

Tarea No. 6

Tomás Balderas Contreras
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Curso: Lenguajes formales y autómatas

2 de julio, 2002

Ejercicio 1.

Probar que el lenguaje

$$L = \{0^n 10^n \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$$

no es un lenguaje regular.

Solución: Supóngase que el lenguaje L es regular. Sean $n \geq 1$ y $w = 0^n 10^n$, entonces $|w| = |0^n 10^n| > n$. Por el lema de bombeo

$$w = xyz \quad \text{tal que} \quad y \neq \epsilon, \quad |xy| \leq n, \quad y \quad \forall k \geq 0, \quad xy^k z \in L$$

Dividamos a w como se muestra a continuación

$$w = \underbrace{000 \dots 0}_{x} \underbrace{010}_{y} \underbrace{0 \dots 000}_{z}$$

En particular, para $k = 2$, se tiene que

$$xy^2z = \underbrace{000 \dots 0}_{x} \underbrace{010010}_{y^2} \underbrace{0 \dots 000}_{z}$$

Claramente se ve que $xy^2z \notin L$, lo que contradice el lema de bombeo. Esto implica que la suposición de que L es un lenguaje regular fue equivocada.

Ejercicio 2.

Probar que el lenguaje

$$L = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$$

no es un lenguaje regular.

Solución: Supóngase que el lenguaje L es regular. Sean $n \geq 1$ y $w = 0^{n^2}$, entonces $|w| = |0^{n^2}| \geq n$. Por el lema de bombeo

$$w = xyz \quad \text{tal que} \quad y \neq \epsilon, \quad |xy| \leq n, \quad \text{y} \quad \forall k \geq 0, \quad xy^kz \in L$$

En particular, para $k = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} |xy^2z| - |xyz| = |y| \leq n &\Leftrightarrow |xy^2z| - |xyz| \leq n \\ &\Leftrightarrow |xy^2z| \leq |xyz| + n \\ &\Leftrightarrow |xy^2z| \leq n^2 + n \end{aligned} \quad (1)$$

además, en general, se tiene

$$\begin{aligned} n < 2n + 1 &\Leftrightarrow n^2 + n < n^2 + 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow n^2 + n < (n + 1)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Como $n^2 < |xy^2z|$ y por 1 y 2 tenemos ahora

$$n^2 < |xy^2z| \leq n^2 + n < (n + 1)^2 \Leftrightarrow n^2 < |xy^2z| < (n + 1)^2$$

Por lo tanto $|xy^2z|$ es un número entero que se encuentra entre dos números cuadrados perfectos consecutivos y por lo tanto $xy^2z \notin L$, lo que contradice el lema de bombeo. De aquí se deduce que L no es un lenguaje regular.