

Requería Herón II, rey de Siracusa y pariente de Arquímedes (287 a.C. - 212 a.C.), saber si la corona encargada al orfebre local era realmente de oro puro. Advirtió el rey a Arquímedes, expresamente, que no dañase la corona. Arquímedes dio varios rodeos al problema, hasta que un día, al meterse en la bañera, vino a solucionar el asunto. De acuerdo con lo percibido, pensó que el agua que se desbordaba tenía que ser igual al volumen de su cuerpo en ella sumergido, por lo que, trasladando el asunto a la corona de Herón, si medía el agua que rebosaba al meter la corona, accedería a saber el volumen de ésta, y acto seguido, podría compararlo con el volumen de un objeto de oro que pesase igual que la corona. Si los volúmenes no fuesen iguales, sería la prueba de que la corona no era de oro puro. Excitadísimo por el descubrimiento, salió del baño y corriendo desnudo, a palacio,

El griego eurhka (Eureka) pasa a la posteridad como la expresión que anuncia el descubrimiento. Arquímedes logró demostrar que la corona tenía mayor volumen que un objeto de oro con el mismo peso, contenía plata, un metal de menor densidad que el oro. La *fórmula* fundamental de la teoría Gestalt, puede ser expresada de la siguiente forma: Hay todos cuyo comportamiento no está determinado por sus elementos individuales, sino donde los procesos parte se encuentran determinados por la naturaleza intrínseca del todo. Es la esperanza de la teoría Gestalt el determinar la naturaleza de tales todos:  
Max Wertheimer, lección dada en 1924 a la Sociedad Kantiana de Berlín.

# Normalized Cuts and Image Segmentation

Gerardo Arellano    Javier Cabanillas

25 de mayo de 2009

## Tabla de Contenidos

- 1 Resumen
- 2 Introducción
- 3 Agrupamiento como Partición de Grafos
- 4 Algoritmo de Agrupamiento
- 5 Experimentos
- 6 Relación con la Teoría Espectral de Grafos
  - Una Interpretación Física
- 7 Otros métodos de la Teoría de Grafos para segmentación
  - Comparación con otros métodos
- 8 Conclusiones
- 9 Referencias

## Resumen

Se propone un nuevo método para resolver el problema del agrupamiento perceptual en visión, tratando la segmentación de imágenes como un problema de partición de grafos y se presenta un nuevo criterio global, el corte normalizado (normalized cut), para segmentar grafos. Se muestra que una técnica computacional eficiente basada en un problema generalizado de autovalor puede ser usado para optimizar este criterio. Este método se aplicó tanto en imágenes estáticas como en secuencias en movimiento, logrando resultados alentadores.

# Introducción I

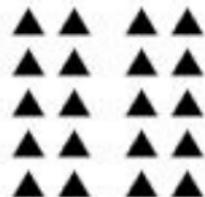
- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*



# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

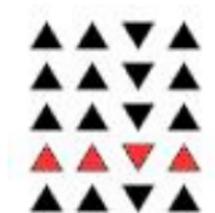
*Similitud*

# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*



# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*



# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*

# Introducción I

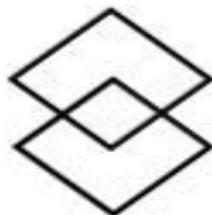
- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*



# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*

*Clausura*

# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*

*Clausura*



# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*

*Clausura*

*Tamaño relativo*

*o Área*

# Introducción I

- Wertheimer puntualizó la importancia del agrupamiento y organización perceptual en visión.

*Proximidad*

*Similitud*

*Continuidad*

*Simetría*

*Clausura*

*Tamaño relativo  
o Área*



## Introducción II

- Se presenta un marco de trabajo para este problema, centrado específicamente en segmentación de imágenes
- Aspectos de selección de partición:
  - No existe sólo una respuesta correcta
  - La partición es inherentemente jerárquica
- La segmentación de imágenes basada en características de bajo nivel no puede y no debe apuntar a producir una segmentación final *correcta*. El objetivo debe ser usar la coherencia a bajo nivel para secuencialmente distinguirse con las particiones jerárquicas. El conocimiento a medio-alto nivel puede ser usado para confirmar estos grupos o seleccionar alguno para brindarle mayor atención.

## Introducción III

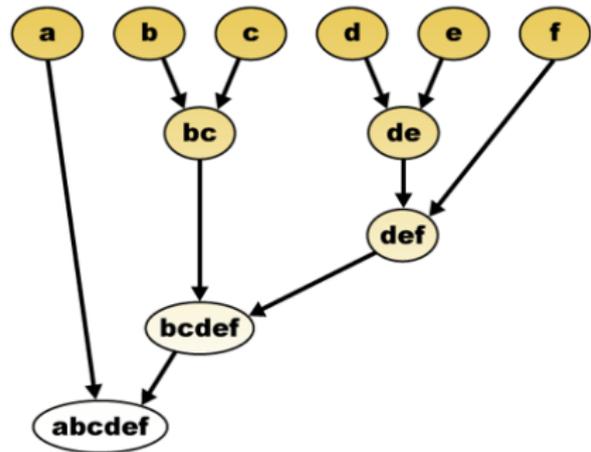
- La partición de la imagen será del panorama hacia abajo (de lo general a lo particular)

## Introducción III

- La partición de la imagen será del panorama hacia abajo (de lo general a lo particular)
- El método de división jerárquico propuesto produce un dendograma

## Introducción III

- La partición de la imagen será del panorama hacia abajo (de lo general a lo particular)
- El método de división jerárquico propuesto produce un dendograma



## Introducción IV

- MRF
  - 1 Cuál es el criterio que queremos optimizar
  - 2 Existen algoritmos eficientes para llevar a cabo la optimización
- *El método.* un conjunto arbitrario de características es representado mediante un grafo pesado no dirigido  $G = (V, E)$ , donde los nodos del grafo son puntos en el espacio de características, y las ramas están formadas por cualquier par de nodos. El peso en cada nodo,  $w(i, j)$ , es una función de similaridad entre los nodos  $i$  y  $j$ .

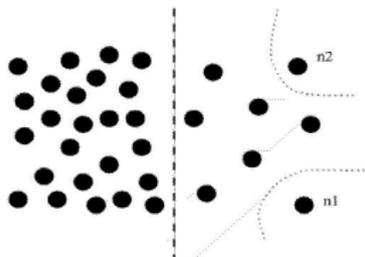
- Criterios para particionar un grafo
  - 1 Cuál es el criterio preciso para una buena partición
  - 2 Cómo puede calcularse eficientemente una partición
- *La deficiencia de los métodos.* se basan en propiedades locales del grafo
- Se propone un nuevo criterio basado en teoría de grafos para medir la bondad de una partición de imagen: *el corte normalizado*

# Agrupamiento como Partición de Grafos I

$$\text{cut}(A, B) = \sum_{u \in A, v \in B} w(u, v) \quad (1)$$

La partición óptima de un grafo es la que minimice este valor de corte (minimum cut)

Wu y Leahy propusieron un método de clustering basado en este criterio de partición mínimo.



## Agrupamiento como Partición de Grafos II

$$Ncut(A, B) = \frac{cut(A, B)}{assoc(A, V)} + \frac{cut(A, B)}{assoc(B, V)} \quad (2)$$

donde  $assoc(A, V) = \sum_{u \in A, t \in V} w(u, t)$

$$Nassoc(A, B) = \frac{assoc(A, A)}{assoc(A, V)} + \frac{assoc(B, B)}{assoc(B, V)} \quad (3)$$

donde  $assoc(A, A)$  y  $assoc(B, B)$  son pesos totales de las ramas que conectan nodos en A y B, respectivamente.

La asociación y disociación de una partición están naturalmente relacionadas.

Los dos criterios de partición son idénticos y puedes ser satisfechos simultáneamente. En este caso, se usa el corte normalizado como

## Calculando la Partición Óptima I

El problema de encontrar el corte mínimo de un grafo es NP-Completo. El resultado aproximado puede encontrarse como se explica a continuación:

Considerando el vector  $x$  correspondiente a la bisección a obtener, de modo que si  $x_i = 1$ , el nodo pertenece al subgrafo  $A$  y si  $x_i = -1$  pertenece al subgrafo  $B$

$$\begin{aligned}
 Ncut(A, B) &= \frac{cut(A, B)}{assoc(A, V)} + \frac{cut(A, B)}{assoc(B, V)} \\
 &= \frac{\sum_{x_i > 0, x_j < 0} -w_{ij}x_i x_j}{\sum_{x_i > 0} d_i} + \frac{\sum_{x_i < 0, x_j > 0} -w_{ij}x_i x_j}{\sum_{x_i < 0} d_i}
 \end{aligned} \tag{4}$$

## Calculando la Partición Óptima II

Y definiendo:

- 1 El vector  $d$ , como el vector que contiene las incidencias de cada nodo, de modo que  $d_i = \sum_j W_{ij}$
- 2 La matriz diagonal  $D$  como la matriz formada por los elementos de  $d$  en su diagonal principal
- 3 La matriz simétrica  $W$  con  $W(i, j) = w_{ij}$
- 4  $k = \frac{\sum_{x_j > 0} d_i}{\sum_i d_i}$
- 5 1 se una matriz  $N \times 1$  para todas.

## Calculando la Partición Óptima III

Usando el factor  $\frac{(1+x)}{2}$  y  $\frac{(1-x)}{2}$  como indicadores de matrices para  $x_i > 0$  y  $x_i < 0$ , respectivamente, podemos reescribir  $4[Ncut(x)]$  como:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1+x)^T(D-W)(1+x)}{k1^T D1} + \frac{(1-x)^T(D-W)(1-x)}{(1-k)1^T D1} \\
 &= \frac{(x^T(D-W)x + 1^T(D-W)1)}{k(1-k)1^T D1} + \frac{2(1-2k)1^T(D-W)x}{k(1-k)1^T D1}
 \end{aligned} \tag{5}$$

## Calculando la Partición Óptima IV

Dado

$$\alpha(x) = x^T(D - W)x$$

$$\beta(x) = \mathbf{1}^T(D - W)x$$

$$\gamma = \mathbf{1}^T(D - W)\mathbf{1}$$

$$M = \mathbf{1}^T D \mathbf{1}$$

$$b = \frac{k}{(1-k)}$$

$$\gamma = 0$$

## Calculando la Partición Óptima $V$

Haciendo  $y = (1 + x) - b(1 - x)$ , es fácil ver que

$$y^T D \mathbf{1} = \sum_{x_i > 0} d_i - b \sum_{x_i < 0} d_i = 0 \quad (6)$$

dado  $b = \frac{k}{1-k} = \sum_{x_i > 0} d_i / \sum_{x_i < 0} d_i$  y  
 $y^T D y = b \mathbf{1}^T D \mathbf{1}$

Poniendo todo junto tenemos,

$$\min_x Ncut(x) = \frac{\min_y y^T (D - W) y}{y^T D y} \quad (7)$$

con la condición  $y(i) \in \{1, -b\}$  y  $y^T D \mathbf{1} = 0$

## Calculando la Partición Óptima VI

La expresión anterior es conocida como el cociente Rayleigh. El vector  $x$  solo puede tener valores de 1 o -1 por ser esos los valores que pueden tomar los componentes de  $x$ .

Relajando esa condición y permitiendo que los elementos de  $x$  puedan ser reales, se puede minimizar el cociente resolviendo la siguiente ecuación

$$(D - W)y = \lambda Dy \quad (8)$$

## Calculando la Partición Óptima VII

Esta ecuación puede convertirse en un sistema de autovalores estándar, a partir del cual es posible demostrar que el segundo menor autovector  $y_j$  minimiza el cociente planteado (Shi y Malik). Ese segundo menor autovector se puede emplear entonces para determinar que nodos van en cada grupo de la bisección, es decir en el caso de una imagen que puntos corresponden a uno de los agrupamientos.

## Algoritmo de Agrupamiento

- 1 Establecer un grafo pesado  $G = (V, E)$ , establecer el peso de las aristas, conectando 2 nodos de acuerdo a una medida de similaridad entre estos.
- 2 Resolver  $(D - W)x = \lambda Dx$  para los autovectores con los autovalores más pequeños
- 3 Usar el autovector con el segundo autovalor más pequeño para biparticionar el grafo
- 4 Decidir si la actual partición debería ser sub-dividida, y recursivamente reparticionar las partes segmentadas si es necesario

## Caso Imágenes Brillantes

- Definir el grafo pesado  $G = (V, E)$ , cada píxel es un nodo, y conectar cada píxel con una arista, el peso de las aristas debería reflejar la probabilidad de que los dos píxeles pertenecen a un objeto. Usando los valores de brillo de los píxeles y su localización espacial podemos definir un grafo pesado conectando los nodos  $i$  y  $j$  como:

$$w_{ij} = e^{-\frac{\|F^{(i)} - F^{(j)}\|_2^2}{\sigma_I}} * \begin{cases} e^{-\frac{\|X^{(i)} - X^{(j)}\|_2^2}{\sigma_X}} & \text{if } \|X^{(i)} - X^{(j)}\|_2 < r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

## Pasos 1 y 2

- 1 Resolver para los autovectores con los autovalores más pequeños

$$(D - W)x = \lambda Dx$$

- 2 El autosistema generalizado puede ser transformado en un problema estándar de autovalores

$$D^{-1/2}(D - W)D^{-1/2}x = \lambda x$$

- 3 Pero este sistema estándar toma  $O(n^3)$  operaciones,  $n$  es número de nodos

## Pero el grafo también tiene las siguientes propiedades

- 1 Los grafos son comúnmente conectados localmente y los resultados del autosistema son muy escasos
- 2 Solo pocos autovectores superiores son necesarios para particionar el grafo
- 3 El requerimiento de la precisión es baja, muchas veces solo es requerido la parte del signo correcto

Solución Lanczos explota estas características y su algoritmo tiene complejidad  $O(mn) + O(mM(n))$ , donde  $m$  es el número máximo de matriz-vector y  $M(n)$  es el costo de calcular la matriz-vector de  $Ax$ , donde  $A = D^{-1/2}(D - W)D^{-1/2}$ , notemos que la estructura de  $\mathbf{A}$  es idéntica a la matriz de pesos  $\mathbf{W}$ , así que  $\mathbf{A}$  y el calculo del matriz-vector solo toman complejidad  $O(n)$ , donde  $n$  es el número

## No se utilizan todos los nodos

- 1 El factor constante es determinado por el tamaño de la vecindad espacial de un nodo
- 2 Empíricamente podemos reducir las conexiones de cada nodo a sus vecinos por seleccionar aleatoriamente las conexiones con sus vecinos para el grafo pesado
- 3 Se puede remover el 90 % del total de las conexiones sin afectar la solución de los autovectores en el sistema
- 4 Cada matriz vector cuesta  $O(n)$ ,  $m$  depende de muchos factores, típicamente se observa que  $m$  es menor que  $(n^{1/2})$ .

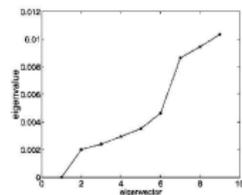
## Paso 3

- 1 Una vez que hemos calculado los autovectores, particionamos el grafo en 2 partes usando el segundo autovector más pequeño. Se busca el punto de división tal que el resultado de la partición tiene el mejor valor  $N_{cut}(A,B)$ .
- 2 La búsqueda es hecha verificando  $l$  puntos de división equitativamente espaciados y calcular el mejor corte, los valores de los autovectores son usualmente bien separados y este método de selección y división de puntos es muy fiable, incluso con un  $l$  muy pequeño

## Paso 4

- 1 El grafo está dividido en 2 partes, podemos recursivamente ejecutar el algoritmo de estas dos particiones,
- 2 Si se utilizan los demás autovectores, se terminan ignorando estos porque tienen valores ligeramente diferentes.
- 3 Se encontró que un simple umbral en la relación puede ser usada para excluir autovectores inestables, 0.06 en todos los experimentos.

# Autovectores más pequeños del sistema de autovalores generalizado



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



## N-cut Recursivo en 2 divisiones

- 1 Establecer un grafo pesado  $G = (V, E)$ , calcular los pesos de cada arista, y resumir la información en  $W$  y  $D$ .
- 2 Resolver  $(D - W)x = \lambda Dx$  para los autovectores con los autovalores más pequeños
- 3 Usar el autovector con el segundo autovalor más pequeño para biparticionar el grafo, para encontrar el punto de partición talque Ncut es maximizado
- 4 Decidir si la actual partición debería ser sub-dividida verificando la estabilidad del corte y asegurar que Ncut esta por debajo del valor especificado.
- 5 Recursivamente reparticionar las partes segmentadas si es necesario

## Experimentos

- 1 Aplicados en segmentaciones basadas en brillo, color, textura, o información de movimiento.
- 2 Se construye el grafo  $G = (V, E)$  tomando cada píxel como un nodo y se define el peso de la arista  $w_{ij}$  entre el nodo  $i$  y  $j$ , como el producto de un término de característica de similaridad y un término proximidad espacial

$$w_{ij} = e^{-\frac{\|F^{(i)} - F^{(j)}\|_2^2}{\sigma_I}} * \begin{cases} e^{-\frac{\|X^{(i)} - X^{(j)}\|_2^2}{\sigma_X}} & \text{if } \|X^{(i)} - X^{(j)}\|_2 < r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

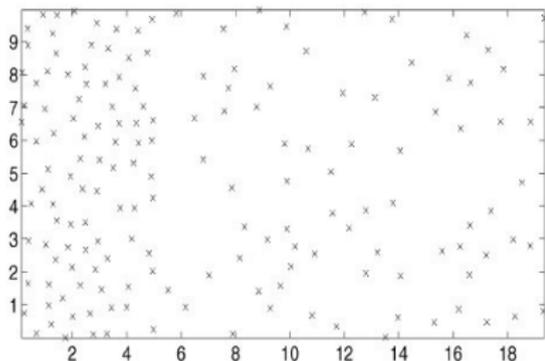
- 3 donde  $X(i)$  es la localización espacial de un nodo  $i$ , y  $F(i)$  es el vector de características basados en intensidad, color, o

## Vector de características $\mathbf{F}(i)$

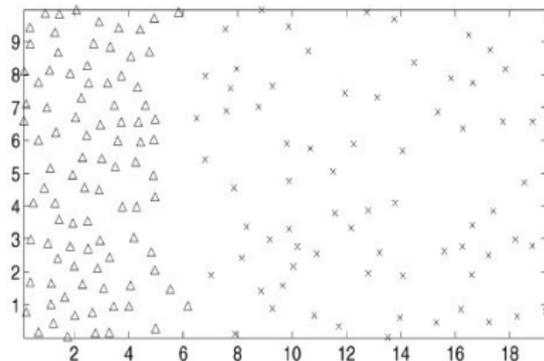
- 1  $\mathbf{F}(i) = 1$ , en caso de segmentación de conjunto de puntos
- 2  $\mathbf{F}(i) = \mathbf{I}(i)$  el valor de la intensidad, en caso de segmentación de imágenes con brillo
- 3  $\mathbf{F}(i) = [v, v * s * \sin(h), v * s * \cos(h)](i)$ , donde  $h, s, v$  son los valores HSV, para segmentación a color.
- 4  $\mathbf{F}(i) = [|\mathbf{I} * f_1|, \dots, |\mathbf{I} * f_n|](i)$ , donde  $f_i$  son los filtros DOOG con varias escalas y orientación, en caso de segmentación de textura.

## Resultado de segmentación en conjunto de puntos

- 1 El algoritmo es capaz de extraer la mayoría de los componentes de una escena mientras que ignora las pequeñas variaciones, posteriormente, se puede reparticionar recursivamente para descomponer cada pieza si así se deseara.



(a)



(b)



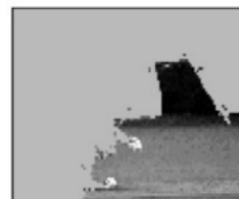
(a)



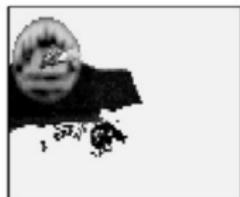
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)



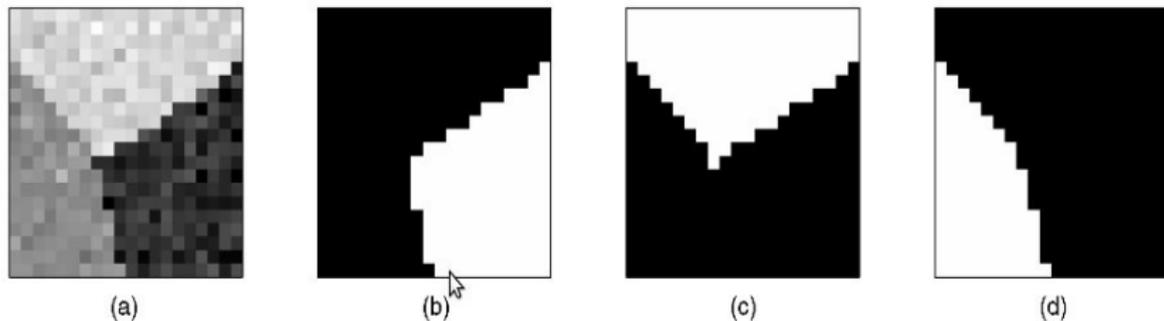
(g)



(h)

**Figura:** La Intensidad de la imagen es normalizada de entre 0 y 1, muestra los componentes de la partición con valor  $N_{cut}$  menor que 0.04

## Resultado de segmentación en imágenes con brillo



**Figura:** intensidad de la imagen varia de 0 a 1, ruido gaussiano con  $\sigma = 0.1$  es agregado

## Resultado de segmentación en imágenes con textura



(a)



(b)



(c)



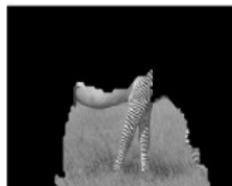
(d)



(e)



(f)



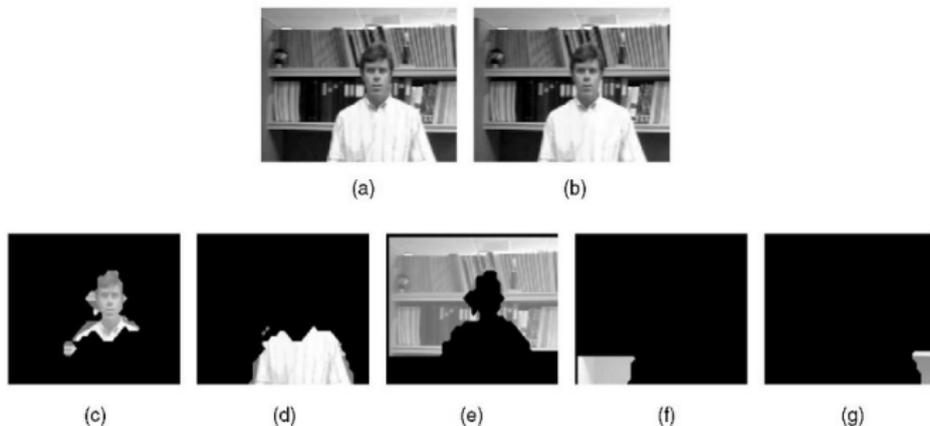
(g)



(h)

Figura: Las imágenes muestra la mayoría de los componentes. Las

## Resultado de segmentación en imágenes con movimiento



**Figura:** 2 capas de una imagen, la cabeza y el cuerpo tienen perfiles de movimiento diferentes, la cabeza tiene textura en 2D y perfil de movimiento más puntiagudo, y el cuerpo tiene perfil de movimiento más disperso

## 4.1 Tiempo de Ejecución

- 1 El tiempo de ejecución de Ncut es  $O(mn)$ , donde  $n$  es el número de píxeles y  $m$  el número de pasos que Lanczos necesita para converger
- 2 En una imagen de  $100 \times 120$ , al algoritmo le tomó cerca de 2 minutos en una máquina a 200Mhz

## Selección de pesos de las aristas del grafo

- 1 se utilizó una función exponencial de la forma de  $w(x) = e^{-(d(x)/\sigma)^2}$  para el peso de las aristas, con similaridad  $d(x)$ , el valor de  $\sigma$  es comúnmente el 10-20 % del rango total de la función de distancia  $d(x)$ .
- 2 Esta función de pesos es adecuada para imágenes típicas y espacios de características
- 3 Pero el agrupamiento podría ser de diferentes niveles y tipos de abstracción, y podría crear conflicto
- 4 Por lo tanto la función de peso podría variar de una región a otra, particularmente en imágenes texturizadas

## Relación con la Teoría Espectral de Grafos I

El método desarrollado se basa en conceptos de la teoría espectral de grafos

La idea central es usar Teoría de Matrices y Álgebra Lineal para estudiar las propiedades de la matriz de incidencia,  $W$ , y la matriz Laplaciana,  $D - W$ , del grafo y relacionarlos con varias propiedades del grafo original.

Chung propuso una definición *normalizada* de la Laplaciana, como  $D^{-1/2}(D - W)D^{-1/2}$ .

La teoría espectral provee cierta guía sobre la bondad de la aproximación del corte normalizado provisto por el segundo autovalor de la Laplaciana normalizada.

## Relación con la Teoría Espectral de Grafos II

Nuestra derivación puede ser adaptada (reemplazando la matriz  $D$  en los denominadores por la matriz identidad  $I$ ) para mostrar que el vector Fiedler es una solución de valor real para el problema del mínimo corte, el cuál podemos llamar corte promedio.

Se parece al corte normalizado, pero el corte promedio no minimiza simultáneamente la disociación sobre las particiones mientras maximiza la asociación en los grupos.

## Relación con la Teoría Espectral de Grafos III

Cuano aplicamos ambas técnicas al problema de segmentación de una imagen, encontramos que el corte normalizado produce mejores resultados en la práctica.

Área de aplicación de partición espectral: cómputo científico paralelo

El corte normalizado está también fuertemente relacionado con las propiedades clave de un Camino Aleatorio de Markov.

## Una Interpretación Física I

- Pensemos en el grafo pesado como un sistema de masa-resorte, donde:
- Los nodos del grafo son las masas físicas
- Las aristas del grafo son los resortes
- Los pesos de las aristas son el grado de rigidez de los resortes
- Y el total de pesos de aristas entrantes es la masa del nodo

## Una Interpretación Física II

- Imagine que se le da una fuerte sacudida al sistema de masa-resorte, forzando los nodos a oscilar en la dirección perpendicular al plano de la imagen.
- Los nodos que tienen conexiones de resortes fuertes entre ellos probablemente oscilarán juntos.
- Eventualmente, el grupo será sacado del plano de la imagen
- En general, el estado de equilibrio del comportamiento de los nodos puede ser descrito por su modo fundamental de oscilación y se puede demostrar que los modos fundamentales de oscilación de este sistema de masa-resorte son exactamente los autovectores generalizados del corte normalizado.

## Comparación con otros métodos I

- Corte Promedio:  $\min_{A \subset V} \frac{\text{cut}(A, V-A)}{|A|} + \frac{\text{cut}(V-A, A)}{|V-A|}$
- Análogamente, la Asociación Promedio puede ser definida como:  $\frac{\text{assoc}(A, A)}{|A|} + \frac{\text{assoc}(V-A, V-A)}{|V-A|}$
- A diferencia del caso del Corte Normalizado y Asociación Normalizada, el Corte Promedio y la Asociación Promedio no tienen una relación simple.
- Por tanto, no se puede simultáneamente minimizar la disociación sobre las particiones mientras se maximiza la asociación en los grupos.
- Los Cortes Normalizados producen mejores resultados en la práctica

## Comparación con otros métodos II

|                      |                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                            |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
|                      | ← Finding clumps                                                                     | Finding splits →                                                                                                                                                                                                         |                                                                            |
| Discrete formulation | Average association<br>$\frac{\text{asso}(A,A)}{ A } + \frac{\text{asso}(B,B)}{ B }$ | Normalized Cut<br>$\frac{\text{cut}(A,B)}{\text{asso}(A,V)} + \frac{\text{cut}(A,B)}{\text{asso}(B,V)}$ or<br>$2 - \left( \frac{\text{asso}(A,A)}{\text{asso}(A,V)} + \frac{\text{asso}(B,B)}{\text{asso}(B,V)} \right)$ | Average cut<br>$\frac{\text{cut}(A,B)}{ A } + \frac{\text{cut}(A,B)}{ B }$ |
|                      | Continuous solution                                                                  | $Wx = \bar{\lambda} x$                                                                                                                                                                                                   | $(D-W)x = \bar{\lambda} D x$<br>or<br>$Wx = (1 - \bar{\lambda}) D x$       |

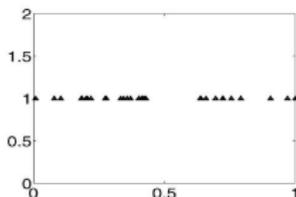
**Figura:** Relación entre corte normalizado y otras técnicas de partición basadas en autovectores. Comparado con la formulación de corte promedio y asociación promedio, el corte normalizado busca un balance entre la meta de encontrar grupos y encontrar divisiones.

## Comparación con otros métodos III

- La asociación promedio tiene un problema para encontrar clusters fuertemente cerrados - corre el riesgo de encontrar clusters pequeños y fuertemente cerrados en los datos.
- El corte promedio no toma en cuenta la similaridad del grupo - problemas cuando la disimilaridad entre los grupos no está claramente definida.

## Comparación con otros métodos IV

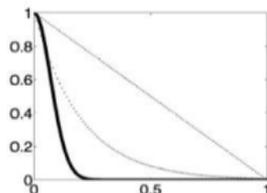
Considere 1-D puntos de datos aleatorios



- Cada punto de dato es un nodo en el grafo y la arista del grafo pesado que conecta dos puntos está definida como proporcionalmente inversa a la distancia entre dos nodos
- Conderaremos dos funciones de peso monótonicamente diferentes,  $w(i, j) = f(d(i, j))$ , definida en la función de distancia,  $d(i, j)$ , con diferente tasa de descenso.

## Comparación con otros métodos V

$$w(x) = e^{-\frac{d(x)^2}{0,1}}$$



## Comparación con otros métodos VI

- Normalized Cut

## Comparación con otros métodos VI

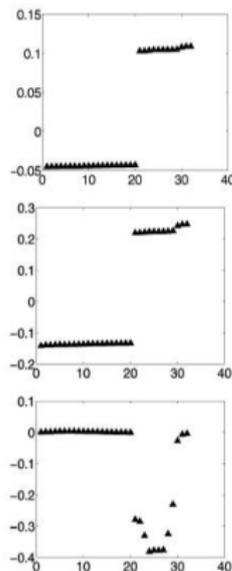
- Normalized Cut
- Average Cut

## Comparación con otros métodos VI

- Normalized Cut
- Average Cut
- Average Association

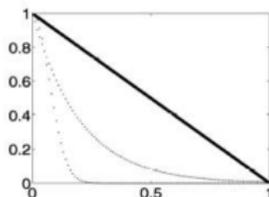
## Comparación con otros métodos VI

- Normalized Cut
- Average Cut
- Average Association



## Comparación con otros métodos VII

$$w(x) = 1 - D$$



## Comparación con otros métodos VIII

- Normalized Cut

## Comparación con otros métodos VIII

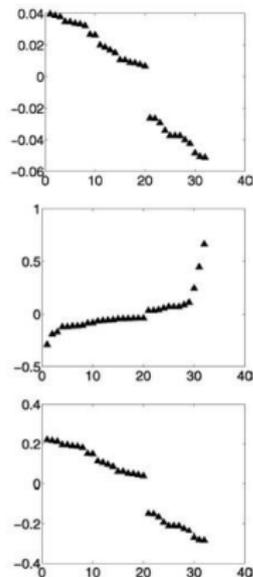
- Normalized Cut
- Average Cut

## Comparación con otros métodos VIII

- Normalized Cut
- Average Cut
- Average Association

## Comparación con otros métodos VIII

- Normalized Cut
- Average Cut
- Average Association



## Conclusiones I

- 1 Se desarrolló un algoritmo de agrupamiento basado en la vista, en que el agrupamiento perceptual debería ser un proceso que busca extraer impresiones globales de una escena y provee una descripción jerárquica.
- 2 Tratando el problema de agrupamiento como un problema de partición de grafos, se propuso Ncuts para segmentación del grafo.

## Conclusiones II

- 1 Ncut es una medida imparcial de no asociación entre subgrupos de un grafo y tiene la propiedad de que minimizando el Ncut nos lleva directamente a maximizar la asociación normalizada, el cual es una medida imparcial para la asociación total en los subgrupos y se mostró que un sistema generalizado de autovalores provee una solución real a nuestro problema.
- 2 Se aplicó a segmentaciones con brillo, color y textura, y los resultados de los experimentos son muy alentadores y satisficó la meta inicial de extraer un Gran dibujo de una escena para segmentación del grafo.

## Referencias I

-  J. Shi y J. Malik, *Normalized Cuts and Image Segmentation*
-  J. Shi y J. Malik, *Normalized Cuts and Image Segmentation*, IEEE, (2000)
-  E. A. Destéfanis, Luis R. Canali, G. Steiner, J. Sanchez, A. Buraschi, *Agrupamientos Perceptuales en Imágenes por Análisis Global*, XII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, 2007
-  J. L. Blanco, J. González, P. Sánchez, G. Ambrosio, J. A. Fdez-Madrigal, *EXTRACCIÓN DE GRUPOS PERCEPTUALES EN IMÁGENES A PARTIR DE TÉCNICAS DE PARTICIÓN ESPECTRAL DE GRAFOS*. Dpto Ingeniería

## Referencias II

-  F.R.K. Chung, *Spectral Graph Theory*, Am. Math. Soc., 1997.
-  *Spring Mass Systems*. En línea  
<http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/SpringMassMod.html>