Manipulación

Dr. Alejandro Gutiérrez–Giles
Dr. José Martínez Carranza

alejandro.giles@inaoep.mx, carranza@inaoep.mx

ccc.inaoep.mx/∼carranza/introb.html

Cinemática Directa

- Conocer la Pose (posición y orientación) del efector final dadas las variables articulares $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

- Restricciones de Denavit-Hartenberg

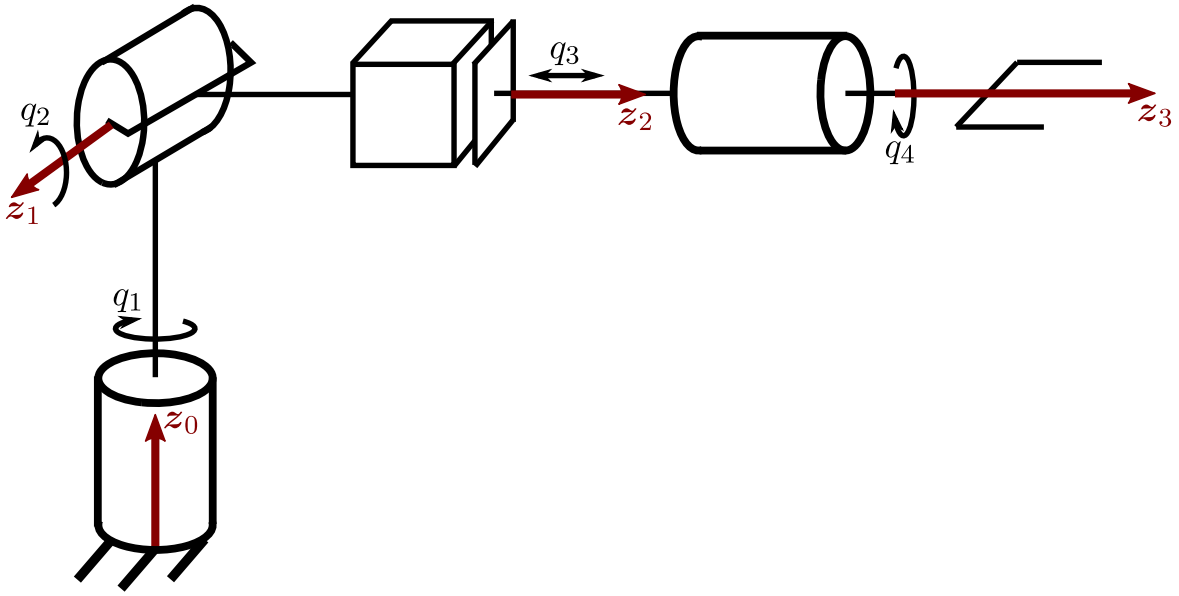
  - **[DH1]** El eje x_i siempre interseca al eje z_{i-1}.

  - **[DH2]** El eje x_i siempre es perpendicular al eje z_{i-1}.

Denavit-Hartenberg

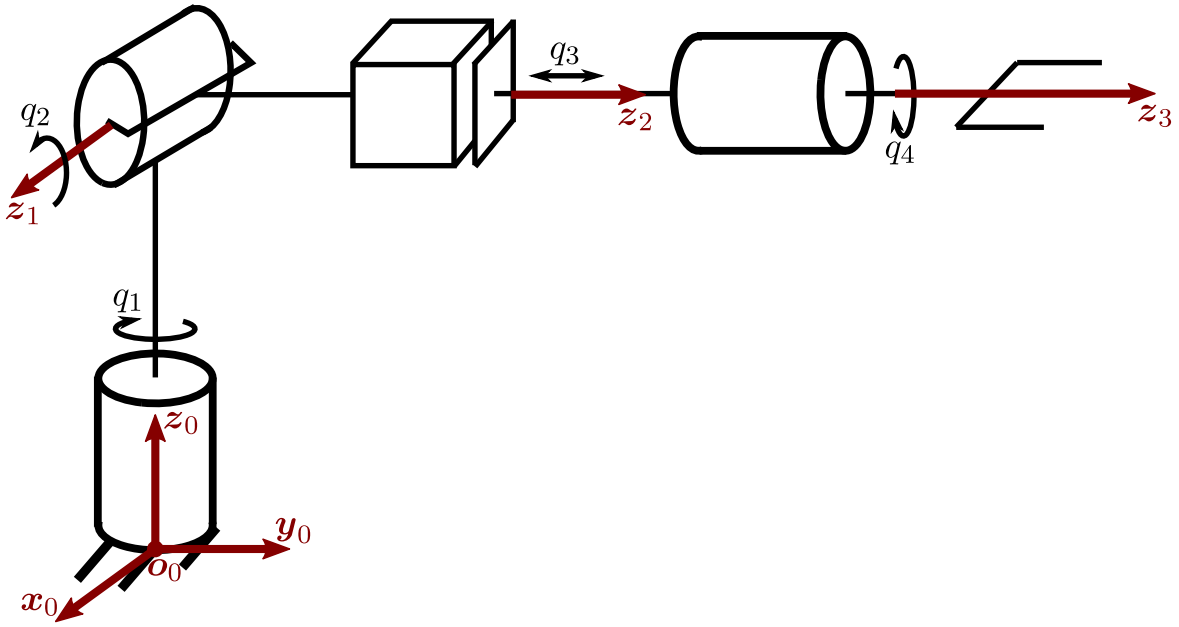
- Las restricciones DH1 y DH2 se pueden forzar si se realiza la asignación de los sistemas coordenados por medio del siguiente algoritmo de Denavit–Hartenberg (DH):

1 Colocar los ejes $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Colocar el eje z_{i-1} sobre el eje de giro de la articulación i si es de revolución o sobre el eje de desplazamiento de la articulación i si es prismática.



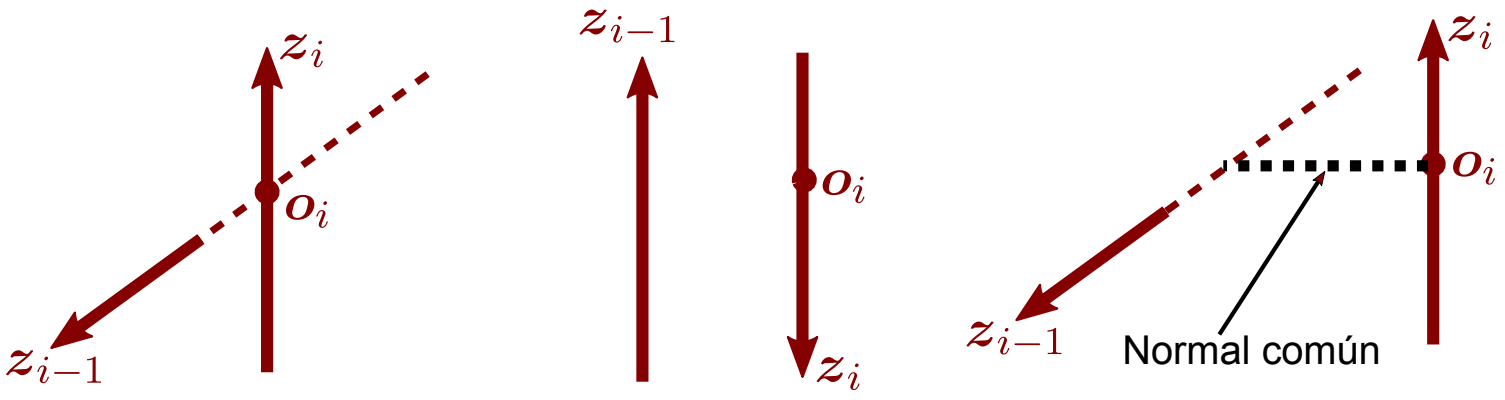
Denavit-Hartenberg

2 Completar el sistema coordenado de la base. Comenzar por o_0 en un punto conveniente sobre el eje z_0. Colocar x_0 y y_0 para formar un sistema dextrógiro ortonormal.



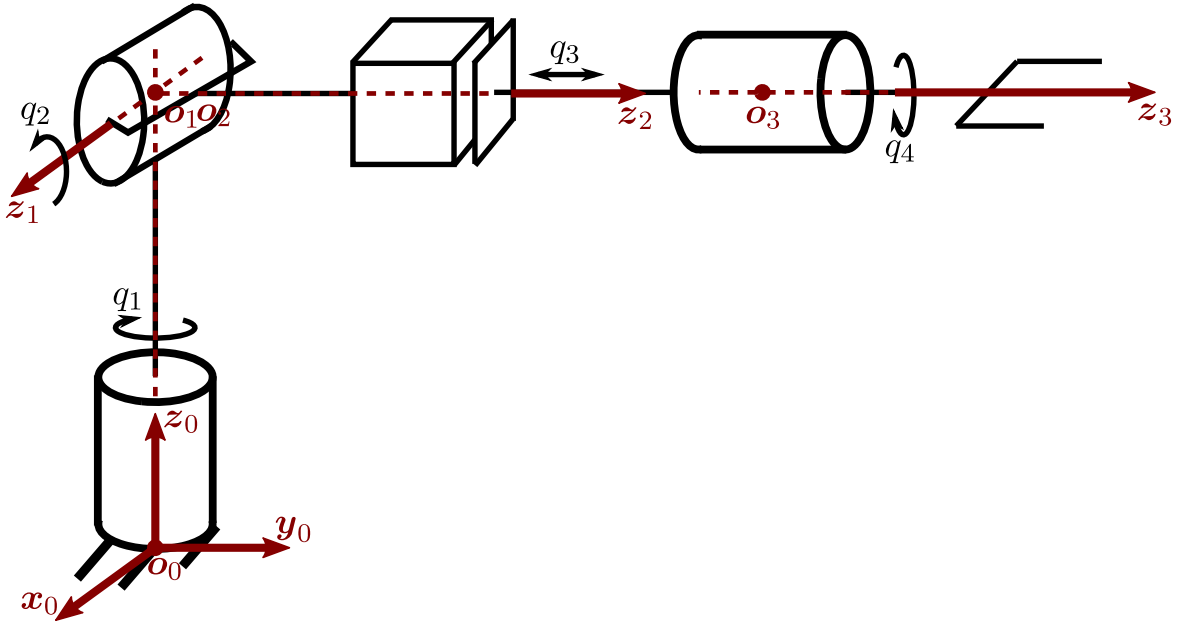
Denavit-Hartenberg

3 Colocar los orígenes $\boldsymbol{o}_1 \ldots \boldsymbol{o}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ son paralelos, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en cualquier lugar conveniente sobre $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no son paralelos ni se intersecan, colocar $\boldsymbol{o}_i$ en la intersección de $\boldsymbol{z}_i$ con la normal común de $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$.



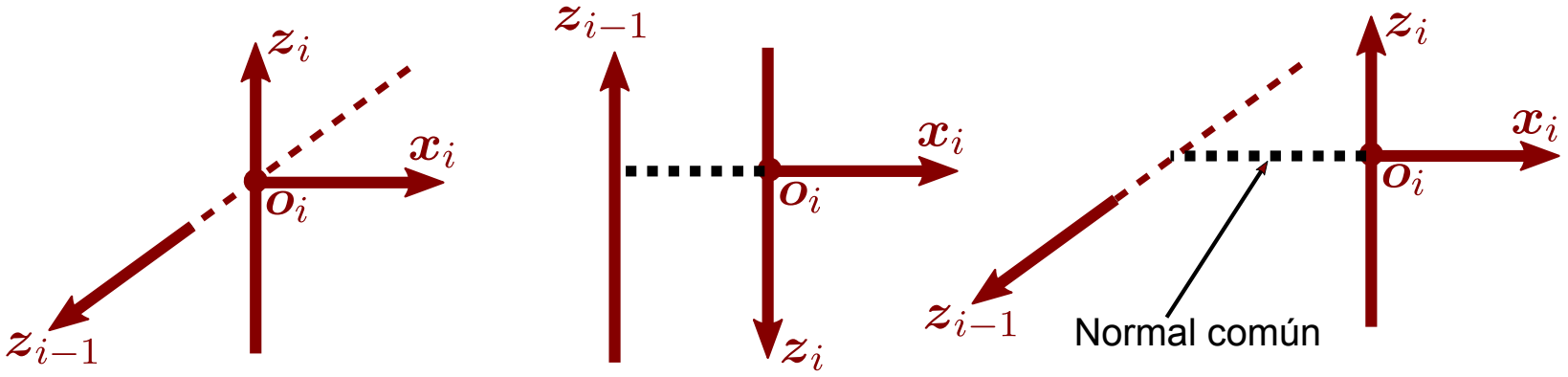
Denavit-Hartenberg

Para el ejemplo:



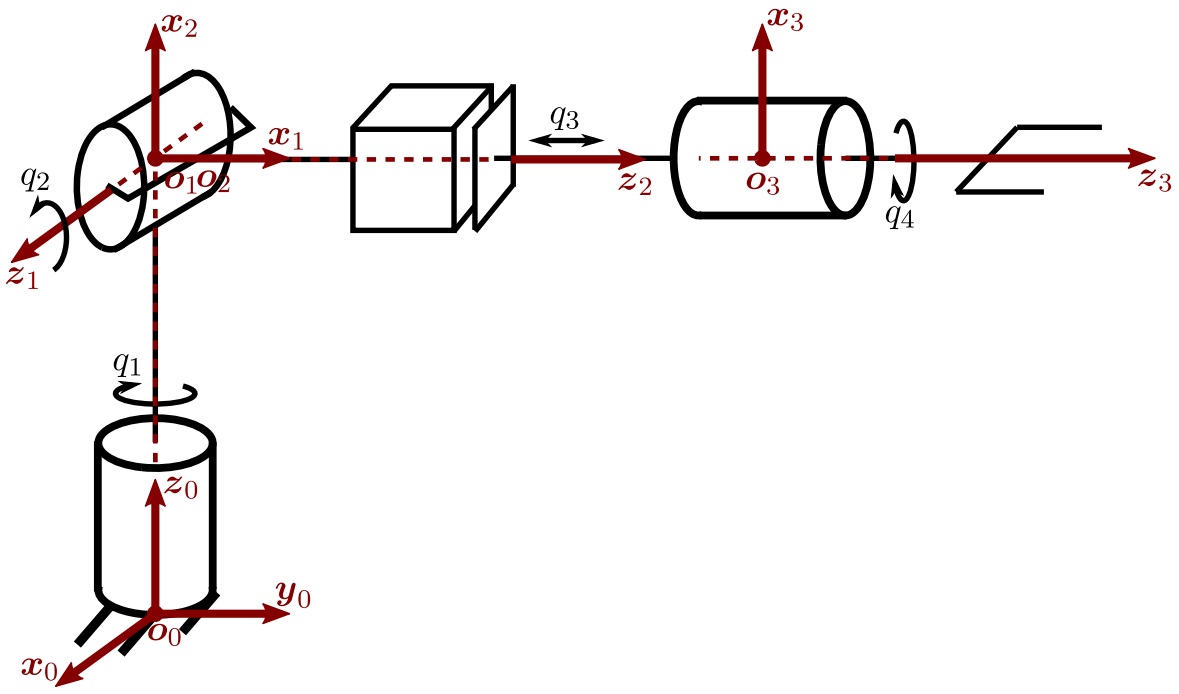
Denavit-Hartenberg

4 Colocar los ejes $\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{n-1}$, de acuerdo con los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal al plano que forman $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$. Si $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ no se intersecan, colocar $\boldsymbol{x}_i$ en la normal común a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{z}_i$ pasando por $\boldsymbol{o}_i$.



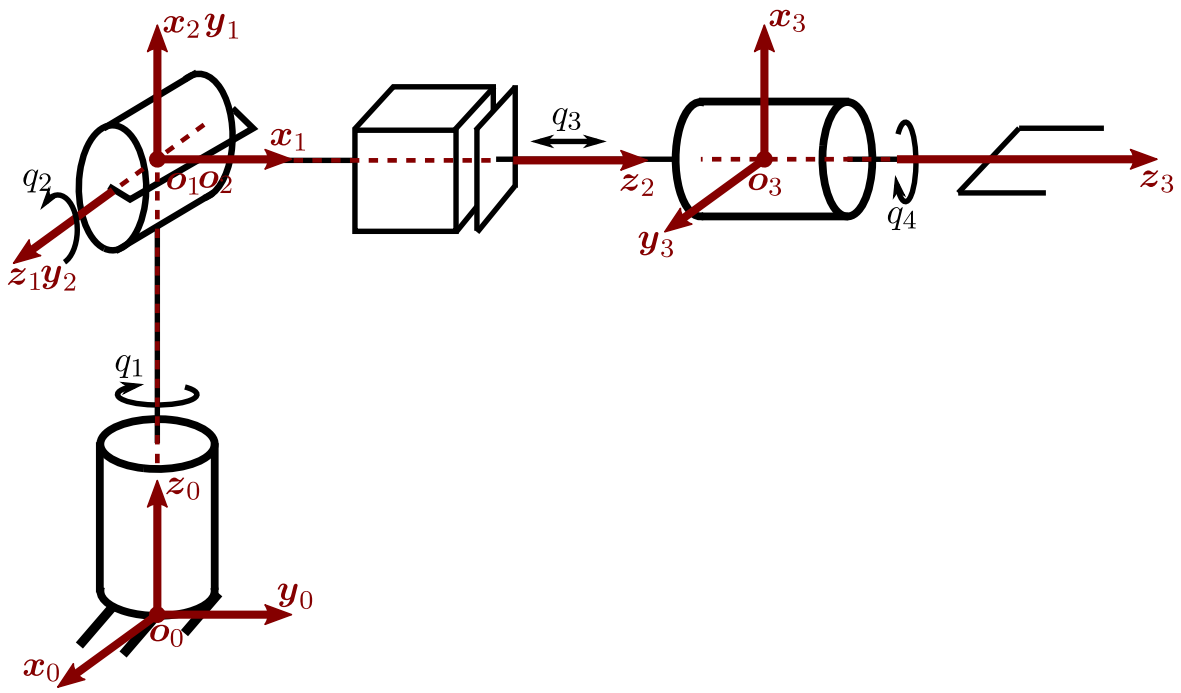
Denavit-Hartenberg

Para el ejemplo:



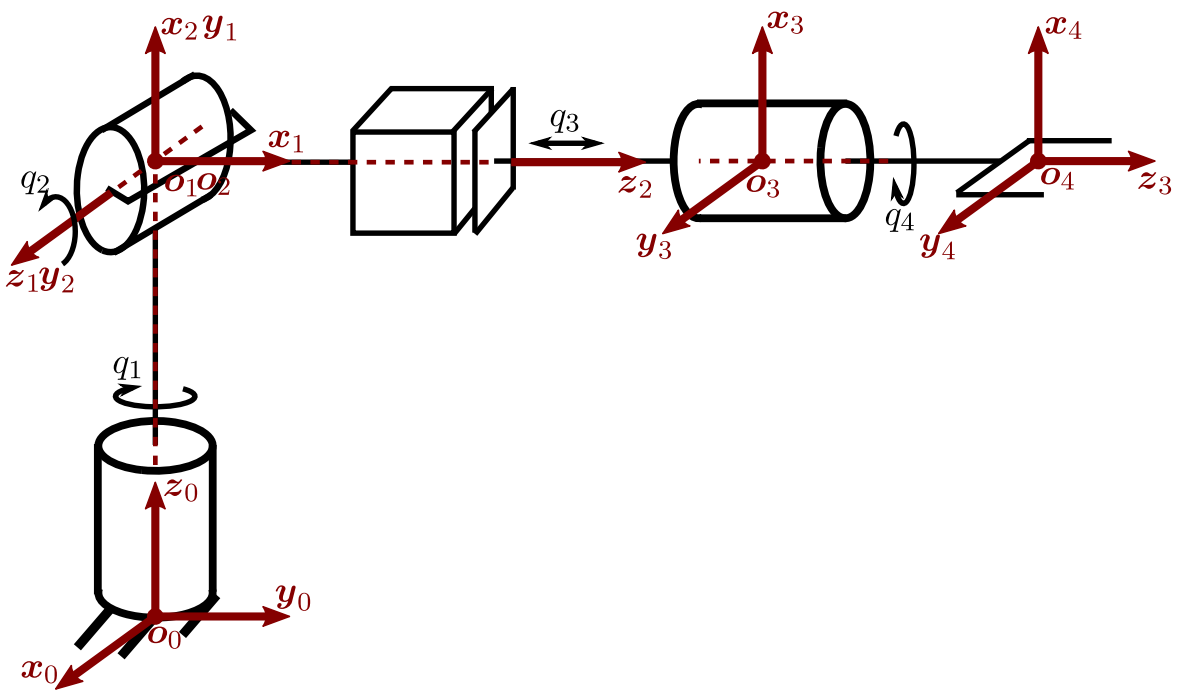
Denavit-Hartenberg

5 Colocar los ejes $\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_{n-1}$, completando los sistemas coordenados dextrógiros.



Denavit-Hartenberg

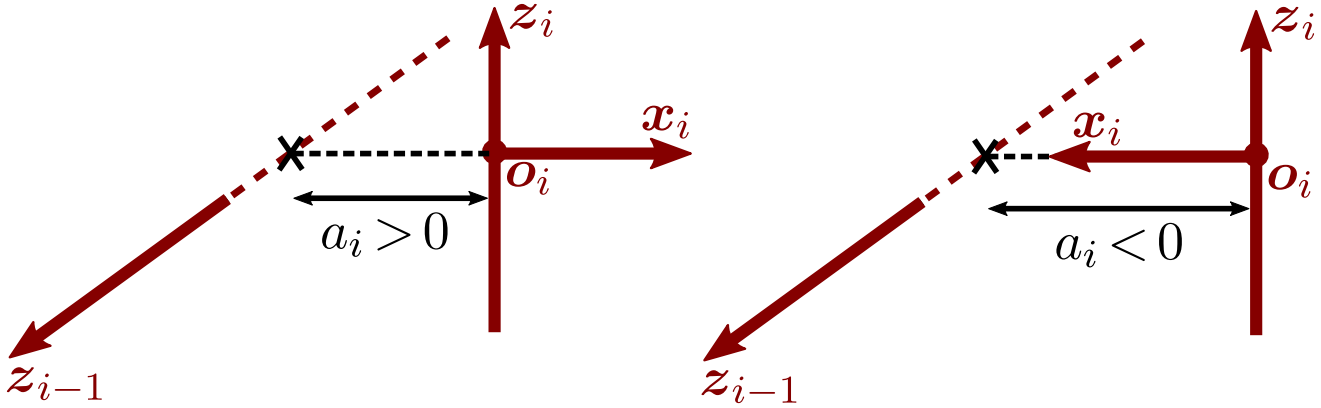
6 Colocar el sistema coordenado del efector final. Colocar $\boldsymbol{o}_n$ en el punto más importante (centro de la pinza, punta de la herramienta, etc.). Luego, colocar el eje $\boldsymbol{z}_n$ paralelo a $\boldsymbol{z}_{n-1}$ y pasando por $\boldsymbol{o}_n$. Colocar el eje $\boldsymbol{x}_n$ de tal forma que interseque a $\boldsymbol{z}_{n-1}$. Completar el sistema colocando $\boldsymbol{y}_n$ para formar un sistema dextrógiro.



Denavit-Hartenberg

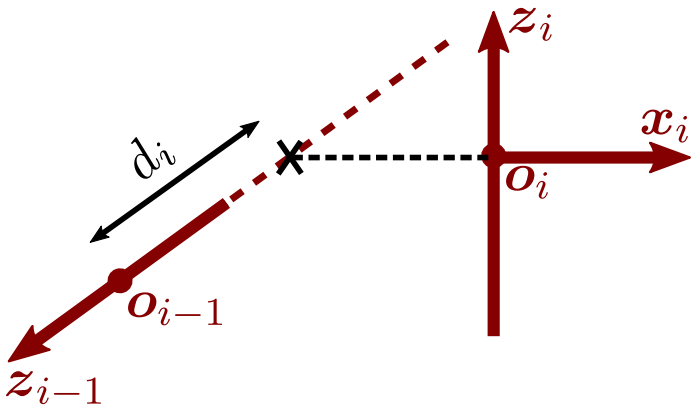
7 Formar la tabla de parámetros cuyas columnas son a_i, d_i, α_i, θ_i y $C.I.$ y cuyas filas son los números de las articulaciones.

- El parámetro a_i es la distancia desde la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$ hasta el origen $\boldsymbol{o}_i$. Si esta distancia está sobre el eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es negativa, mientras que si está del lado opuesto al eje $\boldsymbol{x}_i$, a_i es positiva.



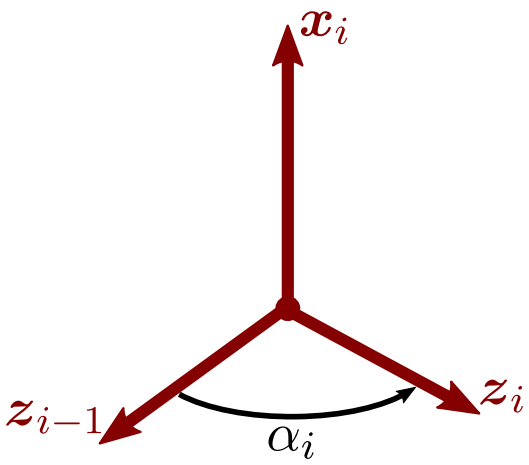
Denavit-Hartenberg

- El parámetro d_i es la distancia desde el origen $\boldsymbol{o}_{i-1}$ hasta la intersección de los ejes $\boldsymbol{z}_{i-1}$ y $\boldsymbol{x}_i$. Si la articulación i es prismática, este parámetro es variable y se denota como d_i^*.



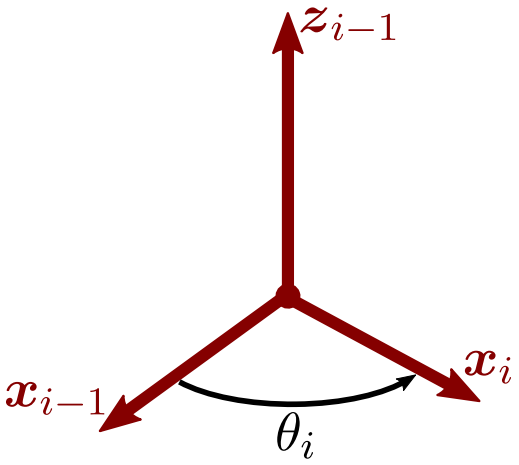
Denavit-Hartenberg

- El parámetro α_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{z}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{z}_i$ tomando a $\boldsymbol{x}_i$ como eje de giro.



Denavit-Hartenberg

- El parámetro θ_i es el ángulo desde el eje $\boldsymbol{x}_{i-1}$ hasta el eje $\boldsymbol{x}_i$ tomando a $\boldsymbol{z}_{i-1}$ como eje de giro. Si la articulación i es de revolución, este parámetro es variable y se denota como θ_i^*.



Denavit-Hartenberg

- Por último, la columna de condiciones iniciales (C.I.) se llena tomando las cantidades variables d_i^* y θ_i^* como si fueran constantes.

- La tabla de parámetros para el ejemplo es

i	a_i	d_i	α_i	θ_i	C.I.
1	0	d_1	$90°$	θ_1^*	$0°$
2	0	0	$90°$	θ_2^*	$90°$
3	0	d_3^*	$0°$	$0°$	d_3
4	0	d_4	$0°$	θ_4^*	$0°$

Denavit-Hartenberg

8 Formar las n transformaciones homogéneas ${}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i)$ de acuerdo con la siguiente *plantilla*:

$$
{}^{i-1}\boldsymbol{H}_i(q_i) = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}
$$

donde $c_{\theta_i} = \cos(\theta_i)$, $s_{\theta_i} = \sin(\theta_i)$, $c_{\alpha_i} = \cos(\alpha_i)$, $s_{\alpha_i} = \sin(\alpha_i)$

Denavit-Hartenberg

- Para el ejemplo

$$
{}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1) = \begin{bmatrix} c_{\theta_1} & 0 & s_{\theta_1} & 0 \\ s_{\theta_1} & 0 & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_{\theta_2} & 0 & s_{\theta_2} & 0 \\ s_{\theta_2} & 0 & -c_{\theta_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\boldsymbol{H}_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^{3}\boldsymbol{H}_4(q_4) = \begin{bmatrix} c_{\theta_4} & -s_{\theta_4} & 0 & 0 \\ s_{\theta_4} & c_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Denavit-Hartenberg

9 Obtener la cinemática directa, i.e., la transformación homogénea del sistema de la base al sistema del efector final, mediante la composición

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{q}) = {}^{0}\boldsymbol{H}_1(q_1){}^{1}\boldsymbol{H}_2(q_2)\cdots{}^{n-1}\boldsymbol{H}_n(q_n)\,. \tag{2} $$

- Para el ejemplo:

$$ {}^{0}\boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} c_{\theta_1}c_{\theta_2}c_{\theta_4} + s_{\theta_1}s_{\theta_4} & c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}c_{\theta_2}s_{\theta_4} & c_{\theta_1}s_{\theta_2} & c_{\theta_1}s_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ c_{\theta_2}c_{\theta_4}s_{\theta_1} - c_{\theta_1}s_{\theta_4} & -c_{\theta_1}c_{\theta_4} - c_{\theta_2}s_{\theta_1}s_{\theta_4} & s_{\theta_1}s_{\theta_2} & s_{\theta_1}s_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ c_{\theta_4}s_{\theta_2} & -s_{\theta_2}s_{\theta_4} & -c_{\theta_2} & d_1 - c_{\theta_2}\,(d_3+d_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Cinemática Inversa

- Dada una posición ${}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} o_\mathrm{x} \\ o_\mathrm{y} \\ o_\mathrm{z} \end{bmatrix}$ y una orientación ${}^0\boldsymbol{R}_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{x}_\mathrm{d} & {}^0\boldsymbol{y}_\mathrm{d} & {}^0\boldsymbol{z}_\mathrm{d} \end{bmatrix} \in SO(3)$ para el efector final, donde el subíndice d indica *deseados*, hallar las posiciones articulares $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ tales que se cumpla

$$ {}^0\boldsymbol{H}_\mathrm{n}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{R}_\mathrm{d} & {}^0\boldsymbol{o}_\mathrm{d} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3} $$

donde ${}^0\boldsymbol{H}_\mathrm{n}(\boldsymbol{q})$ es la matriz de transformación homogénea que representa la cinemática directa del robot como función de $\boldsymbol{q}$.

Desacople cinemático

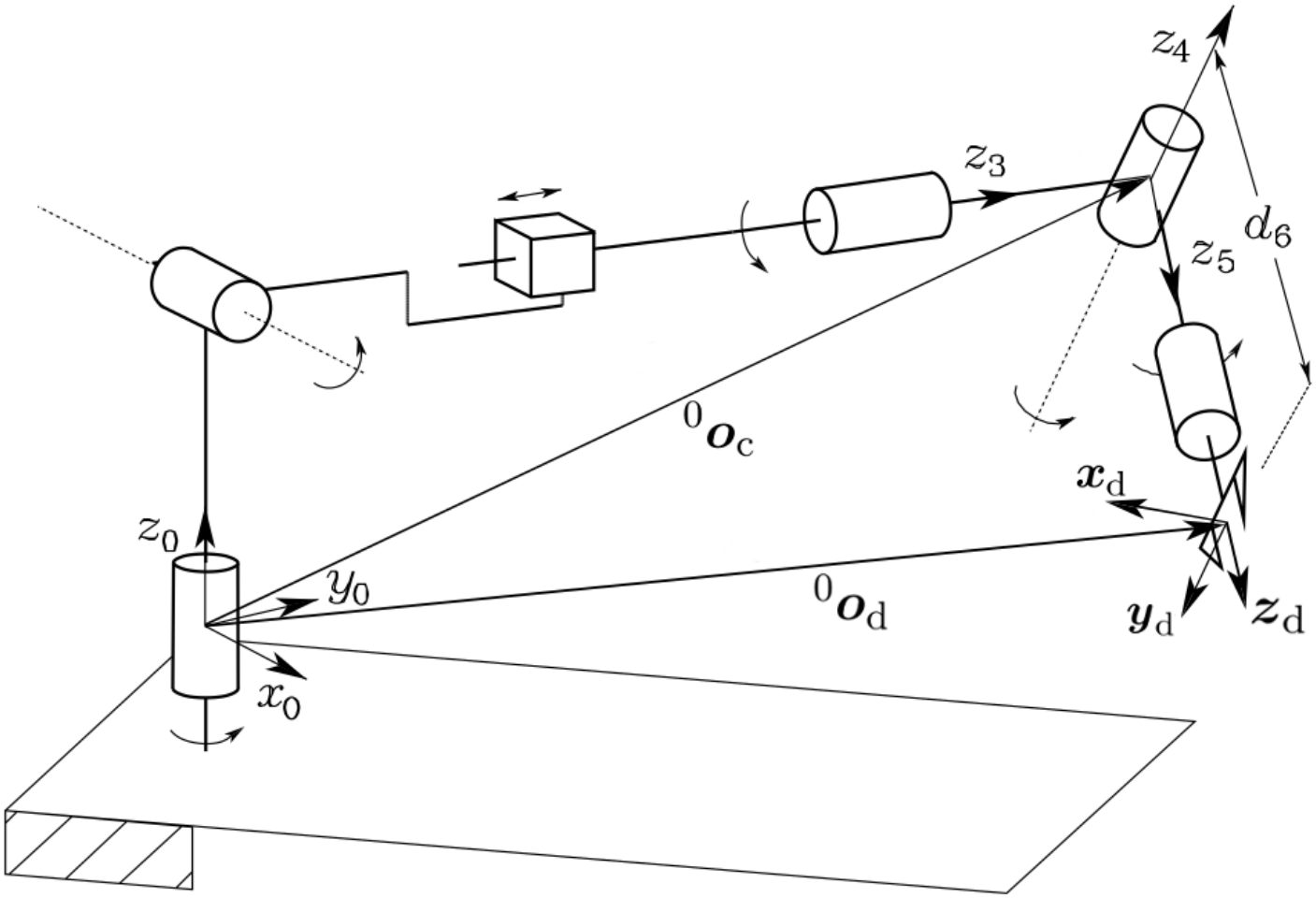
- Si se tiene un robot de 6 articulaciones (grados de libertad), cuyas últimas 3 forman una muñeca esférica, se puede dividir el problema cinemático inverso en dos problemas más simples: posición inversa y orientación inversa.

- Desacople cinemático:

$$ {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6 {}^{0}\boldsymbol{z}_{\mathrm{d}} = {}^{0}\boldsymbol{o}_{\mathrm{d}} - d_6 {}^{0}\boldsymbol{R}_{\mathrm{d}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \tag{4} $$

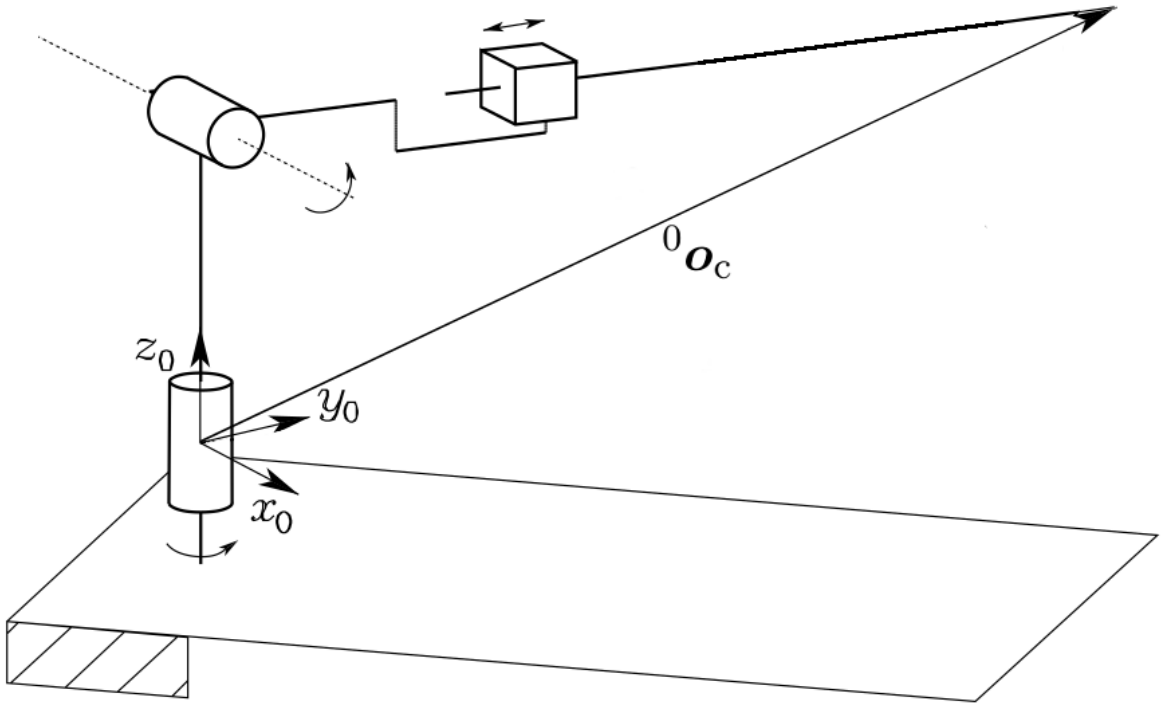
donde d_6 es una distancia constante de Denavit-Hartenberg.

Desacople cinemático



Posición inversa

- Una vez calculado el centro de la muñeca $\boldsymbol{o}_c$, se resuelve la cinemática inversa de posición, *i.e.*, se calculan q_1, q_2 y q_3, dejando de lado por el momento la orientación.



Orientación inversa

- Una vez resuelta la cinemática inversa de posición, se puede garantizar que el centro de la muñeca cumplirá con $\boldsymbol{o}_4 = \boldsymbol{o}_5 = \boldsymbol{o}_\mathrm{c}$.

- Nótese que ${}^0\boldsymbol{R}_6(\boldsymbol{q}) = {}^0\boldsymbol{R}_3(q_1, q_2, q_3){}^3\boldsymbol{R}_6(q_4, q_5, q_6)$.

- Combinando estas ecuaciones y premultiplicando por ${}^0\boldsymbol{R}_3^\mathrm{T}$, se tiene

$$ {}^3\boldsymbol{R}_6 = {}^0\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}{}^0\boldsymbol{R}_\mathrm{d}\,, \tag{5} $$

  donde el lado derecho está en función de cantidades conocidas en este punto.

Orientación inversa

- La importancia de la muñeca esférica radica en que, si le **extraemos los ángulos de Euler ZYZ al lado derecho de (5)** los podemos igualar a $(q_4, q_5, q_6) = (\theta_4, \theta_5, \theta_6)$ y así resolver el problema cinemático inverso de orientación.

- Si se define la matriz de rotación de ángulos de Euler como la composición $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z,\phi}\boldsymbol{R}_{y,\theta}\boldsymbol{R}_{z,\psi}$, entonces podemos calcular θ_4, θ_5 y θ_6 como

$$\begin{aligned}\theta_4 &= \phi \\ \theta_5 &= \theta \\ \theta_6 &= \psi\,.\end{aligned}$$

Cinemática Inversa (en resumen)

No existe una metodología exacta para obtener la cinemática inversa, pero pueden seguirse estos consejos:

- Hacer la asignación de Denavit-Hartenberg.
- Realizar el desacople cinemático para obtener $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Redibujar el robot sin las últimas 3 articulaciones y terminando en $\boldsymbol{o}_{\mathrm{c}}$.
- Mover el robot de tal manera que las cantidades variables $\theta_i^* \neq \{0, \pm\pi/2, \pm\pi\}$ y $d_i^* \neq 0$.
- Si la i-ésima articulación es de revolución, proyectar el robot sobre el plano $x_{i-1}y_{i-1}$ para encontrar θ_i.
- Si la i-ésima articulación es prismática , proyectar el robot sobre un plano que contenga a z_{i-1} para encontrar d_i.

Cinemática Diferencial

- Considere una función que represente la cinemática directa

$$\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{o}_n \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})\,. \tag{6}$$

- Derivando con respecto al tiempo

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\boldsymbol{o}}_n \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\,. \tag{7}$$

- A la matriz $\boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}$ se le conoce como Jacobiano analítico.
- En este caso, ${}^0\dot{\boldsymbol{o}}_n$ es la velocidad lineal del efector final. Sin embargo, $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ no es la velocidad angular del efector final. De hecho $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ no tiene significado físico.

Jacobiano Geométrico

- El Jacobiano geométrico o simplemente Jacobiano, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$, relaciona directamente velocidades en el espacio articular con velocidades en el espacio Cartesiano

$$\begin{bmatrix} {}^0\dot{\boldsymbol{o}}_n \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\,, \tag{8}$$

  donde ${}^0\boldsymbol{\omega}_n$ es la velocidad angular del sistema coordenado del efector final con respecto al sistema base.
- El Jacobiano geométrico es siempre de dimensión $6 \times n$ y frecuentemente se divide en dos submatrices como sigue

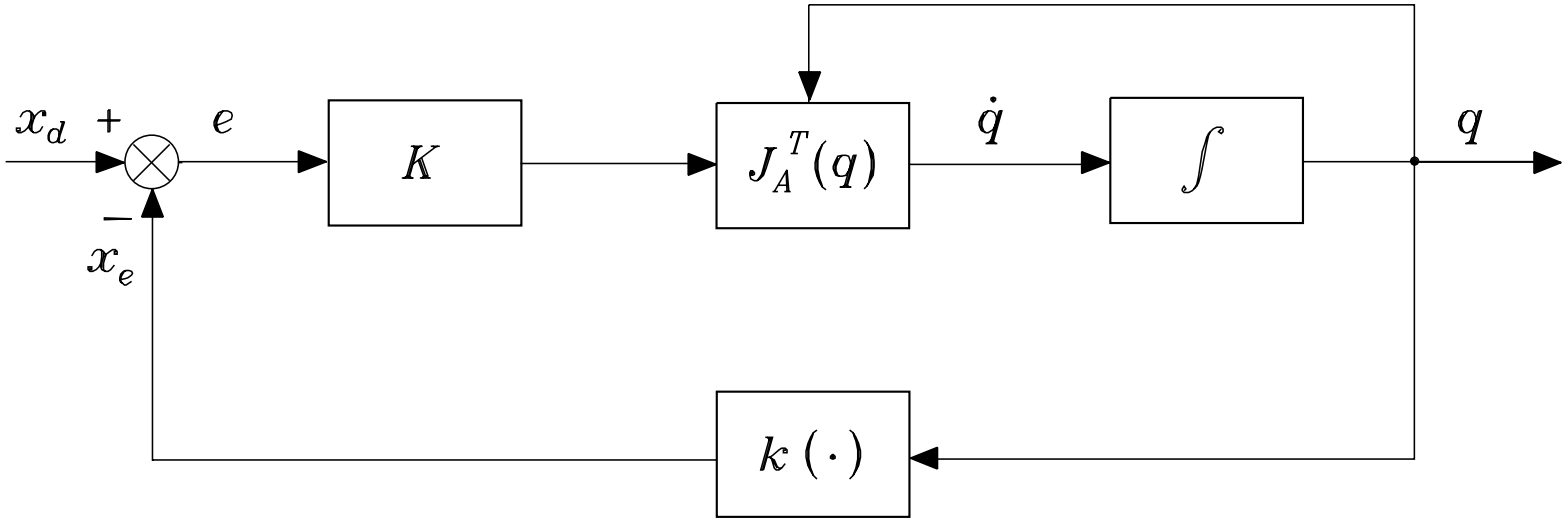
$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_{\omega}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\,. \tag{9}$$

- El Jacobiano geométrico no es estrictamente un Jacobiano, dado que no es la derivada parcial de una función vectorial, solo lleva el nombre.

Jacobiano

- Aplicaciones del Jacobiano:
  - Cálculo de cinemática inversa en línea para robots con muchas articulaciones
  - Modelado dinámico
  - Control de fuerza
  - Control servovisual
  - Análisis de singularidades
  - Manipulabilidad, etc.

Cinemática Inversa Numérica (CLIK)



- Se calcula

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}\,,$$

  donde $\boldsymbol{K}$ es una matriz de ganancias positiva definida.

- Se integra numéricamente para obtener $\boldsymbol{q}$.

Libros Recomendados

1. Marco A. Arteaga, Alejandro Gutiérrez-Giles y Javier Pliego-Jiménez. Local Stability and Ultimate Boundedness in the Control of Robot Manipulators. Springer. 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-030-85980-0

2. Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani y Giuseppe Oriolo. Robotics: Modelling, Planning and Control. Springer London. 2008. https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1

3. Mark W. Spong, Seth Hutchinson y M. Vidyasagar. Robot Modeling and Control. 2nd Edition. Wiley. 2020

4. K. S. Fu, R.C. Gonzalez y C.S.G. Lee. Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. Mcgraw-Hill. 1987.