Diseño y Análisis de Algoritmos
Sumas

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311

Contenido

- Notación
- Propiedades
- Sumas conocidas

Notación

La suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ la denotaremos como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ejemplo: 1+2+3+…+n se denota como:

$$\sum_{i=1}^{n} i$$

Notación

En general:

$$\sum_{quiénes} qué$$

Ejemplo:

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 100 \\ i \text{ es impar}}} i^2$$

Notación

Los índices se pueden manipular:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$$

Propiedades de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

Propiedades de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Propiedades de las sumas

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 + i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

Sumas conocidas

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sum_{i=0}^{n} i^2$$

Sumas conocidas

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \begin{cases} n & si\ x = 1 \\ \dfrac{(x^{n+1} - 1)}{(x - 1)} & si\ x \neq 1 \end{cases}$$

Sumas conocidas

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

Sumas infinitas (series)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Sumas infinitas

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2+i}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} i=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\to diverge$$

Sumas infinitas

Si x=1

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} n \to diverge$$

Si $|x|$<1

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \frac{(x^{n+1}-1)}{(x-1)} = \frac{1}{1-x}$$

Acotar sumas infinitas

Si *f* es una función monótona creciente

$$\int_{m-1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_{m}^{n+1} f(x)dx$$

Si *f* es una función monótona decreciente

$$\int_{m}^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{i=m}^{n} f(i) \leq \int_{m-1}^{n} f(x)dx$$

Acotar sumas infinitas

Acotar:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

Sabemos que *f(i)=1/i* es una función monótona decreciente

$$\int_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq \int_{0}^{n} \frac{1}{x} dx$$

Acotar sumas infinitas

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1)$$

$$= \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x} dx = 1 + \ln(n)$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leq 1 + \ln(n)$$

Diseño y Análisis de Algoritmos

Sumas

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311