Tarea No. 1

Tomás Balderas Contreras
Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica
Curso: Lenguajes formales y autómatas

11 de junio, 2002

Ejercicio 1.

Demostrar que

$$S(n): \quad 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1), \quad n \geq 1$$

(a) **Paso básico**:

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 \cdot (1+1) \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

lo que verifica el paso básico.

(b) **Paso inductivo**: Supóngase que $S(k)$ es verdadera

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \ldots + 2(k+1) &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2k + 2(k+1) \\ &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \\ &= (k+1)\Big[(k+1)+1\Big] \end{aligned}$$

por lo que se verifica el paso inductivo y $S(n)$ queda demostrada.

Ejercicio 2

Demostrar que

$$S(n): \quad 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \quad n \geq 1$$

(a) **Paso básico**:

$$\begin{aligned} n = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1^2 = \frac{1(2-1)(2+1)}{3} \\ &\Rightarrow \quad 1 = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} \\ &\Rightarrow \quad 1 = 1 \end{aligned}$$

lo que verifica el paso básico.

(b) **Paso inductivo**: Supóngase que $S(k)$ es verdadera

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \ldots + \Big[2(k+1) - 1\Big]^2 &= 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + \Big[2(k+1) - 1\Big]^2 \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \\
&= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\
&= \frac{(2k+1)\Big[k(2k-1) + 3(2k+1)\Big]}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2 - k + 6k + 3)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} \\
&= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\Big[2(k+1) - 1\Big]\Big[2(k+1) + 1\Big]}{3}
\end{aligned}$$

por lo que se verifica el paso inductivo y $S(n)$ queda demostrada.

Ejercicio 3

Demostrar que

$$S(n): \quad 2^n < n!, \quad n \geq 4$$

(a) **Paso básico**:

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad 2^4 = 16 < 24 = 4!$$

lo que verifica el paso básico.

(b) **Paso inductivo**: Supóngase que $S(k)$ es verdadera

$$\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)k! \\
&> (k+1)2^k \\
&> 2 \cdot 2^k \\
&= 2^{(k+1)}
\end{aligned}$$

por lo que se verifica el paso inductivo y $S(n)$ queda demostrada.