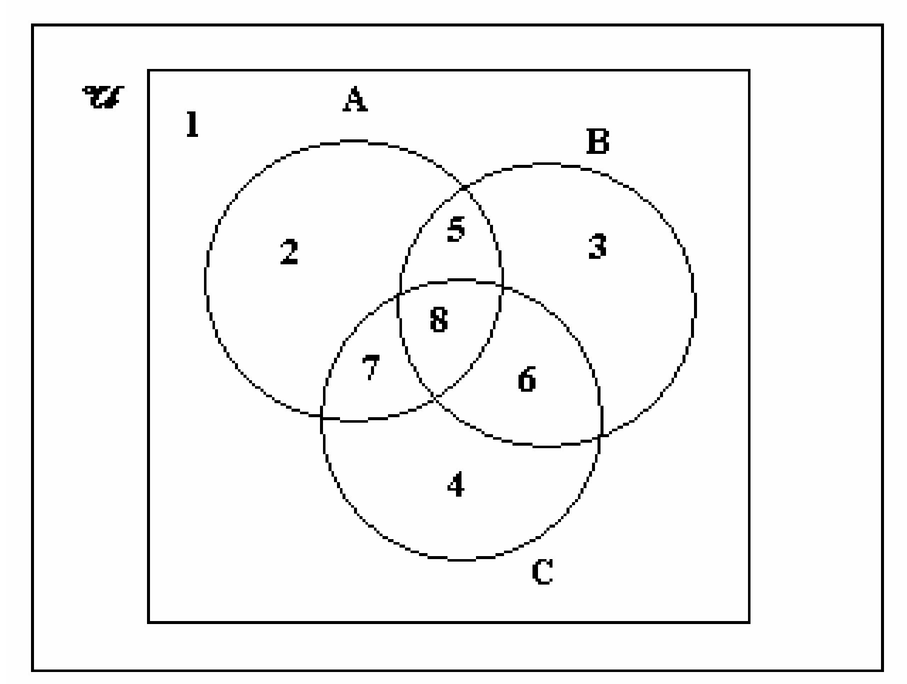
Diagrama de Venn numerando regiones



La región 3 es $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ y la región 7 es $A \cap \overline{B} \cap C$. Cada región es un conjunto de la forma $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ donde S_1 se sustituye por A o $\overline{A}$, S_2 por B o $\overline{B}$, y S_3 por C o $\overline{C}$.

Diagramas de Venn

$A \cup B$ está formado por las regiones 2, 3, 5, 6, 7, 8, de modo que $\overline{(A \cup B)}$ comprende las regiones 1 y 4.
Al desarrollar $\overline{(A \cup B)} \cup C$ está formado por las regiones 1, 4, 6, 7, 8.



Diagramas de Venn

El conjunto $\overline{A}$ consta de las regiones 1, 3, 4, 6, mientras que las regiones 1, 2, 4, 7 forman $\overline{B}$, de modo que las regiones 1 y 4 comprenden $\overline{A} \cap \overline{B}$. Si se toma la unión de C con $\overline{A} \cap \overline{B}$, se concluye con las regiones 1, 4, 6, 7, 8.

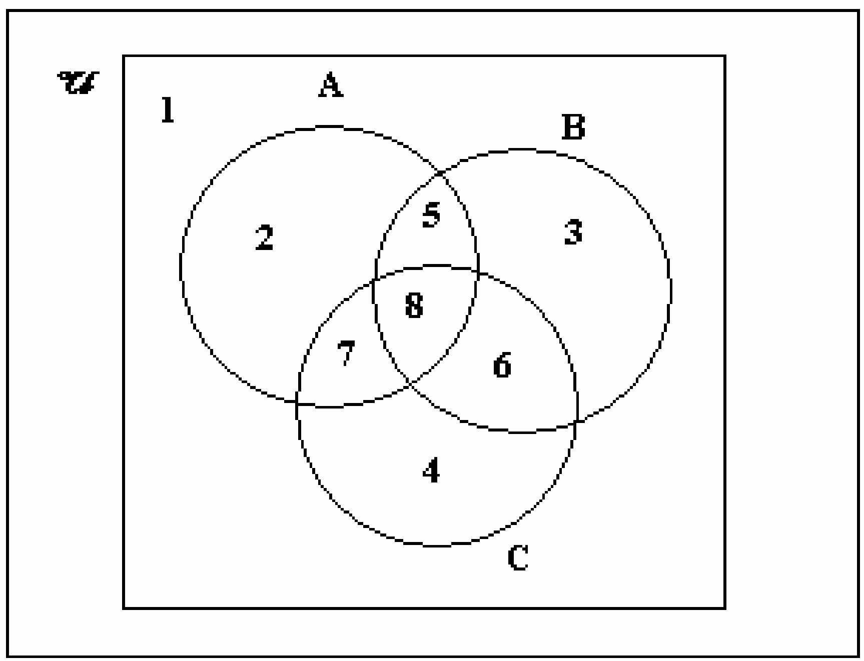


Tabla de pertenencia

Otra técnica para probar igualdades entre conjuntos es la ***tabla de pertenencia***. Se observa que para los conjuntos A, $B \subseteq \mathsf{U}$, un elemento $x \in \mathsf{U}$ cumple exactamente una de las cuatro situaciones siguientes:

a) $x \notin A, x \notin B$; **b)** $x \notin A, x \in B$; **c)** $x \in A, x \notin B$; **c)** $x \in A, x \in B$.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Tabla de pertenencia

Se puede establecer la igualdad de dos conjuntos ocupando sus columnas respectivas en las tablas de pertenencia. En la tabla se muestra esto para la ley distributiva de la unión sobre la intersección.

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Simplificación y deducción de expresiones

EJEMPLO Simplifique la expresión $\overline{\overline{(A\cup B)\cap C}\cup\overline{B}}$

$= \overline{\overline{(A\cup B)\cap C}}\cap\overline{\overline{B}}$ DeMorgan

$= ((A\cup B)\cap C)\cap B$ doble complemento

$= (A\cup B)\cap(C\cap B)$ asociativa

$= (A\cup B)\cap(B\cap C)$ conmutativa de intersección

$= [(A\cup B)\cap B]\cap C$ asociativa de la intersección

$= B\cap C$ absorción

Leyes de la teoría de conjuntos

Para conjuntos cualesquiera A, B, C de un universo U:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ **Doble complemento**

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **DeMorgan**

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3. $A \cup B = B \cup A$ **Conmutativas**

$A \cap B = B \cap A$

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **Asociativas**

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **Distributivas**

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Leyes de la teoría de conjuntos

6. $A \cup A = A$ **Idempotentes**

$A \cap A = A$

7. $A \cup \varnothing = A$ **Identidad**

$A \cap U = A$

8. $A \cup \overline{A} = U$ **Inversas**

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

9. $A \cup U = U$ **Dominación**

$A \cap \varnothing = \varnothing$

10. $A \cup \left(A \cap B\right) = A$ **Absorción**

$A \cap \left(A \cup B\right) = A$

Simplificación y deducción de expresiones

EJEMPLO Exprésese $\overline{A-B}$ en función de $\cup$ y $\overline{}$.

Por la definición de complemento relativo tenemos que

$A-B=\{x \mid x\in A, x\notin B\}=A\cap\overline{B}$. Por tanto, $\overline{A-B}=\overline{A\cap\overline{B}}$

$=\overline{A}\cup\overline{\overline{B}}$	DeMorgan
$=\overline{A}\cup B$	doble complemento

Generalización operaciones de conjuntos

Definición Denótese por I un conjunto de índices. Si para cada índice $i \in I$ hay un conjunto $A_i \subseteq \mathrm{U}$, entonces

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para al menos una } i \in I\} \text{ y}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$$

Obsérvese que $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ si $x \notin A_i$, para todo índice $i \in I$.

Si $x \notin A_i$ para al menos un índice $i \in I$, entonces $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$.

Generalización operaciones de conjuntos

Si el conjunto de índices *I* es el conjunto $\mathbf{Z}^+$, se puede escribir:

$$\bigcup_{i \in Z^+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap_{i \in \mathrm{Z}^+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

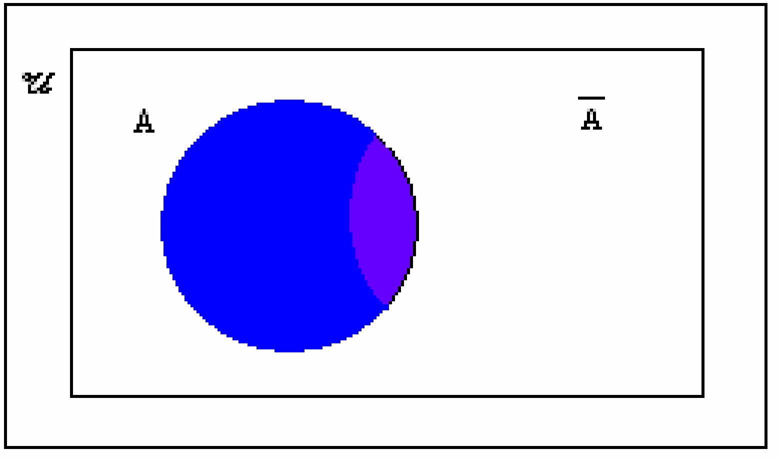
Generalización operaciones de conjuntos

Teorema (Leyes de DeMorgan generalizadas)
Sea *I* un conjunto de índices, donde para cada $i \in I$, $A_i \subseteq$ U. Entonces,

a) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ b) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$

Conteo y diagramas de Venn

Para $A, B \subseteq \mathsf{U}$, los siguientes diagramas de Venn ayudarán a obtener fórmulas de conteo para $|\overline{A}|$, $|A \cup B|$ en función de $|A|$, $|B|$ y $|A \cap B|$.

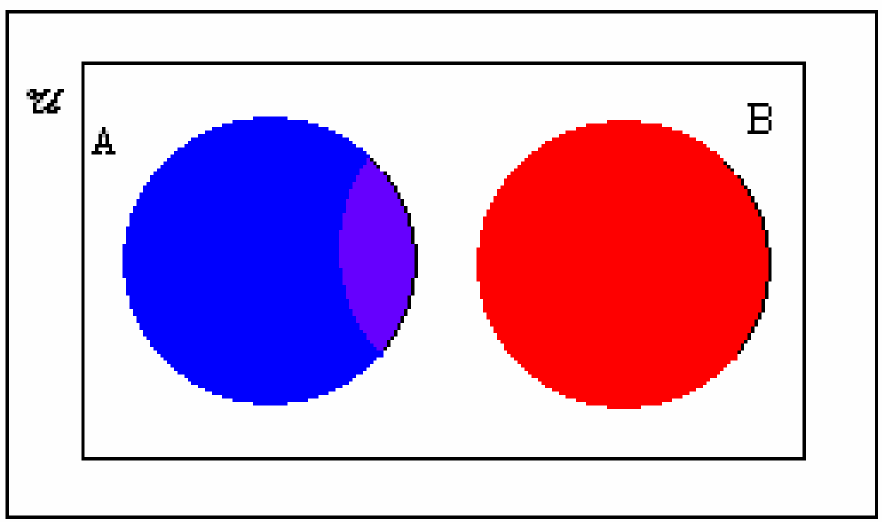


Como se muestra en la figura, $A \cup \overline{A} = \mathsf{U}$ y $A \cap \overline{A} = \varnothing$, de modo que, por la regla de la suma, $|A| + |\overline{A}| = |\mathsf{U}|$ o

$|\overline{A}| = |\mathsf{U}| - |A|$

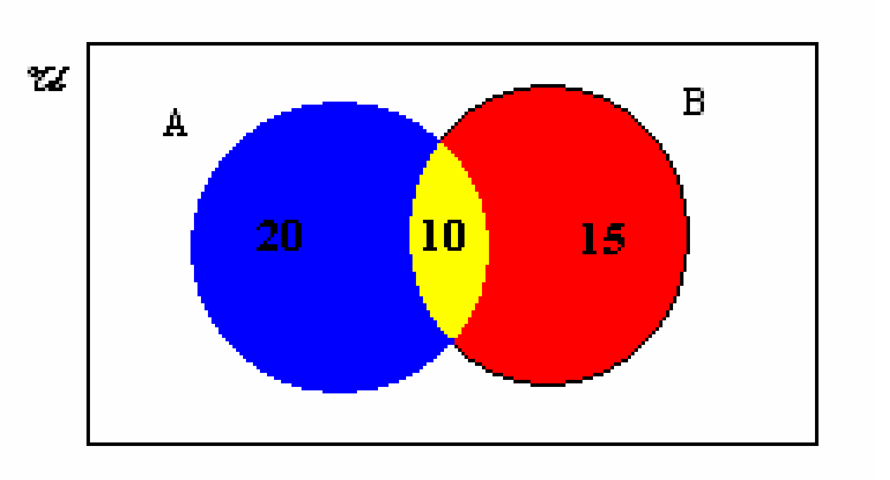
Conteo y diagramas de Venn

Los conjuntos A, B de la figura no tienen intersección, así que aquí la regla de la suma da lugar a $|A \cup B| = |A| + |B|$, y es necesario que A, B sean finitos, pero no requiere condición alguna sobre la cardinalidad de U.



Conteo y Diagramas de Venn

EJEMPLO En una clase de 50 alumnos de primero de universidad, 30 estudian BASIC, 25 Pascal, y 10 los dos lenguajes. ¿Cuántos alumnos estudian uno de los lenguajes de programación?.



Conteo y Diagramas de Venn

Sea U la clase de 50 alumnos, A el subconjunto de los que estudian BASIC y B el de los que estudian Pascal. Para responder a la pregunta, se necesita $|A \cup B|$. En la figura, los números de las regiones se obtienen de la información: $|A|$=30, $|B|$=25, $|A \cap B|$=10. Por tanto, $|A \cup B|$= 45 $\neq |A| + |B|$, pues $|A| + |B|$ cuenta dos veces a los alumnos de $A \cap B$. Para evitar esta sobre cuenta se resta $|A \cap B|$ de $|A| + |B|$ y se obtiene la fórmula correcta:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

El empleo de conjuntos

- Los conjuntos son las estructuras más simples pero no triviales de las matemáticas
- Otros objetos y propiedades de la matemáticas se definen en base a ellos
- Fueron usados en un principio para estudiar la noción de ***infinito***
- Útiles en problemas de conteo y teoría de probabilidad