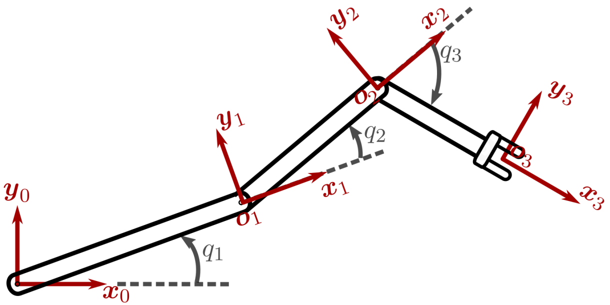
Herramientas Teóricas y Manipulación

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles
Dr. José Martínez Carranza

alejandro.giles@inaoep.mx, carranza@inaoep.mx

ccc.inaoep.mx/∼carranza/introb.html

Sistemas coordenados



- Sistemas coordenados:
  - ortonormales
  - dextrógiros

Rotaciones en 2D

- La matriz

$$^{0}\boldsymbol{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$

  es conocida como **matriz de rotación**, del sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$ en función del ángulo θ.

- El operador para realizar esta operación es el **producto punto**, que en el espacio Cartesiano está dado por

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos(\angle \mathrm{ab}) \,, \tag{2}$$

  donde $\angle$ab es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Rotaciones en 3D

- Una matriz de rotación en 2D se puede escribir como

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 \end{bmatrix} . \tag{3} $$

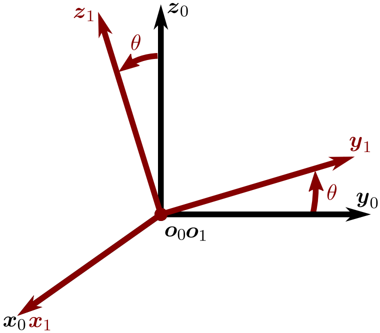
- Se puede generalizar el resultado anterior para el espacio Cartesiano en 3D como

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{y}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 \cdot \boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} . \tag{4} $$

- Nótese que cada columna corresponde a las componentes de cada vector unitario del sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_1$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ y viceversa, cada renglón de esta matriz representa las componentes de los vectores del sistema $\boldsymbol{o}_0\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{z}_1$.

Matrices de rotación básicas

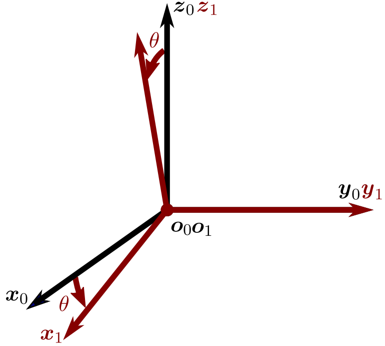
- Rotación básica sobre el eje x.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Matrices de rotación básicas

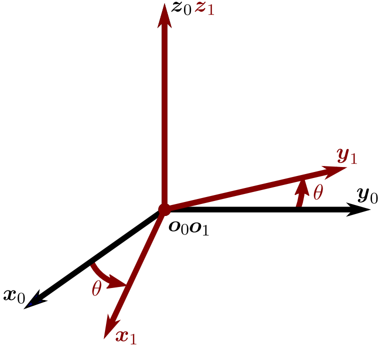
- Rotación básica sobre el eje y.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Matrices de rotación básicas

- Rotación básica sobre el eje z.



$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Propiedades de las Rotaciones

- El conjunto de las matrices de rotación forma el **Grupo Especial Ortonormal de orden 3** y se denota como $\boldsymbol{SO}(3)$.
- Un elemento de este grupo $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$ cumple con las siguiente propiedades:
  - Es **cerrado con respecto a la multiplicación matricial**.
  - Se cumple que $\det(\boldsymbol{R}) = 1$, para la representación de sistemas coordenados dextrógiros[1].
  - Su matriz inversa es igual a su transpuesta, i.e.

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,. \tag{8}$$

[1] Si se permite representar también sistemas levógiros, entonces $\det(\boldsymbol{R}) \pm 1$ y se conoce simplemente como Grupo Ortonormal de orden 3.

Propiedades de las Rotaciones

- Lo anterior implica que

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}\,. \tag{9}$$

- Si una matriz de rotación relaciona dos sistemas coordenados, como ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$, entonces sus columnas representan a los vectores que forman el sistema coordenado $\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{b}}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{a}}$.

- De la misma forma, los renglones de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$ representan los vectores que definen al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{a}}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{y}_{\mathrm{b}}\boldsymbol{z}_{\mathrm{b}}$.

Propiedades de las Rotaciones

- Las propiedades anteriores implican que:
  - Sus columnas (renglones) tienen norma unitaria.
  - Sus columnas (renglones) son mutuamente ortogonales, i.e. su producto punto siempre es cero.
  - Reglas de composición: una rotación sobre el sistema actual **postmultiplica** la ecuación, mientras que una rotación sobre el sistema fijo **premultiplica** la ecuación.

Parametrización de rotaciones

- **Proposición [ángulos de Euler]:** Cualquier matriz de rotación arbitraria $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$ se puede obtener como una composición de tres rotaciones básicas, mientras no se realicen dos rotaciones consecutivas sobre el mismo eje.

- Existen doce posibles composiciones de matrices básicas de rotación sobre los ejes coordenados x, y y z, i.e. XYX, XYZ, XZX, XZY, YXY, YXZ, YZX, YZY, ZXY, ZXZ, ZYX y ZYZ.

- Las más utilizadas en robótica son las últimas dos, i.e. ZYX que se conoce como **Roll-Pitch-Yaw** y ZYZ que se conoce como **ángulos de Euler**.

Ángulos de Euler

- El problema se puede enunciar como sigue: dada una matriz $\boldsymbol{R} \in \boldsymbol{SO}(3)$, cuyos componentes son

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} , \tag{10}$$

encontrar los ángulos ϕ, θ y ψ, tales que

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\phi} \boldsymbol{R}_{\mathrm{y},\theta} \boldsymbol{R}_{\mathrm{z},\psi} \, . \tag{11}$$

- Desarrollando el lado derecho se tiene

$$\begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \, . \end{bmatrix} \tag{12}$$

$c_\theta = \cos(\theta)$, $s_\theta = \sin(\theta)$.

Ángulos de Euler

- Igualando (10) y (12) se obtienen 9 ecuaciones algebraicas no lineales con tres incógnitas (ϕ, θ y ψ).
- En este curso se utilizará únicamente la función $atan2(y,x)$ que calcula el ángulo correspondiente al cuadrante en el que se encuentra el vector de posición con coordenadas (x,y).
- La función $atan2(y,x)$ está definido para casi todo el plano Cartesiano, con excepción del punto $(0,0)$.
- La ecuación más sencilla de resolver es la del elemento r_{33}, i.e. $c_\theta = r_{33}$. Utilizando la función $atan2$ y la conocida identidad trigonométrica $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, se obtiene la solución para θ

$$\theta = \mathrm{atan2}(\pm\sqrt{1-r_{33}^2}, r_{33})\,. \tag{13}$$

Ángulos de Euler

1 En el caso $r_{33} \neq \pm 1$ se tiene $s_\theta \neq 0$ y se pueden utilizar los elementos r_{13}, r_{23}, r_{31} y r_{32} para obtener ϕ y ψ. En este caso existen dos soluciones, dependiendo del signo que se elija en (13), que a su vez es el signo de θ.

1.1 Si se elige $\theta > 0$

$$\phi = \mathrm{atan2}(r_{23}, r_{13}) \tag{14}$$
$$\psi = \mathrm{atan2}(r_{32}, -r_{31})\,. \tag{15}$$

1.2 Si se elige $\theta < 0$

$$\phi = \mathrm{atan2}(-r_{23}, -r_{13}) \tag{16}$$
$$\psi = \mathrm{atan2}(-r_{32}, r_{31})\,. \tag{17}$$

Ángulos de Euler

2 En el caso $r_{33} = \pm 1$ se tiene un caso singular, ya que $s_\theta = 0$ y no se pueden utilizar los elementos r_{13}, r_{23}, r_{31} y r_{32} para obtener ϕ y ψ. De nuevo se consideran dos casos.

2.1 Si $r_{33} = 1$, entonces $c_\theta = 1$ y sustituyendo en (12) se tiene

$$c_\phi c_\psi - s_\phi s_\psi = r_{11} \tag{18}$$
$$s_\phi c_\psi + c_\phi s_\psi = r_{21}\,. \tag{19}$$

Utilizando las identidades

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

se tiene

$$\cos(\phi + \psi) = r_{11} \tag{20}$$
$$\sin(\phi + \psi) = r_{21}\,. \tag{21}$$

Ángulos de Euler

Por lo tanto, existen soluciones infinitas y sólo se puede determinar la suma, i.e.

$$\phi + \psi = \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11})\,. \tag{22}$$

2.2 Por último, si $r_{33} = -1$, entonces $c_\theta = -1$, sustituyendo en (12) y utilizando las identidades anteriores, se tiene

$$-\cos(\phi - \psi) = r_{11} \tag{23}$$

$$-\sin(\phi - \psi) = r_{21}\,, \tag{24}$$

por lo que sólo se puede determinar la resta

$$\phi - \psi = \operatorname{atan2}(-r_{21}, -r_{11})\,. \tag{25}$$

Nota: una práctica común tanto en el caso 2.1 como en el 2.2 es elegir uno de los ángulos ϕ o ψ igual a cero y entonces el otro queda automáticamente determinado.

Roll-Pitch-Yaw

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}_{z,\psi}\boldsymbol{R}_{y,\theta}\boldsymbol{R}_{x,\phi} \,. \tag{26}$$

1 Si $r_{31} \neq \pm 1$

$$\theta = \text{atan2}\left(-r31, \pm\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2} \right) . \tag{27}$$

1.1 Si se elige $-\pi/2 < \theta < \pi/2$

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \tag{28}$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \,. \tag{29}$$

1.2 Si se elige $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$

$$\phi = \text{atan2}(-r_{21}, -r_{11}) \tag{30}$$

$$\psi = \text{atan2}(-r_{32}, -r_{33}) \,. \tag{31}$$

Eje-Ángulo

- Dado un vector $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_x & r_y & r_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ y un ángulo θ, se puede obtener

$$\boldsymbol{R}(\theta, \boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_x r_y(1-c_\theta)-r_z s_\theta & r_x r_z(1-c_\theta)+r_y s_\theta \\ r_x r_y(1-c_\theta)+r_z s_\theta & r_y^2(1-c_\theta)+c_\theta & r_y r_z(1-c_\theta)-r_x s_\theta \\ r_x r_z(1-c_\theta)-r_y s_\theta & r_y r_z(1-c_\theta)+r_x s_\theta & r_z^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{bmatrix} \tag{32}$$

- Se cumple la propiedad

$$\boldsymbol{R}(-\theta, -\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{R}(\theta, \boldsymbol{r})\,. \tag{33}$$

Eje-Ángulo

- Problema inverso, dada $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$, entonces

$$\theta = \operatorname{acos}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Cuaterniones Unitarios

- Parte escalar q_{w} y parte vectorial $\boldsymbol{q}_{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} q_{\mathrm{x}} & q_{\mathrm{y}} & q_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{r}} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{r} \tag{36}$$

$$q_{\mathrm{w}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{37}$$

  donde $\boldsymbol{r}$ y θ son los mismos que para Eje-Ángulo.

- Los componentes del cuaternión satisfacen

$$q_{\mathrm{x}}^2 + q_{\mathrm{y}}^2 + q_{\mathrm{z}}^2 + q_{\mathrm{w}}^2 = 1\,.$$

Cuaterniones Unitarios

- Dado un cuaternión $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_{\mathrm{x}} & q_{\mathrm{y}} & q_{\mathrm{z}} & q_{\mathrm{w}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, se puede calcular la matriz de rotación

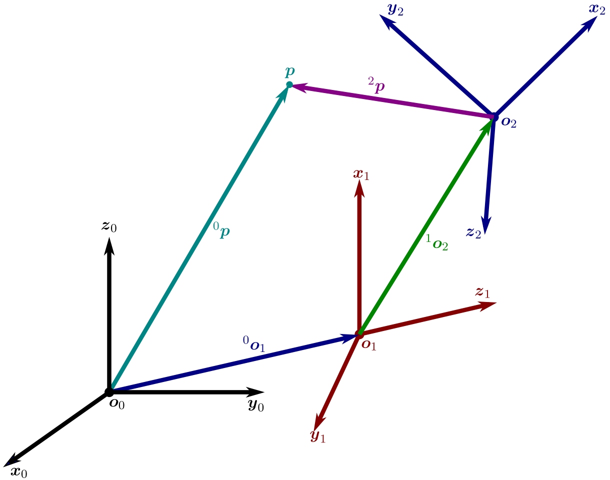
$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2\left(q_{\mathrm{x}}^2 + q_{\mathrm{w}}^2\right) - 1 & 2\left(q_{\mathrm{x}} q_{\mathrm{y}} - q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{z}}\right) & 2\left(q_{\mathrm{x}} q_{\mathrm{z}} + q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{y}}\right) \\ 2\left(q_{\mathrm{x}} q_{\mathrm{y}} + q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{z}}\right) & 2\left(q_{\mathrm{y}}^2 + q_{\mathrm{w}}^2\right) - 1 & 2\left(q_{\mathrm{y}} q_{\mathrm{z}} - q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{x}}\right) \\ 2\left(q_{\mathrm{x}} q_{\mathrm{z}} - q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{y}}\right) & 2\left(q_{\mathrm{y}} q_{\mathrm{z}} + q_{\mathrm{w}} q_{\mathrm{x}}\right) & 2\left(q_{\mathrm{z}}^2 + q_{\mathrm{w}}^2\right) - 1 \end{bmatrix}$$

- Problema inverso

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(r_{32} - r_{23})\sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1} \\ \operatorname{sign}(r_{13} - r_{31})\sqrt{r_{22} - r_{33} - r_{11} + 1} \\ \operatorname{sign}(r_{21} - r_{12})\sqrt{r_{33} - r_{11} - r_{22} + 1} \end{bmatrix}$$

$$q_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2}\sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}$$

Movimientos rígidos



- Haciendo la suma vectorial se obtiene

$$ {}^0\boldsymbol{p} = {}^0\boldsymbol{o}_1 + {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{o}_2 + {}^0\boldsymbol{R}_1 {}^1\boldsymbol{R}_2 {}^2\boldsymbol{p}\,. $$

Transformaciones Homogéneas

- Se puede forzar la estructura de grupo mediante la **matriz de transformación homogénea**.

$$ {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}} & {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}} \\ \underset{1\times 3}{\boldsymbol{0}} & 1 \end{bmatrix} . \tag{38} $$

- Se deben ampliar los vectores:
  - Vectores de posición: se les agrega un 1 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{p}$ es

$$ {}^{\mathrm{a}}\bar{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} . \tag{39} $$

  - Vectores libres: se les agrega un 0 al final, i.e. la representación homogénea de ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{v}$ es

$$ {}^{\mathrm{a}}\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{v} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{40} $$

Transformaciones Homogéneas

- Para el ejemplo de la figura

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_{1} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{1} & {}^{0}\boldsymbol{o}_{1} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \tag{41} $$

$$ {}^{1}\boldsymbol{H}_{2} = \begin{bmatrix} {}^{1}\boldsymbol{R}_{2} & {}^{1}\boldsymbol{o}_{2} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} . \tag{42} $$

- Por lo que

$$ {}^{0}\bar{\boldsymbol{p}} = {}^{0}\boldsymbol{H}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{H}_{2}\,{}^{2}\bar{\boldsymbol{p}} \tag{43} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{1} & {}^{0}\boldsymbol{o}_{1} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{1}\boldsymbol{R}_{2} & {}^{1}\boldsymbol{o}_{2} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{2}\boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{44} $$

$$ = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{R}_{2}\,{}^{2}\boldsymbol{p} + {}^{0}\boldsymbol{R}_{1}\,{}^{1}\boldsymbol{o}_{2} + {}^{0}\boldsymbol{o}_{1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45} $$

Propiedades de SE(3)

- Sea ${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}} \in SE(3)$, entonces cumple con las siguientes propiedades:

  1 Determinante:
  $$\det({}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}}) = 1\,.$$

  2 Inversa:
  $${}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{b}}^{-1} = {}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} & -{}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}}\,{}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{o}_{\mathrm{b}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

  3 Reglas de composición: si un movimiento rígido se hace con respecto al sistema **actual**, la matriz de transformación homogénea **postmultiplica** la ecuación, mientras que si el movimiento es con respecto al sistema **fijo**, dicha matriz **premultiplica** la ecuación.

Transformaciones Homogéneas

- **Matrices de transformación homogéneas básicas.**
  Tres de traslación:

$$Tras_{\mathrm{x},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Tras_{\mathrm{y},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tras_{\mathrm{z},a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones Homogéneas

- Y tres de rotación:

$$Rot_{\mathrm{x},\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta & 0 \\ 0 & s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rot_{\mathrm{y},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_{\mathrm{z},\theta} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática Directa

- Conocer la Pose (posición y orientación) del efector final dadas las variables articulares $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

- Restricciones de Denavit-Hartenberg

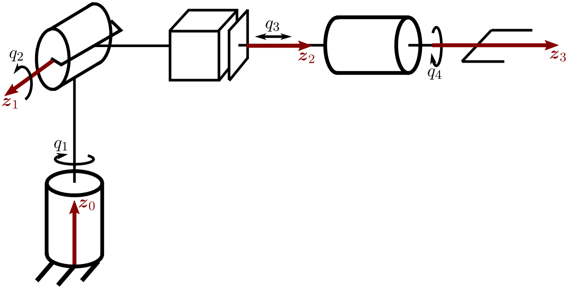
  - **[DH1]** El eje x_i siempre interseca al eje z_{i-1}.

  - **[DH2]** El eje x_i siempre es perpendicular al eje z_{i-1}.

Denavit-Hartenberg

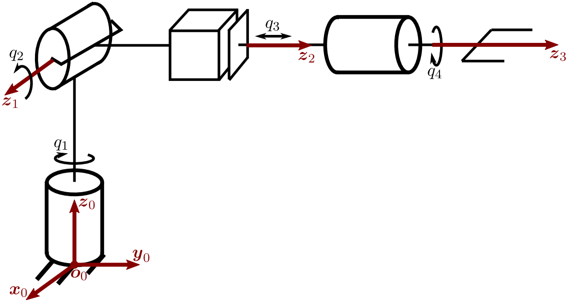
- Las restricciones DH1 y DH2 se pueden forzar si se realiza la asignación de los sistemas coordenados por medio del siguiente algoritmo de Denavit–Hartenberg (DH):

1. Colocar los ejes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Colocar el eje z_{i-1} sobre el eje de giro de la articulación i si es de revolución o sobre el eje de desplazamiento de la articulación i si es prismática.



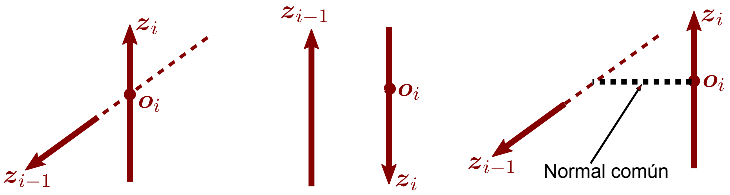
Denavit-Hartenberg

2 Completar el sistema coordenado de la base. Comenzar por o_0 en un punto conveniente sobre el eje z_0. Colocar x_0 y y_0 para formar un sistema dextrógiro ortonormal.



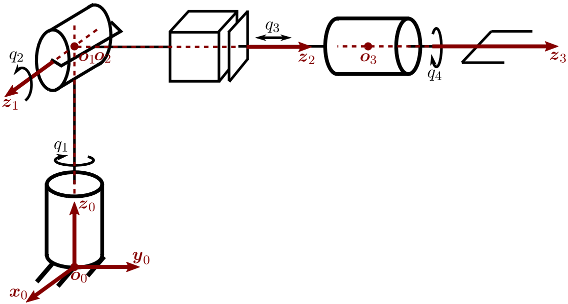
Denavit-Hartenberg

3 Colocar los orígenes $\boldsymbol{o}_1 \ldots \boldsymbol{o}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ son paralelos, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en cualquier lugar conveniente sobre $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no son paralelos ni se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección de $\boldsymbol{z}_i$ con la normal común de $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$.



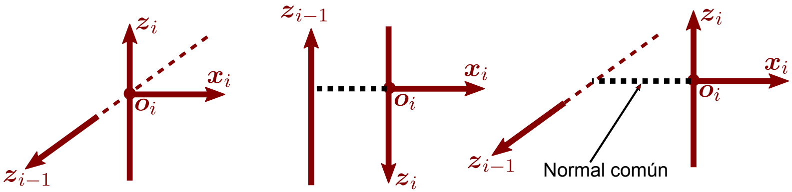
Denavit-Hartenberg

Para el ejemplo:



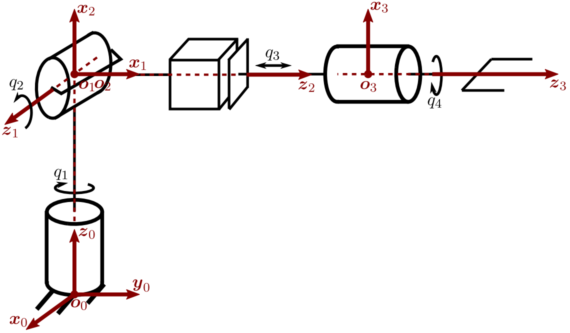
Denavit-Hartenberg

4 Colocar los ejes $\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal al plano que forman $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal común a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$.



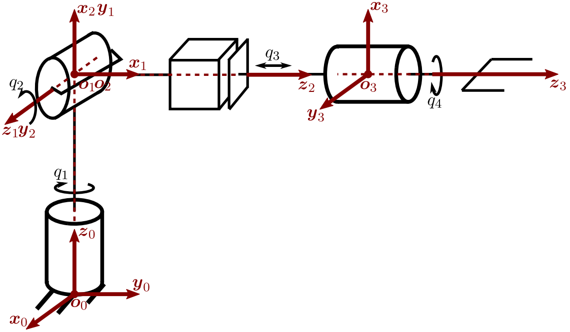
Denavit-Hartenberg

Para el ejemplo:



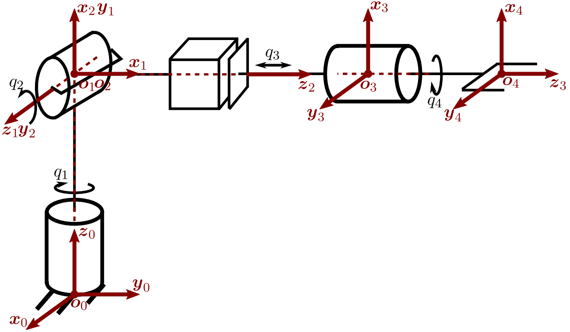
Denavit-Hartenberg

5 Colocar los ejes $\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_{n-1}$, completando los sistemas coordenados dextrógiros.



Denavit-Hartenberg

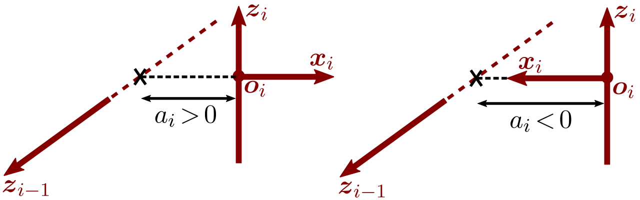
6 Colocar el sistema coordenado del efector final. Colocar $\boldsymbol{o}_n$ en el punto más importante (centro de la pinza, punta de la herramienta, etc.). Luego, colocar el eje $\boldsymbol{z}_n$ paralelo a $\boldsymbol{z}_{n-1}$ y pasando por $\boldsymbol{o}_n$. Colocar el eje $\boldsymbol{x}_n$ de tal forma que interseque a $\boldsymbol{z}_{n-1}$. Completar el sistema colocando $\boldsymbol{y}_n$ para formar un sistema dextrógiro.



Denavit-Hartenberg

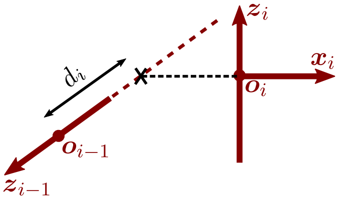
7 Formar la tabla de parámetros cuyas columnas son a_i, d_i, α_i, θ_i y $C.I.$ y cuyas filas son los números de las articulaciones.

- El parámetro a_i es la distancia desde la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$ hasta el origen $\boldsymbol{o}_i$. Si esta distancia está sobre el eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es negativa, mientras que si está del lado opuesto al eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es positiva.



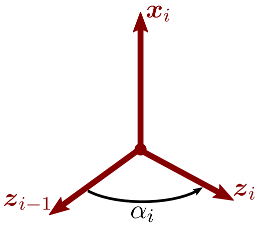
Denavit-Hartenberg

- El parámetro d_i es la distancia desde el origen $\boldsymbol{o}_{i-1}$ hasta la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$. Si la articulación i es prismática, este parámetro es variable y se denota como d_i^*.



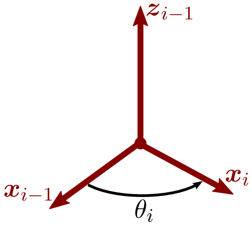
Denavit-Hartenberg

- El parámetro α_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{z}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{z}_i$ tomando a $\boldsymbol{x}_i$ como eje de giro.



Denavit-Hartenberg

- El parámetro θ_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{x}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{x}_i$ tomando a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ como eje de giro. Si la articulación i es de revolución, este parámetro es variable y se denota como θ_i^*.



Denavit-Hartenberg

- Por último, la columna de condiciones iniciales (C.I.) se llena tomando las cantidades variables d_i^* y θ_i^* como si fueran constantes.

- La tabla de parámetros para el ejemplo es

i	a_i	d_i	α_i	θ_i	C.I.
1	0	d_1	$90°$	θ_1^*	$0°$
2	0	0	$90°$	θ_2^*	$90°$
3	0	d_3^*	$0°$	$0°$	d_3
4	0	d_4	$0°$	θ_4^*	$0°$

Denavit-Hartenberg

8 Formar las n transformaciones homogéneas ${}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i)$ de acuerdo con la siguiente *plantilla*:

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (46)
$$

donde $c_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$, $s_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$, $c_{\alpha_i} = \cos(\alpha_i)$, $s_{\alpha_i} = \sin(\alpha_i)$

Denavit-Hartenberg

- Para el ejemplo

$$
{}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & 0 \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & 0 & s_{\theta_2} & 0 \\ s_{\theta_2} & 0 & -c_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\boldsymbol{H}_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{3}\boldsymbol{H}_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} & -s_{\theta_4} & 0 & 0 \\ s_{\theta_4} & c_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Denavit-Hartenberg

9 Obtener la cinemática directa, i.e., la transformación homogénea del sistema de la base al sistema del efector final, mediante la composición

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_{n}(\boldsymbol{q}) = {}^{0}\boldsymbol{H}_{1}(q_1)\,{}^{1}\boldsymbol{H}_{2}(q_2)\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{H}_{n}(q_n)\,. \qquad (47) $$

- Para el ejemplo:

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_{4} = \begin{bmatrix} c_{\theta_1}c_{\theta_2}c_{\theta_4} + s_{\theta_1}s_{\theta_4} & c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}c_{\theta_2}s_{\theta_4} & c_{\theta_1}s_{\theta_2} & c_{\theta_1}s_{\theta_2}\left(d_3 + d_4\right) \\ c_{\theta_2}c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}s_{\theta_4} & -c_{\theta_1}c_{\theta_4} - c_{\theta_2}s_{\theta_1}s_{\theta_4} & s_{\theta_1}s_{\theta_2} & s_{\theta_1}s_{\theta_2}\left(d_3 + d_4\right) \\ c_{\theta_4}s_{\theta_2} & -s_{\theta_2}s_{\theta_4} & -c_{\theta_2} & d_1 - c_{\theta_2}\left(d_3 + d_4\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Inversa

- Dada una posición ${}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} o_{\mathrm{x}} \\ o_{\mathrm{y}} \\ o_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$ y una orientación ${}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{x}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{y}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{z}_{\mathrm{d}} \end{bmatrix} \in SO(3)$ para el efector final, donde el subíndice d indica *deseados*, hallar las posiciones articulares $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{n}$ tales que se cumpla

$$
{}^{0}\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} & {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{48}
$$

donde ${}^{0}\boldsymbol{H}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{q})$ es la matriz de transformación homogénea que representa la cinemática directa del robot como función de $\boldsymbol{q}$.

Desacople cinemático

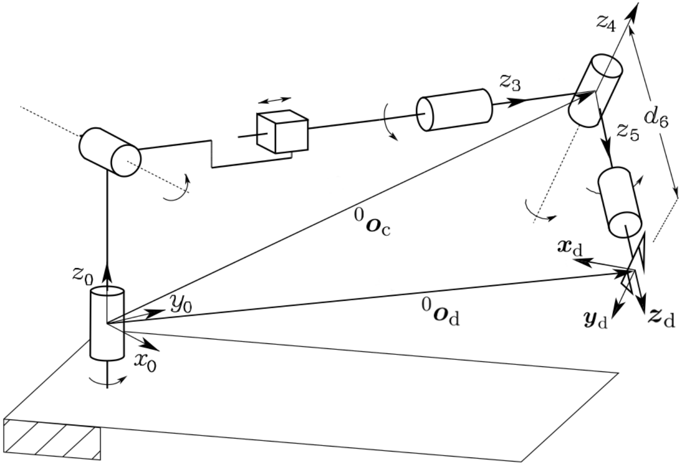
- Si se tiene un robot de 6 articulaciones (grados de libertad), cuyas últimas 3 forman una muñeca esférica, se puede dividir el problema cinemático inverso en dos problemas más simples: posición inversa y orientación inversa.

- Desacople cinemático:

$$
{}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6\,{}^{0}\boldsymbol{z}_{\mathrm{d}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6\,{}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\,, \tag{49}
$$

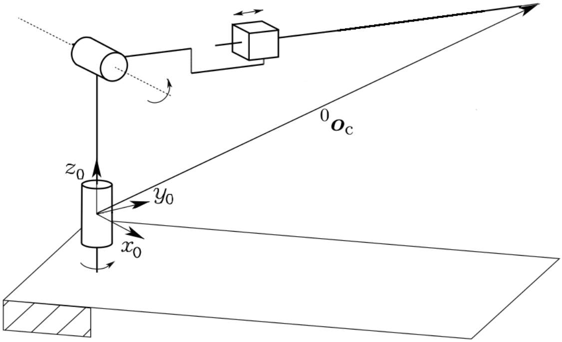
  donde d_6 es una distancia constante de Denavit-Hartenberg.

Desacople cinemático



Posición inversa

- Una vez calculado el centro de la muñeca $\boldsymbol{o}_\mathrm{c}$, se resuelve la cinemática inversa de posición, *i.e.*, se calculan q_1, q_2 y q_3, dejando de lado por el momento la orientación.



Orientación inversa

- Una vez resuelta la cinemática inversa de posición, se puede garantizar que el centro de la muñeca cumplirá con $\boldsymbol{o}_4 = \boldsymbol{o}_5 = \boldsymbol{o}_\mathrm{c}$.

- Nótese que ${}^0\boldsymbol{R}_6(\boldsymbol{q}) = {}^0\boldsymbol{R}_3(q_1, q_2, q_3)\,{}^3\boldsymbol{R}_6(q_4, q_5, q_6)$.

- Combinando estas ecuaciones y premultiplicando por ${}^0\boldsymbol{R}_3^\mathrm{T}$, se tiene
$$
{}^3\boldsymbol{R}_6 = {}^0\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{R}_\mathrm{d}\,, \tag{50}
$$
donde el lado derecho está en función de cantidades conocidas en este punto.

Orientación inversa

- La importancia de la muñeca esférica radica en que, si le **extraemos los ángulos de Euler ZYZ al lado derecho de (50)** los podemos igualar a $(q_4, q_5, q_6) = (\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ y así resolver el problema cinemático inverso de orientación.

- Si se define la matriz de rotación de ángulos de Euler como la composición $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z,\phi}\boldsymbol{R}_{y,\theta}\boldsymbol{R}_{z,\psi}$, entonces podemos calcular θ_4, θ_5 y θ_6 como

$$
\begin{aligned}
\theta_4 &= \phi \\
\theta_5 &= \theta \\
\theta_6 &= \psi\,.
\end{aligned}
$$

Cinemática Inversa (en resumen)

No existe una metodología exacta para obtener la cinemática inversa, pero pueden seguirse estos consejos:

- Hacer la asignación de Denavit-Hartenberg.
- Realizar el desacople cinemático para obtener $\boldsymbol{o}_\mathrm{c}$.
- Redibujar el robot sin las últimas 3 articulaciones y terminando en $\boldsymbol{o}_\mathrm{c}$.
- Mover el robot de tal manera que las cantidades variables $\theta_i^* \neq \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$ y $d_i^* \neq 0$.
- Si la i-ésima articulación es de revolución, proyectar el robot sobre el plano $x_{i-1}y_{i-1}$ para encontrar θ_i.
- Si la i-ésima articulación es prismática , proyectar el robot sobre un plano que contenga a z_{i-1} para encontrar d_i.

Libros Recomendados

1. Marco A. Arteaga, Alejandro Gutiérrez-Giles y Javier Pliego-Jiménez. Local Stability and Ultimate Boundedness in the Control of Robot Manipulators. Springer. 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85980-0

2. Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani y Giuseppe Oriolo. Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer London. 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1

3. Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. Robot Modeling and Control. 2nd Edition. Wiley. 2020

4. K. S. Fu, R.C. Gonzalez y C.S.G. Lee. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. Mcgraw-Hill. 1987.