

Ejercicios de notación asintótica

Big-O, Ω , Θ , o y ω — hoja de ejercicios

Instrucciones generales. Justifica cada respuesta mediante la definición asintótica correspondiente. Cuando aplique, identifica constantes y un umbral n_0 explícitos.

Ejercicio 1. Demuestra la siguiente cota asintótica.

$$n^2 = O((n+1)^2).$$

Expande o acota $(n+1)^2$ de forma conveniente. Propón valores concretos para c y n_0 y verifica la desigualdad exigida por la definición de Big-O.

Ejercicio 2. Compara el crecimiento del factorial con n elevado a n .

$$n! = O(n^n).$$

Escribe $n!$ como $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, acota cada factor por n y obtén una constante c y un umbral n_0 .

Ejercicio 3. Demuestra la igualdad entre las dos clases Big-O.

$$O(n^2) = O(n^2 + n).$$

Para probar igualdad de conjuntos de funciones, demuestra ambas inclusiones usando desigualdades válidas a partir de algún n_0 .

Ejercicio 4. Considera las siguientes funciones de n .

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^2, & f_2(n) &= n^2 + 1000n, \\ f_3(n) &= \begin{cases} n, & n \text{ impar,} \\ n^3, & n \text{ par,} \end{cases} & f_4(n) &= \begin{cases} n, & n \leq 100, \\ n^3, & n > 100. \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada par distinto i y j , indica si $f_i(n) = O(f_j(n))$ y si $f_i(n) = \Omega(f_j(n))$. Justifica cada respuesta.

Ejercicio 5. Demuestra que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- $17 \in O(1)$.
- $\frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$.
- $\max(n^3, 10n^2) \in O(n^3)$.
- $\sum_{i=1}^n i^k \in O(n^{k+1})$ y $\Omega(n^{k+1})$, para $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $p(n)$ es un polinomio de grado k con coeficiente principal $a_k > 0$, entonces $p(n) \in O(n^k)$ y $p(n) \in \Omega(n^k)$.

En cada inciso, identifica constantes apropiadas y justifica la cota asintótica.

Ejercicio 6. Supón que $T_1(n)$ es $\Omega(f(n))$ y $T_2(n)$ es $\Omega(g(n))$. ¿Cuáles afirmaciones son verdaderas?

- $T_1(n) + T_2(n) \in \Omega(\max(f(n), g(n)))$.
- $T_1(n)T_2(n) \in \Omega(f(n)g(n))$.

Para cada inciso, decide si la afirmación es verdadera y justifica tu respuesta usando la definición de Ω .

Ejercicio 7. Big-O básico

$$3n + 7 \in O(n).$$

Demuestra la afirmación. Encuentra valores concretos de c y n_0 .

Ejercicio 8. Big-O con polinomios

$$4n^2 + 3n + 10 \in O(n^2).$$

Demuestra la afirmación. Intenta encontrar un c sencillo, aunque no sea el menor posible.

Ejercicio 9. Omega

$$5n^2 - 2n \in \Omega(n^2).$$

Demuestra la afirmación. Debes encontrar $c > 0$ y n_0 .

Ejercicio 10. Theta

$$2n^2 + 5n + 3 \in \Theta(n^2).$$

Demuestra directamente la afirmación. Encuentra c_1, c_2 y n_0 tales que

$$c_1 n^2 \leq 2n^2 + 5n + 3 \leq c_2 n^2.$$

Ejercicio 11. Logaritmos

$$\log_2 n \in O(n).$$

No basta con decir que “el logaritmo crece más lento”; justifica la desigualdad requerida.

Ejercicio 12. o pequeña

$$n \in o(n^2).$$

Demuestra usando la definición. Tu argumento debe funcionar para cualquier $c > 0$.

Ejercicio 13. ω pequeña

$$n^2 \in \omega(n).$$

Comienza con un $c > 0$ arbitrario y construye n_0 en función de c .

Ejercicio 14. Otra o pequeña

$$\log_2 n \in o(n).$$

Demuestra la afirmación usando la definición de o pequeña.

Ejercicio 15. ¿Verdadero o falso?

$$n^2 + 100n \in O(n^2).$$

Si es verdadera, demuéstrela con la definición. Si es falsa, demuestra por qué no pueden existir las constantes requeridas.

Ejercicio 16. ¿Verdadero o falso?

$$n^2 \in O(n).$$

Si crees que es falsa, no basta decir “ n^2 crece más rápido”. Supón que existen c y n_0 y obtén una contradicción.

Ejercicio 17. Diferencia entre O y o

$$7n \in O(n) \quad \text{y} \quad 7n \in o(n).$$

Determina cuáles son verdaderas y justifica cada respuesta. Presta atención a “existe c ” frente a “para todo c ”.

Ejercicio 18. Diferencia entre Ω y ω

$$3n^2 \in \Omega(n^2) \quad \text{y} \quad 3n^2 \in \omega(n^2).$$

Determina cuáles son verdaderas y justifica usando las definiciones.

Ejercicio 19. Clasificación completa

$$f(n) = n \log n, \quad g(n) = n^2.$$

Decide cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas:

$$f \in O(g), \quad f \in o(g), \quad f \in \Omega(g), \quad f \in \omega(g), \quad f \in \Theta(g).$$

Justifica cada respuesta.

Ejercicio 20. Reto conceptual

$$f(n) = \begin{cases} n, & n \text{ par}, \\ n^2, & n \text{ impar}, \end{cases} \quad g(n) = n.$$

Decide cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas:

$$f \in O(g), \quad f \in o(g), \quad f \in \Omega(g), \quad f \in \omega(g), \quad f \in \Theta(g).$$

Considera por separado el comportamiento en pares e impares.