Tarea No. 5

Tomás Balderas Contreras
Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica
Curso: Lenguajes formales y autómatas

28 de junio, 2002

Ejercicio 1

Dada la tabla de transiciones para el DFA:

	0	1
$\rightarrow q_1$	q_2	q_3
q_2	q_1	q_3
$\star q_3$	q_2	q_1

(a) Muestre todas las expresiones regulares $R_{ij}^{(0)}$. Nota: véase al estado q_i como si fuera el estado con el número entero i.

(b) Muestre todas las expresiones regulares $R_{ij}^{(1)}$. Trate de simplificar las expresiones lo mas que se pueda.

(c) Muestre todas las expresiones regulares $R_{ij}^{(2)}$. Trate de simplificar las expresiones lo mas que se pueda.

(d) Muestre una expresión regular para el lenguaje que acepta el autómata.

(e) Construya el diagrama de transiciones para el DFA y dé una expresión regular para este lenguaje cuando se elimina el estado q_2.

Solución:

(a) Las expresiones regulares $R_{ij}^{(0)}$ se obtienen mediante la definición

$$R_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} & i \neq j \\ \{a \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\} & i = j \end{cases}$$

y son las siguientes:

$R_{11}^{(0)}$	ϵ
$R_{12}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{13}^{(0)}$	$\mathbf{1}$
$R_{21}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{22}^{(0)}$	ϵ
$R_{23}^{(0)}$	$\mathbf{1}$
$R_{31}^{(0)}$	$\mathbf{1}$
$R_{32}^{(0)}$	$\mathbf{0}$
$R_{33}^{(0)}$	ϵ

(b) Las expresiones regulares $R_{ij}^{(1)}$ se obtienen mediante la definición

$$R_{ij}^{(1)} = R_{i1}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{1j}^{(0)} + R_{ij}^{(0)}$$

El proceso de cálculo y simplificación es como sigue

$R_{11}^{(1)} = R_{11}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{11}^{(0)} + R_{11}^{(0)} = \epsilon(\epsilon)^*\epsilon + \epsilon = \epsilon$

$R_{12}^{(1)} = R_{11}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{12}^{(0)} + R_{12}^{(0)} = \epsilon(\epsilon)^*\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$R_{13}^{(1)} = R_{11}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{13}^{(0)} + R_{13}^{(0)} = \epsilon(\epsilon)^*\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$

$R_{21}^{(1)} = R_{21}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{11}^{(0)} + R_{21}^{(0)} = \mathbf{0}(\epsilon)^*\epsilon + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$R_{22}^{(1)} = R_{21}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{12}^{(0)} + R_{22}^{(0)} = \mathbf{0}(\epsilon)^*\mathbf{0} + \epsilon = \mathbf{00} + \epsilon$

$R_{23}^{(1)} = R_{21}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{13}^{(0)} + R_{23}^{(0)} = \mathbf{0}(\epsilon)^*\mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{01} + \mathbf{1}$

$R_{31}^{(1)} = R_{31}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{11}^{(0)} + R_{31}^{(0)} = \mathbf{1}(\epsilon)^*\epsilon + \mathbf{1} = \mathbf{1} + \mathbf{1} = \mathbf{1}$

$R_{32}^{(1)} = R_{31}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{12}^{(0)} + R_{32}^{(0)} = \mathbf{1}(\epsilon)^*\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{10} + \mathbf{0}$

$R_{33}^{(1)} = R_{31}^{(0)}\left(R_{11}^{(0)}\right)^* R_{13}^{(0)} + R_{33}^{(0)} = \mathbf{1}(\epsilon)^*\mathbf{1} + \epsilon = \mathbf{11} + \epsilon$

Las expresiones regulares obtenidas se resumen en la siguiente tabla:

$R_{11}^{(1)}$	ϵ
$R_{12}^{(1)}$	$\mathbf{0}$
$R_{13}^{(1)}$	$\mathbf{1}$
$R_{21}^{(1)}$	$\mathbf{0}$
$R_{22}^{(1)}$	$\mathbf{00} + \epsilon$
$R_{23}^{(1)}$	$\mathbf{01} + \mathbf{1}$
$R_{31}^{(1)}$	$\mathbf{1}$
$R_{32}^{(1)}$	$\mathbf{10} + \mathbf{0}$
$R_{33}^{(1)}$	$\mathbf{11} + \epsilon$

(c) Las expresiones regulares $R_{ij}^{(2)}$ se obtienen mediante la definición

$$R_{ij}^{(2)} = R_{i2}^{(1)}\left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{2j}^{(1)} + R_{ij}^{(1)}$$

El proceso de cálculo y simplificación es como sigue

$R_{11}^{(2)} = R_{12}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{21}^{(1)} + R_{11}^{(1)} = \mathbf{0}(\mathbf{00}+\epsilon)^*\mathbf{0}+\epsilon = \mathbf{0}(\mathbf{00})^* + \epsilon = (\mathbf{00})^* + \epsilon$

$R_{12}^{(2)} = R_{12}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{22}^{(1)} + R_{12}^{(1)} = \mathbf{0}(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{00}+\epsilon)+\mathbf{0} = \mathbf{0}(\mathbf{00})^*$

$R_{13}^{(2)} = R_{12}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{23}^{(1)} + R_{13}^{(1)} = \mathbf{0}(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{01}+\mathbf{1})+\mathbf{1} = \mathbf{0}^*\mathbf{1}$

$R_{21}^{(2)} = R_{22}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{21}^{(1)} + R_{21}^{(1)} = (\mathbf{00}+\epsilon)(\mathbf{00}+\epsilon)^*\mathbf{0}+\mathbf{0} = (\mathbf{00})^*\mathbf{0}$

$R_{22}^{(2)} = R_{22}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{22}^{(1)} + R_{22}^{(1)} = (\mathbf{00}+\epsilon)(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{00}+\epsilon)+(\mathbf{00}+\epsilon) = (\mathbf{00})^*+\epsilon$

$R_{23}^{(2)} = R_{22}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{23}^{(1)} + R_{23}^{(1)} = (\mathbf{00}+\epsilon)(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{01}+\mathbf{1})+(\mathbf{01}+\mathbf{1}) = \mathbf{0}^*\mathbf{1}$

$R_{31}^{(2)} = R_{32}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{21}^{(1)} + R_{31}^{(1)} = (\mathbf{10}+\mathbf{0})(\mathbf{00}+\epsilon)^*\mathbf{0}+\mathbf{1} = (\mathbf{1}+\epsilon)(\mathbf{00})^*$

$R_{32}^{(2)} = R_{32}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{22}^{(1)} + R_{32}^{(1)} = (\mathbf{10}+\mathbf{0})(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{00}+\epsilon)+(\mathbf{10}+\mathbf{0})$
$= (\mathbf{1}+\epsilon)\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$

$R_{33}^{(2)} = R_{32}^{(1)} \left(R_{22}^{(1)}\right)^* R_{23}^{(1)} + R_{33}^{(1)} = (\mathbf{10}+\mathbf{0})(\mathbf{00}+\epsilon)^*(\mathbf{01}+\mathbf{1})+(\mathbf{11}+\epsilon)$
$= (\mathbf{1}+\mathbf{10}+\mathbf{00}+\mathbf{0})(\mathbf{00})^*\mathbf{1}+\epsilon$

Las expresiones regulares obtenidas se resumen en la siguiente tabla:

$R_{11}^{(2)}$	$(\mathbf{00})^*+\epsilon$
$R_{12}^{(2)}$	$\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{13}^{(2)}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{21}^{(2)}$	$(\mathbf{00})^*\mathbf{0}$
$R_{22}^{(2)}$	$(\mathbf{00})^*+\epsilon$
$R_{23}^{(2)}$	$\mathbf{0}^*\mathbf{1}$
$R_{31}^{(2)}$	$(\mathbf{1}+\epsilon)(\mathbf{00})^*$
$R_{32}^{(2)}$	$(\mathbf{1}+\epsilon)\mathbf{0}(\mathbf{00})^*$
$R_{33}^{(2)}$	$(\mathbf{1}+\mathbf{10}+\mathbf{00}+\mathbf{0})(\mathbf{00})^*\mathbf{1}+\epsilon$

(d) La expresión regular que denota el lenguaje que acepta este autómata es, de manera poco simplificada, la siguiente:

$$\begin{aligned} R_{13}^{(3)} &= R_{13}^{(2)}(R_{33}^{(2)})^* R_{33}^{(2)} + R_{13}^{(2)} \\ &= (\mathbf{0}^*\mathbf{1})\big((\mathbf{1}+\mathbf{10}+\mathbf{00}+\mathbf{0})(\mathbf{00})^*\mathbf{1}\big)^*\big((\mathbf{1}+\mathbf{10}+\mathbf{00}+\mathbf{0})(\mathbf{00})^*\mathbf{1}+\epsilon\big) \end{aligned}$$

(e) El diagrama de transición original para este autómata se muestra en la figura 1. Después de minimizar el autómata, eliminando el estado q_2, obtenemos al autómata finito de la figura 2. La expresión regular asociada a este diagrama es:

$$R = \big(\mathbf{00}+(\mathbf{1}+\mathbf{01})(\mathbf{01})^*(\mathbf{1}+\mathbf{00})\big)^*(\mathbf{1}+\mathbf{01})(\mathbf{01})^*$$

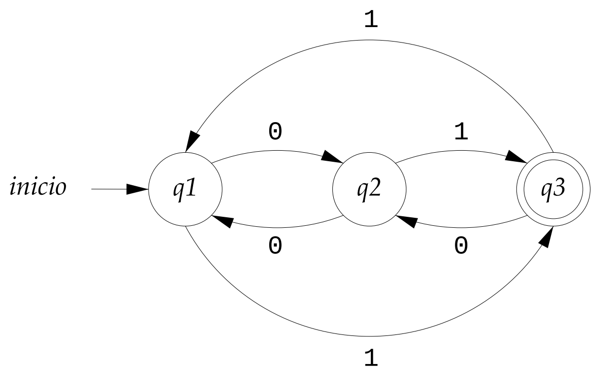

Figura 1: Diagrama de transición inicial para el DFA del ejercicio 1.

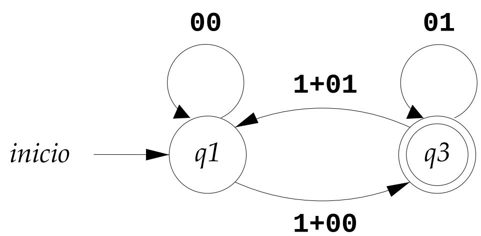

Figura 2: Diagrama de transición minimizado para el DFA del ejercicio 1.

Ejercicio 2

Convierta las siguientes expresiones regulares a ϵ-NFAs:

(a) $\mathbf{00}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$

(b) $\mathbf{01}((\mathbf{0}+\mathbf{1})^*+\mathbf{01})$

Solución:

(a) En las figuras 3–8 se muestra el proceso de construcción del ϵ-NFA, paso a paso, a partir de los autómatas para las diferentes subexpresiones regulares. Cuando se tienen subexpresiones repetidas (e.g. **0** en **00**) se renombran los estados de los autómatas correspondientes.

(b) Por el ejercicio anterior contamos ya con el autómata de la subexpresión regular $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$. Nuevamente fue necesario renombrar estados en subexpresiones repetidas. El proceso para construir el ϵ-NFA completo se muestra en las figuras 9–11.

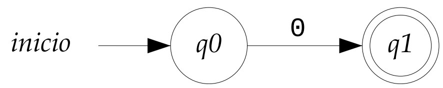

Figura 3: Autómata para la expresión **0**.

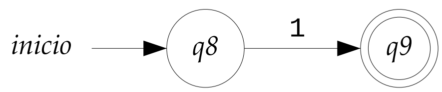

Figura 4: Autómata para la expresión **1**.

Ejercicio 3

Verifique las siguientes identidades para expresiones regulares:

(a) $(R^*)^* = R^*$

(b) $(R+S)T = RT + ST$

Solución:

(a) Asignamos a R la expresión regular $\mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} R = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; L((R^*)^*) &= L((\mathbf{0}^*)^*) \\ &= (\{0\}^*)^* \\ &= \{0\}^* \\ &= L(\mathbf{0}^*) \\ &= L(R^*) \end{aligned}$$

por lo tanto $(R^*)^* = R^*$.

(b) Asignamos a R, S y T las expresiones regulares $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ respectivamente.

$$\begin{aligned} R = \mathbf{a},\; S = \mathbf{b},\; T = \mathbf{c} \;\Rightarrow\; L((R+S)T) &= L((\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}) \\ &= (\{\mathbf{a}\} \;\cup\; \{\mathbf{b}\})\{\mathbf{c}\} \\ &= \{\mathbf{a}\}\{\mathbf{c}\} \;\cup\; \{\mathbf{b}\}\{\mathbf{c}\} \\ &= L(\mathbf{ac}+\mathbf{bc}) \\ &= L(RT+ST) \end{aligned}$$

por lo tanto $(R+S)T = RT + ST$.

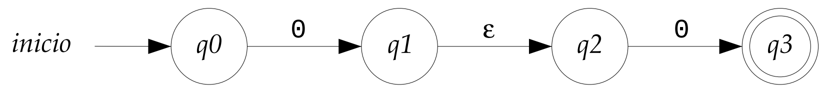

Figura 5: Autómata para la expresión **00**.

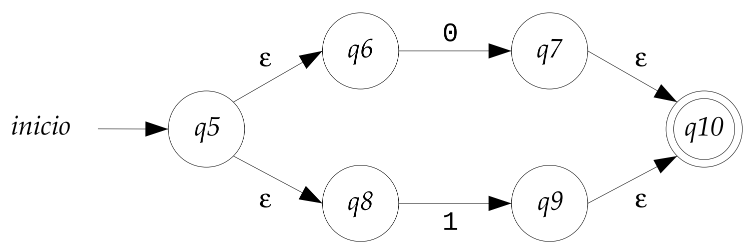

Figura 6: Autómata para la expresión $\mathbf{0} + \mathbf{1}$.

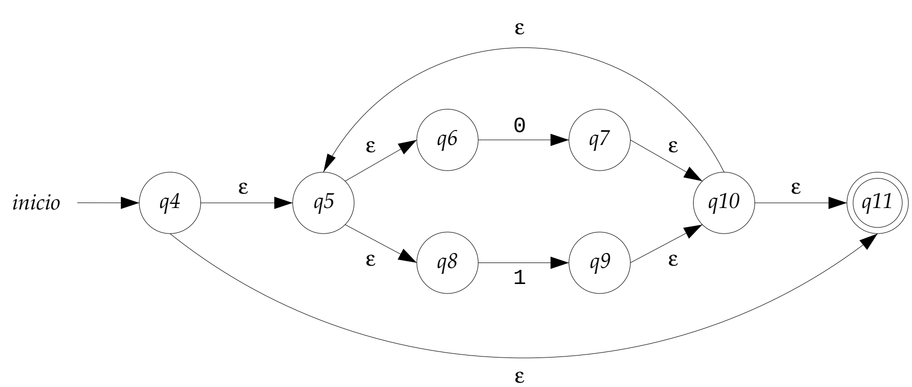

Figura 7: Autómata para la expresión $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$.

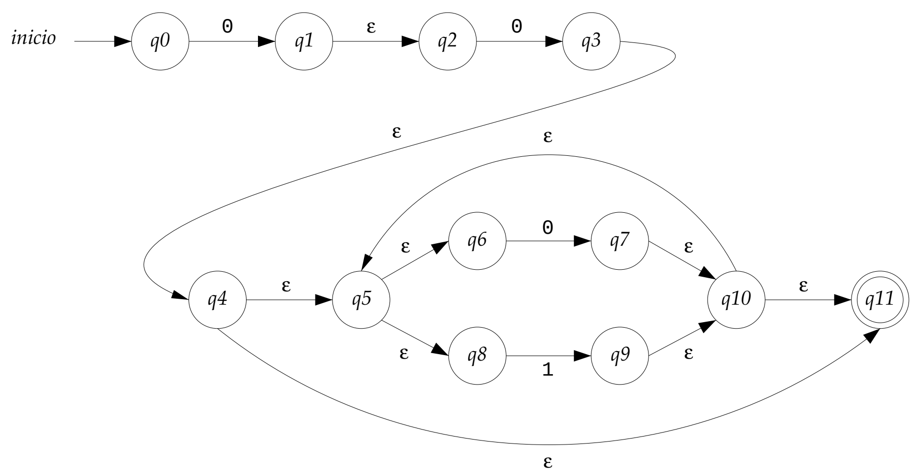

Figura 8: Autómata para la expresión $\mathbf{00}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$.

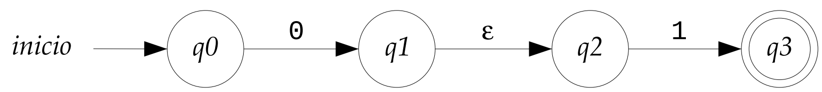

Figura 9: Autómata para la expresión **01**.

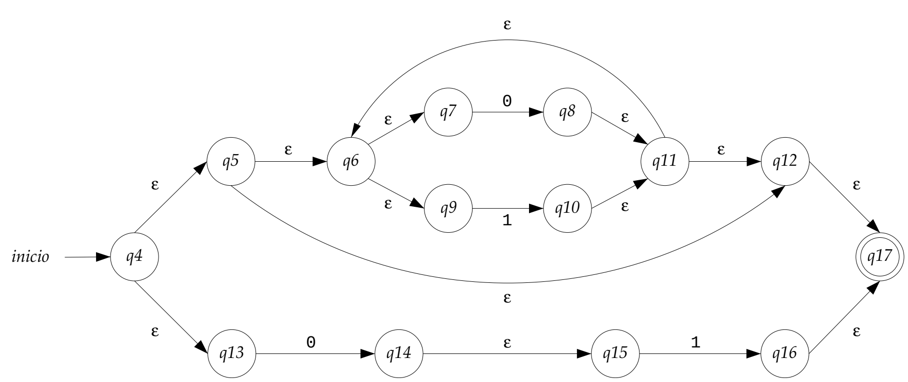

Figura 10: Autómata para la expresión $(\mathbf{0}+\mathbf{1})^* + \mathbf{01}$.

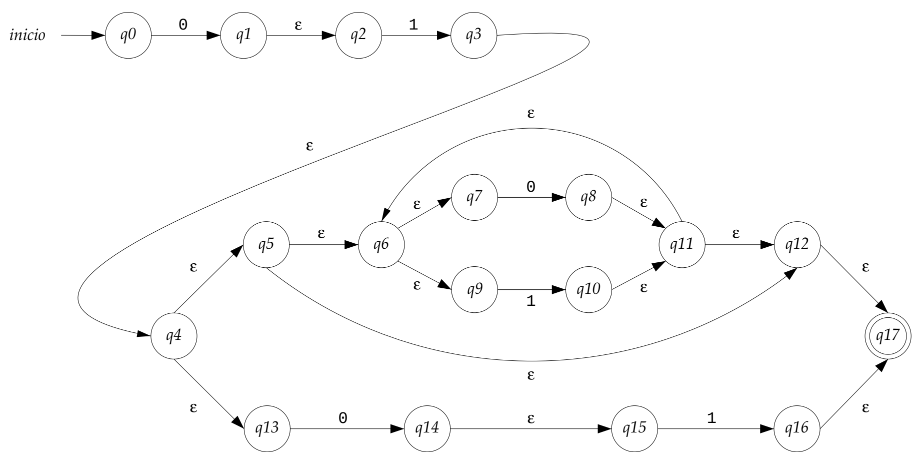

Figura 11: Autómata para la expresión $\mathbf{01}\big((\mathbf{0}+\mathbf{1})^* + \mathbf{01}\big)$.