Máquinas de Turing

INAOE

Contenido

Introducción

- Hasta ahora hemos visto clases de lenguajes relativamente simples
- Lo que vamos a ver ahora es preguntarnos qué lenguajes pueden definirse por cualquier equipo computacional
- Vamos a ver qué pueden hacer las computadoras y los problemas que no pueden resolver, a los que llamaremos *indecidibles*

Introducción

- Por ejemplo, podemos pensar en un programa de computadora que imprima "hola" cuando encuentre un entero positivo $n > 2$, que cumpla: $x^n + y^n = z^n$, para x, y y z enteros positivos
- La solución entera de la ecuación de arriba se conoce como el último teorema de Fermat, que llevo a los matemáticos 300 años resolver
- El poder analizar cualquier programa de computadora y decidir si va a imprimir un letrero como "hola" es en general indecidible
- Lo que nos gustaría es tener una teoría de indecibilidad basada en un modelo computacional sencillo (i.e., Máquina de Turing)

Máquinas de Turing

- El propósito de la teoría de indecibilidad no es sólo establecer cuales problemas son indecidibles, sino también dar una guía sobre qué es lo que se puede hacer o no con programación
- También tiene que ver con problemas, que aunque sean decidibles, son intratables
- A finales del s. XIX y principios del s. XX, D. Hilbert lanzó la pregunta abierta, si era posible encontrar un algoritmo que determinara el valor de verdad de una fórmula en lógica de primer orden aplicada a los enteros.

Máquinas de Turing

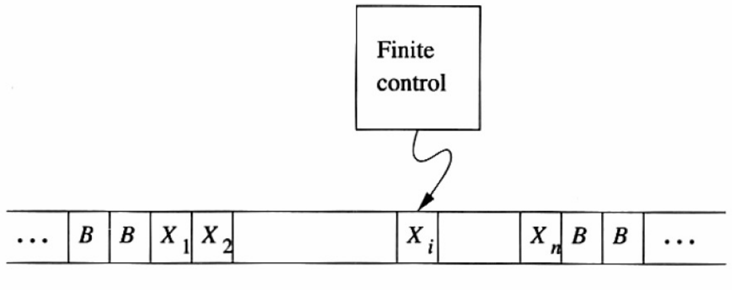
- En 1931, K. Gödel probó su teorema de incompletes para probar que no se podía construir dicho algoritmo.
- En 1936, A. Turing publicó su máquina de Turing como un modelo para cualquier tipo de computación (aunque todavía no existían las computadoras)
- La hipótesis de Church o la tésis de Church-Turing dice que lo que las máquinas de Turing (y para tal caso las computadoras modernas) pueden computar son las funciones recursivamente enumerables

Máquinas de Turing

- Una máquina de Turing consiste de un control finito que puede estar en cualquier estado de un conjunto finito de estados.
- Se tiene una cinta dividida en celdas, cada celda con un símbolo.
- Inicialmente, la entrada (cadena finita de símbolos del alfabeto) se coloca en la cinta, el resto de las celdas tienen el símbolo especial vacío.
- La cabeza de la cinta está siempre sobre una celda y al principio está sobre la celda más a la izquierda con el primer símbolo de la cadena de entrada.

Máquina de Turing

- Un movimiento o transición puede cambiar de estado (o quedarse en el estado actual), escribir un símbolo (reemplazando el símbolo que existía o dejando el mismo) y mover la cabeza a la izquierda o derecha.



Introducción

Formalmente, una máquina de Turing es una séptupla: $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q0, B, F)$, donde:

- Q: es un conjunto finito de estados
- Σ: es un conjunto finito de símbolos de entrada
- Γ: es el conjunto de símbolos de la cinta ($\Sigma \subset \Gamma$)
- δ: la función de transición $\delta(q, X) = (p, Y, D)$, donde p es el siguiente estado en Q, Y es el símbolo en Γ que se escribe en la celda que está viendo la cabeza de la cinta y D es la dirección (izq. o der.).
- q_0: es el estado inicial
- B: es el símbolo de vacío, que está en Γ pero no en Σ
- F: es el conjunto de estados finales o de aceptación.

Introducción
Máquina de Turing
Máquinas de Turing restringidas
Máquinas de Turing y Computadoras

Descripciones Instantáneas

- Como la cinta es infinita, se representan sólo los símbolos entre los B's (a veces se pueden incluir algunos B's) y se incluye un símbolo especial para indicar la posición de la cabeza.
- Por ejemplo: $X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n$ representa un ID donde:
  - q es el estado de la máquina de Turing
  - La cabeza de la cinta está viendo el i-ésimo símbolo a la izquierda
  - $X_1 X_2 \ldots X_n$ es el pedazo de cinta entre los símbolos más a la izquierda y más a la derecha que no son vacíos.

Descripciones Instantáneas

- Usamos la misma notación de ID que para los PDAs: $\vdash$ y $\overset{*}{\vdash}$.
- Supongamos que $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, el siguiente movimiento es a la izquierda (L). Entonces:

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n \vdash X_1 X_2 \ldots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \ldots X_n$$

Excepciones

1. Si $i = 1$ entonces M se mueve al B a la izquierda de X_1 : $qX_1X_2 \ldots X_n \vdash pBYX_2 \ldots X_n$
2. Si $i = n$ y $Y = B$, entonces X_n se une a la cadena infinita de B's y no se escribe: $X_1X_2 \ldots X_{n-1}qX_n \vdash X_1X_2 \ldots X_{n-2}pX_{n-1}$

Excepciones

Ahora, supongamos que $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, movimiento hacia la derecha (R):
$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \ldots X_n \vdash X_1 X_2 \ldots X_{i-1} Y p X_{i+1} \ldots X_n$
Excepciones:

1. Si $i = n$ entonces la $i + 1$ celda tiene un B que no era parte de la ID anterior:
   $X_1 X_2 \ldots X_{n-1} q X_n \vdash X_1 X_2 \ldots X_{n-1} Y p B$
2. Si $i = 1$ y $Y = B$, entonces X_1 se une a la cadena infinita de B's y no se escribe: $q X_1 X_2 \ldots X_n \vdash p X_2 \ldots X_n$

Ejemplo

- Una TM que acepta: $\{0^n 1^n | n \geq 1\}$
- La podemos definir como: $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$
- Con la siguiente tabla de transición:

	Símbolo				
Estado	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, R)	$-$	$-$	(q_3, Y, R)	$-$
q_1	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	$-$	(q_1, Y, R)	$-$
q_2	$(q_2, 0, L)$	$-$	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)	$-$
q_3	$-$	$-$	$-$	(q_3, Y, R)	(q_4, B, R)
q_4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Ejemplo

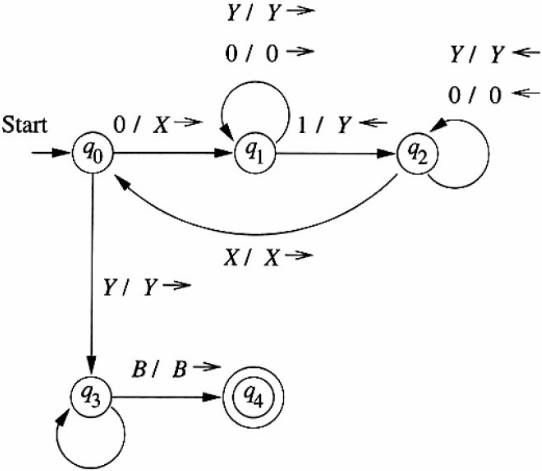
- Por ejemplo, si le damos la entrada 0011 sigue las siguientes transiciones: $q_0 0011 \vdash Xq_1 011 \vdash X0q_1 11 \vdash Xq_2 0Y1 \vdash q_2 X0Y1 \vdash Xq_0 0Y1 \vdash XXq_1 Y1 \vdash XXYq_1 1 \vdash XXq_2 YY \vdash Xq_2 XYY \vdash XXq_0 YY \vdash XXYq_3 Y \vdash XXYYq_3 B \vdash XXYYBq_4 B$
- Mientras que para la cadena 0010, tenemos lo siguiente: $q_0 0010 \vdash Xq_1 010 \vdash X0q_1 10 \vdash Xq_2 0Y0 \vdash q_2 X0Y0 \vdash Xq_0 0Y0 \vdash XXq_1 Y0 \vdash XXYq_1 0 \vdash XXY0q_1 B$

Diagramas de Transición para TMs

- En un diagrama de transición para TMs los nodos son los estados y los arcos tienen etiquetas de la forma X/YD donde X y Y son símbolos de la cinta y D es la dirección.
- Para cada $\delta(q, X) = (p, Y, D)$, tenemos un arco con etiqueta: X/YD que va del nodo q al nodo p.
- Lo único que falta es el símbolo vacío que suponemos que es B.

Ejemplo

Por ejemplo, el diagrama de transición para la TM anterior es:



Ejemplo

- Diseñar una TM que calcula la función $\dot{-}$ llamada *monus* o substracción propia, que se define como: $m \dot{-} n = max(m - n, 0)$.
- La siguiente tabla y diagrama de transición lo definen, con entrada 0^m10^n:

	Símbolo		
Estado	0	1	B
q_0	(q_1, B, R)	(q_5, B, R)	–
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	–
q_2	$(q_3, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$	(q_4, B, L)
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	(q_0, B, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	(q_4, B, L)	$(q_6, 0, R)$
q_5	(q_5, B, R)	(q_5, B, R)	(q_6, B, R)
q_6	–	–	–

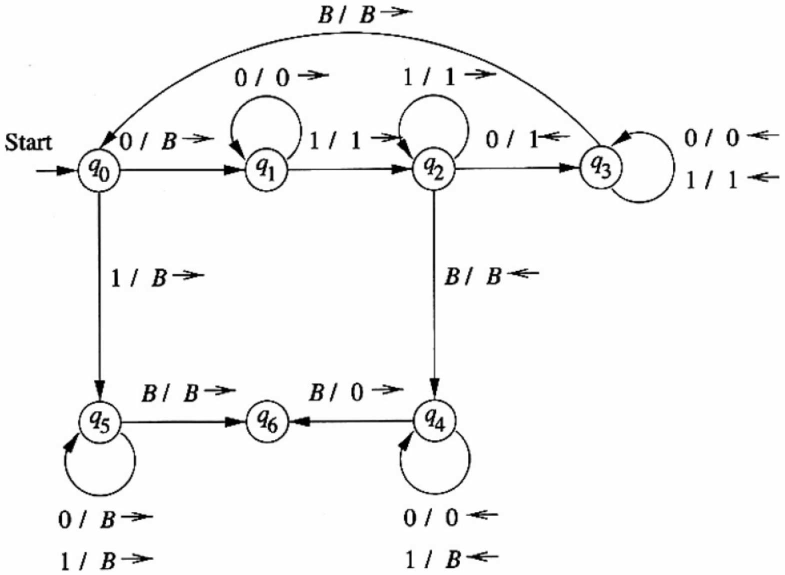
Introducción

Máquina de Turing

Máquinas de Turing restringidas

Máquinas de Turing y Computadoras

Diagrama de Transición



Lenguaje de una TM

- El lenguaje que aceptan las TMs es el conjunto de cadenas $w \in \Sigma*$ tales que $q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha p \beta$ para un estado p en F y cualesquiera cadenas en la cinta α y β.
- Los lenguajes que aceptan las TMs se llama lenguajes *recursivamente enumerables* o lenguajes RE.

Halting

- Otra forma de aceptar cadenas usado normalmente en las TMs es aceptar por paro (*halting*).
- Decimos que una TM se para (*halts*) si entra a un estado q leyendo el símbolo de la cinta X y no existe ningún movimiento, i.e., $\delta(q, X)$ no está definido.
- Por ejemplo la máquina de Turing que calcula $\dot{-}$, se para (*halts*) con todas las cadenas de 0's y 1's ya que eventualmente alcanza el estado q_6.
- Suponemos que una TM siempre se para en un estado de aceptación

Ejercicios

- Muestre las IDs para la TM que acepta $\{0^n1^n|n \geq 1\}$ de las cadenas: (i) 00 y (ii) 000111
- Diseñe una TM que acepte: (i) todas las cadenas con el mismo número de 0's que de 1's y (ii) que acepte $\{a^nb^nc^n|n \geq 1\}$

Extensiones a TMs

- Una TM es tan poderosa como una computadora convencional.
- Se pueden realizar varias extensiones a una TM que permiten hacer especificaciones más simples, aunque no aumentan su expresividad (reconocen los mismos lenguajes).

Extenciones

- Podemos usar el control finito de una TM no sólo para indicar la posición actual, sino también para almacenar una cantidad finita de datos.
- No se extiende el modelo, lo que hacemos es que pensamos en el estado como una tupla.
- Por ejemplo, si queremos aceptar $01^* + 10^*$ podemos almacenar el primer elemento que se lee y asegurarnos que ese elemento no aparezca en el resto de la cadena.

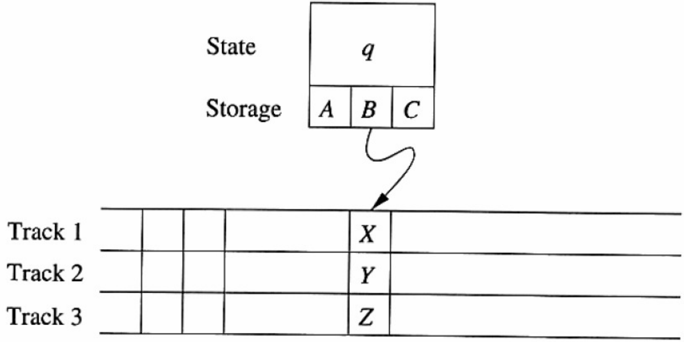
Extensiones

- El $M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, [q_0, B], \{[q_1, B]\})$
- Su función de transición es:
  $\delta([q_0, B], a) = ([q_1, a], a, R)$ para $a = 0$ o $a = 1$.
  $\delta([q_1, a], ca) = ([q_1, a], ca, R)$ donde ca es el complemento de a. Si $a = 0$ entonces $ca = 1$, y viceversa.
  $\delta([q_1, a], B) = ([q_1, B], B, R)$ para $a = 0$ o $a = 1$, llegando al estado de aceptación: $[q_1, B]$.

Tracks múltiples

- Otro truco es pensar que tenemos varios caminos paralelos.
- Cada una tiene un símbolo y el alfabeto de la cinta de la TM es una tupla con un componente por cada camino.
- El siguiente dibujo ilustra una TM con almacenamiento de información en el control y con caminos múltiples

Tracks múltiples



Tracks múltiples

- Un uso común de esto es usar un camino para guardar información y otro para guardar una marca.
- Por ejemplo, si queremos reconocer: $L_{wcw} = \{wcw | w \in (0+1)^+\}$
- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, [q_1, B], [B, B], \{[q_9, B]\})$
  - Q: el conjunto de estados en $\{q_0, q_1, \ldots, q_9\} \times \{0, 1, B\}$, osea pares que tienen un estado de control (q_i) y un componente de dato (0, 1 o *blank*).
  - Γ: los símbolos de la cinta son $\{B, *\} \times \{0, 1, c, B\}$, donde el primer componente es vacío (*blank*) o $*$ (para marcar símbolos del primer y segundo grupo de 0's y 1's).
  - Σ: los símbolos de entrada son $[B, 0]$ y $[B, 1]$.
  - δ: la función de transición es (donde a y b pueden ser 0 o 1):

Tracks múltiples

Introducción
Máquina de Turing
Máquinas de Turing restringidas
Máquinas de Turing y Computadoras

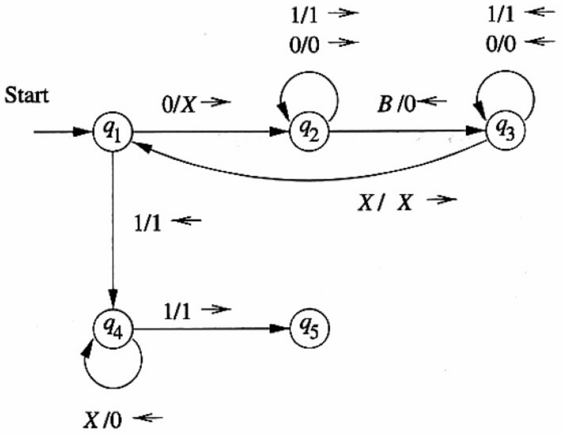
1. $\delta([q_1, B], [B, a]) = ([q_2, a], [*, a], R)$
2. $\delta([q_2, a], [B, b]) = ([q_2, a], [B, b], R)$
3. $\delta([q_2, a], [B, c]) = ([q_3, a], [B, c], R)$
4. $\delta([q_3, a], [*, b]) = ([q_3, a], [*, b], R)$
5. $\delta([q_3, a], [B, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$
6. $\delta([q_4, B], [*, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$
7. $\delta([q_4, B], [B, c]) = ([q_5, B], [B, c], L)$
8. $\delta([q_5, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$
9. $\delta([q_6, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$
10. $\delta([q_6, B], [*, a]) = ([q_1, B], [*, a], R)$
11. $\delta([q_5, B], [*, a]) = ([q_7, B], [*, a], R)$
12. $\delta([q_7, B], [B, c]) = ([q_8, B], [B, c], R)$
13. $\delta([q_8, B], [*, a]) = ([q_8, B], [*, a], R)$
14. $\delta([q_8, B], [B, B]) = ([q_9, B], [B, B], R)$

Subrutinas

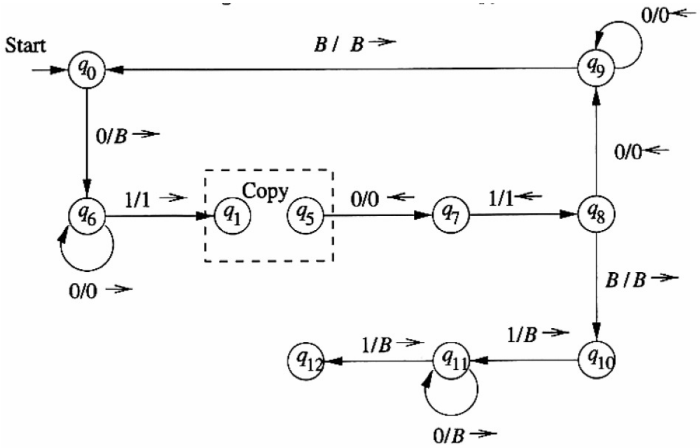
- Una subrutina de una TM es un conjunto de estados que realiza algún proceso útil.
- Su llamado ocurre cuando se hace una transición a su estado inicial.
- Si se requiere "llamar" varias veces desde diferentes estados, se tienen que hacer varias copias con estados diferentes.
- Por ejemplo, la siguiente TM implementa la multiplicación, y empieza con una cadena 0^m10^n1 en su cinta y termina con la cadena 0^{mn} en la cinta.
- El núcleo es una subrutina llamada *Copia* que copia un bloque de 0's al final.
- Copia convierte una ID de forma $0^{m-k}1q_10^n10^{(k-1)n}$ a la siguiente ID $0^{m-k}1q_50^n10^{kn}$.

Subrutinas

Las siguientes figuras ilustran la subrutina *Copia* y la TM completa para multiplicación:



Subrutinas

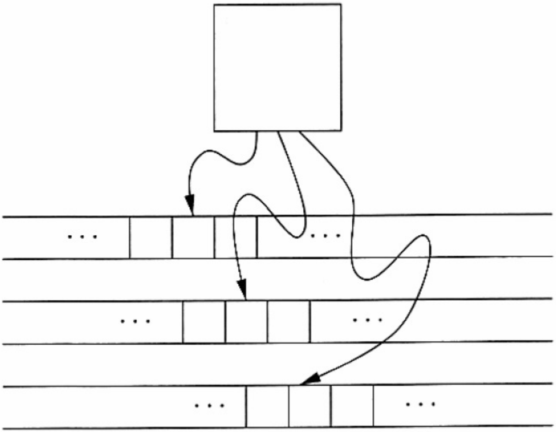

Start
q_0
$B / B \rightarrow$
q_9
$0/0 \leftarrow$
$0/B \rightarrow$
$0/0 \leftarrow$
Copy
q_6
$1/1 \rightarrow$
q_1
q_5
$0/0 \leftarrow$
q_7
$1/1 \leftarrow$
q_8
$0/0 \rightarrow$
$B / B \rightarrow$
$1/B \rightarrow$
q_{12}
$1/B \rightarrow$
q_{11}
q_{10}
$0/B \rightarrow$

TM con múltiples cintas

- Tiene un número finito de cintas.
- En el estado inicial los símbolos de entrada son colocados en la primera cinta y la cabeza del resto de las cintas en un *B* arbitrario.
- En un movimiento, el control entra a un nuevo estado y en cada cinta se escribe un símbolo en la celda que está leyendo, cada cabeza de cada cinta hace un movimiento que puede ser a la izquierda, derecha o quedarse donde está.
- Las TM con cintas múltiples aceptan entrando a un estado de aceptación.

Introducción
Máquina de Turing
Máquinas de Turing restringidas
Máquinas de Turing y Computadoras

TM con múltiples cintas



TM con múltiples cintas

- Se puede demostrar que todo lenguaje aceptado por una TM con múltiples cintas es recursivamente enumerable.
- Básicamente para una TM con k cintas se simula una TM de una cinta con $2k$ caminos, donde la mitad de los caminos guardan el contenido de las cintas y la otra mitad guardan una marca que indica la posición de las cabezas de cada cinta.

TM no determinista

- En una TM no determinista (NTM) la función de transición es ahora un conjunto de tripletas y puede seleccionar cualquier elemento de ese conjunto en cada transición.
- $\delta(q, X) = \{(q_1, Y_1, D_1), (q_2, Y_2, D_2), \ldots, (q_k, Y_k, D_k)\}$
- Una NTM acepta una cadena *w* si existe una secuencia de selecciones de movimientos que nos llevan a un ID con un estado de aceptación.
- De nuevo se puede probar que para cada NTM existe una TM (determinista).
- Básicamente se siguen las “m” posibles opciones en cada movimiento siguiendo un esquema tipo *breadth-first*.

Máquinas de Turing Restringidas

- Se pueden imponer ciertas restricciones a la TM y de todos modos mostrar que aceptan el mismo lenguaje.

TM con cinta semi-infinita

- La cinta es infinita en un sentido, la cadena de entrada se coloca al principio de la cinta la cual no continua a la izquierda.
- También se incluye la restricción de no poder escribir B (*blank*) en la cinta.
- Se puede demostrar que un TM normal se puede simular con una TM semi-infinita usando dos caminos, uno que simula la cinta a la izquierda de la cadena de entrada y otro que simula la otra parte de la cinta.

TM con cinta semi-infinita

X_0	X_1	X_2	$\dots$
$*$	X_{-1}	X_{-2}	$\dots$

- Los estados en la TM semi-infinita son los que tiene la TM original junto con U o L para representar arriba (U) o abajo (L), además de un par de estados para preparar la TM semi-infinita.

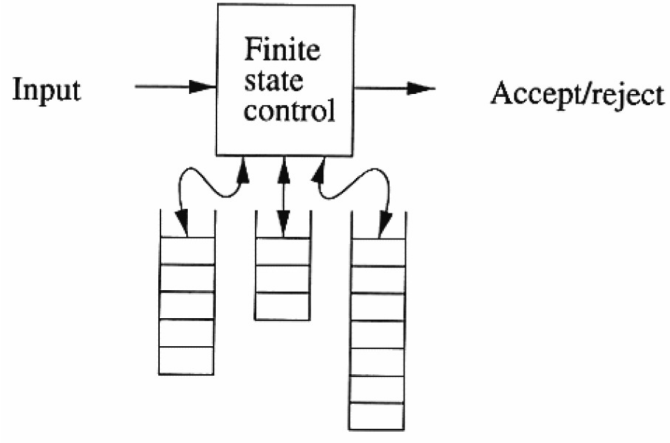
TM con cinta semi-infinita

- Las transiciones en la cinta de arriba son iguales a las de la TM original, y las de abajo son contrarias (si la TM original se mueve a la derecha, la TM semi-infinita inferior se mueve a la izquierda y al revés, si se mueve a la izquierda la TM original la otra se mueve a la derecha).
- Sólo se tiene que tener cuidado en las situaciones en donde se cambia de un camino al otro.

Introducción
Máquina de Turing
Máquinas de Turing restringidas
Máquinas de Turing y Computadoras

Máquinas multistack

- Podemos pensar en una generalización de los PDAs cuando consideramos varios *stacks*.



Máquinas multistack

- Una máquina de *k-stacks* es un PDA determinista con *k stacks*.
- Un movimiento en esta máquina, cambia el estado y reemplaza el símbolo de arriba de cada *stack* con una cadena normalmente diferente para cada *stack*.
- La transición sería: $\delta(q, a, X_1, X_2, \ldots, X_k) = (p, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$.
- Donde en estado q con X_i hasta arriba de cada uno de los $i = 1, 2, \ldots, k$ *stacks*, se consume el símbolo a y se reemplaza cada X_i por γ_i.

Máquinas multistack

- Se puede demostrar que un PDA con 2 *stacks* puede simular una TM.
- En la demostración se supone que al final de la cadena de entrada existe un símbolo especial que no es parte de la entrada.
- Lo primero que se hace es que se copia la cadena al primer *stack*, se hace *pop* de este *stack* y *push* en el segundo *stack*, con esto el primer elemento de la cadena de entrada está hasta arriba del segundo *stack*, y luego se empiezan a simular las transiciones de estados.

Máquinas multistack

- El primer *stack* vacío nos representa todos los *blanks* a la izquierda de la cadena de entrada y en general lo que está a la izquierda de donde apunta la cabeza de la cinta de la TM.
- Si TM reemplaza X por Y y se mueve a la derecha, PDA introduce (*pushes*) Y en el primer *stack* y saca (*pops*) X del segundo 'emphstack.
- Si TM reemplaza X por Y y se mueve a la izquierda, PDA saca (*pops*) el primer elemento del primer *stack* (digamos Z) y reemplaza X por ZY en el segundo *stack*.

Máquinas contadoras (*counter machines*)

- Una máquina contadora tiene la misma estructura que una máquina *multistack*, sólo que en lugar de *stacks* tiene contadores.
- Un contador tiene algún entero positivo y sólo puede distinguir entre 0 (cero) o un contador diferente de cero.
- En cada movimiento, cambia de estado y suma o resta 1 del contador que no puede volverse negativo).

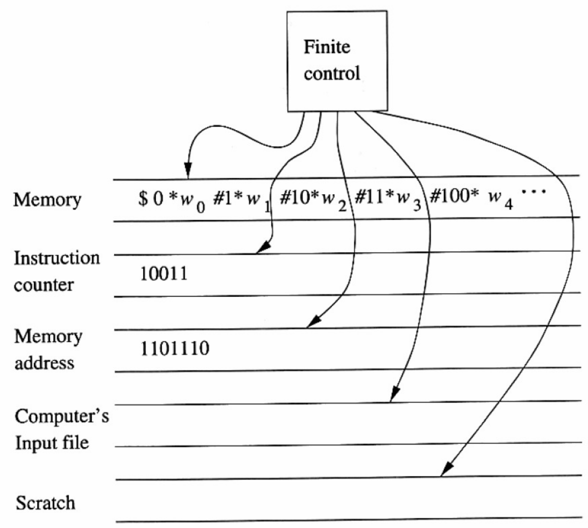
Máquinas contadoras

- También podemos verlo como una máquina *multistack* restringida que tiene dos símbolos de stack Z_0 (marca el fondo) y X.
- El tener $X_i Z_0$ nos identifica al contador i.
- Se puede demostrar que los lenguajes aceptados por una máquina de un contador son los CFL.
- Se puede demostrar que cualquier lenguaje recursivamente enumerable puede ser aceptado por una máquina de dos contadores.

Máquinas de Turing y Computadoras

- Una computadora puede simular una máquina de Turing.
- Aunque con un número muy grande de símbolos y cadenas en principio infinitas, se podrían tener problemas de memoria, se puede codificar la TM (TM universal) y simular en una computadora convencional sin problemas de memoria.
- Una TM puede simular una computadora usando varias cintas para tomar en cuenta los diferentes procesos que se realizan en una computadora (para representar la memoria de la computadora, la siguiente instrucción a realizar, si se requiere copiar cierto contenido de la memoria, cambiarlo, etc.).

Máquinas de Turing y Computadoras



Máquinas de Turing y Computadoras

- Se puede demostrar que si una computadora tiene sólo instrucciones que incrementan la longitud del tamaño de las palabras en 1 y las instrucciones de tamaño w se pueden realizar en una TM con cintas múltiples en $O(k^2)$ pasos, entonces una TM parecida a la mostrada arriba pueden simular n pasos de la computadora en $O(n^3)$ pasos.