



Diseño y Análisis de Algoritmos

Recurrencias

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311



Contenido

- Recurrencias
- Solución de Recurrencias



Recurrencia

Una función sobre los números naturales en la cual el valor del término n se define con base en los valores para los términos anteriores

La definición debe tener una condición de terminación (condiciones iniciales)

Ejemplos de Recurrencias

Factorial

$$0! = 1$$

$$n! = n * (n-1)!$$

Números de Fibonacci

$$F(0) = 1$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Solución de Recurrencias

Resolver una recurrencia consiste en encontrar una expresión no recurrente para calcular el término n de la recurrencia

Factorial

$$0! = 1$$

$$n! = n(n - 1)(n - 2) \dots 1 = \prod_{i=1}^n i$$

Solución de Recurrencias

Para análisis de algoritmos es suficiente acotar asintóticamente la recurrencia, es decir encontrar g tal que $T(n) = \Theta(g(n))$, es decir:

$$T(n_0) = a_0$$

$$T(n) = f(n - 1, n - 2, \dots, n_0)$$

con

$$f(n) = \Theta(g(n))$$



Solución de Recurrencias

Hacer una conjetura y probarla por inducción.

$$T(0) = 1$$

$$T(n) = 2T(n - 1)$$



Solución de Recurrencias

Hacer una conjetura y probarla por inducción.

$$T(0) = 1$$

$$T(n) = 2T(n - 1)$$

Conjeturamos:

$$T(n) = 2^n$$

Y lo demostramos por inducción



Cómo hacer una conjetura ? (1)

Calcular los primeros términos y analizarlos para tratar de deducir la fórmula general.

$$T(0) = 1$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + 2$$

Cómo hacer una conjetura ? (2)

Sustituyendo la fórmula recurrente algunas veces y tratar d encontrar la fórmula no recurrente.

$$T(0) = 1$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + 2$$

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Haciendo un cambio de variable para tratar de llegar a una recurrencia más sencilla.

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

Tomando $n = 2^m$ nos queda:

$$T(2^0) = 1$$

$$T(2^m) = 3T(2^{m-1}) + 2^m$$

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Se resuelve la nueva recurrencia

$$T(2^0) = 1$$

$$T(2^m) = 3T(2^{m-1}) + 2^m$$

quedando:

$$T(2^m) = 3^{m+1} - 2^{m+1}$$

Al final se debe obtener la solución de la recurrencia original

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Si $n = 2^m$ entonces $m = \log_2 n$ con lo cual la solución nos queda como:

$$T(2^m) = 3^{m+1} - 2^{m+1}$$

$$T(n) = 3^{1+\log_2 n} - 2^{1+\log_2 n}$$

$$T(n) = 3 * 3^{\log_2 n} - 2 * 2^{\log_2 n}$$

$$T(n) = 3n^{\log_2 3} - 2n = \Theta(n^{\log_2 3})$$

Si n es una potencia de 2

Cómo hacer una conjetura ? (3)

En este caso la conjetura es que para

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

La solución para todo n es:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Otro ejemplo:

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n$$

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Otro ejemplo:

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n$$

Tomando $n = 4^m$ nos queda:

$$T(4^0) = 1$$

$$T(4^m) = 3T(4^{m-1}) + 4^m$$

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Se resuelve la nueva recurrencia

$$T(4^0) = 1$$

$$T(4^m) = 3T(4^{m-1}) + 4^m$$

quedando:

$$T(2^m) = 4^{m+1} - 3^{m+1}$$

Al final se debe obtener la solución de la recurrencia original

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Si $n = 4^m$ entonces $m = \log_4 n$ con lo cual la solución nos queda como:

$$T(4^m) = 4^{m+1} - 3^{m+1}$$

$$T(n) = 4^{1+\log_4 n} - 3^{1+\log_4 n}$$

$$T(n) = 4 * 4^{\log_4 n} - 3 * 3^{\log_4 n}$$

$$T(n) = 4n - 3n^{\log_4 3} = \Theta(n)$$

Si n es una potencia de 4

Cómo hacer una conjetura ? (3)

Siguiendo un proceso similar llegamos a la conjetura de que para

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n$$

La solución para todo n es:

$$T(n) = \Theta(n)$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Son recurrencias en las cuales $T(n)$ se puede escribir como una combinación lineal de los anteriores

$$T(n_0) = t_0$$

:

$$T(n_{k-1}) = t_{k-1}$$

$$T(n) = b_1T(n-1) + b_2T(n-2) + \cdots + b_kT(n-k)$$

O de forma general:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) = 0$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Si

$$T(n) = f(n)$$

$$T(n) = g(n)$$

son soluciones de $T(n)$ entonces

$$T(n) = cf(n) + dg(n)$$

También es una solución de $T(n)$

- Aplica para cualquier cantidad de soluciones

Recurrencias Homogéneas Lineales

Partiendo de:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) = 0$$

Si tomamos como conjetura que

$$T(n) = x^n$$

La recurrencia queda como:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_kx^{n-k} = 0$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Excepto por la solución trivial $x=0$, cualquier solución de:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k} = 0$$

Es también solución de:

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Esta ecuación es llamada la ecuación característica de la recurrencia $T(n)$ y el polinomio del lado izquierdo es el polinomio característico

Recurrencias Homogéneas Lineales

Como:

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Es un polinomio de grado k entonces tiene k raíces $r_1, r_2, \dots, r_k$ y supongamos que todas tienen multiplicidad 1, es decir todas son diferentes, entonces:

$$r_1^n, r_2^n, \dots, r_k^n$$

Son todas soluciones de $T(n)$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Por lo tanto para cualquier $c_1, c_2, \dots, c_k$:

$$T(n) = \sum_{i=1}^k c_i r_i^n$$

Es una solución de la recurrencia

Cuál solución tomamos ?

Recurrencias Homogéneas Lineales

Esto se hace dependiendo de las condiciones iniciales que debe ser k pues la recurrencia considera hasta $n-k$, por lo tanto tomamos:

$$\begin{aligned}c_1 r_1^0 &+ c_2 r_2^0 &+ \cdots + c_k r_k^0 &= t_0 \\c_1 r_1^1 &+ c_2 r_2^1 &+ \cdots + c_k r_k^1 &= t_1 \\&\vdots \\c_1 r_1^{k-1} &+ c_2 r_2^{k-1} &+ \cdots + c_k r_k^{k-1} &= t_{k-1}\end{aligned}$$

Resolvemos para $c_1, c_2, \dots, c_k$ y así obtenemos los valores de las constantes.

Recurrencias Homogéneas Lineales

Ejemplo (números de Fibonacci)

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$a_2 = ?$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Ejemplo (números de Fibonacci)

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

En este caso:

$$k = 2$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = -1$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Ejemplo 2

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 5$$

$$T(n) = 3T(n - 1) + 4T(n - 2)$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$a_2 = ?$$

Recurrencias Homogéneas Lineales

Ejemplo 2

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 5$$

$$T(n) = 3T(n - 1) + 4T(n - 2)$$

En este caso:

$$k = 2$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -3$$

$$a_2 = -4$$

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Si el polinomio característico:

$$P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

tiene al menos una raíz r con multiplicidad $m \geq 2$ entonces para algún otro polinomio $q(x)$:

$$P_k(x) = (x - r)^m q(x)$$

Consideremos:

$$U_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_kx^{n-k}$$

$$U'_n(x) = a_0nx^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \dots + a_k(n-k)x^{n-k-1}$$

$$xU'_n(x) = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \dots + a_k(n-k)x^{n-k}$$

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Claramente:

$$\begin{aligned} U_n(x) &= x^{n-k} P_k(x) \\ &= x^{n-k} (x - r)^m q(x) \end{aligned}$$

y

$$U'_n(x) = m(x - r)^{m-1} x^{n-k} q(x) + (x - r)^m [x^{n-k} q(x)]'$$

Por lo que r también es una raíz de $U'_n(x)$ y $xU'_n(x)$

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Es decir:

$$a_0 n r^n + a_1 (n-1) r^{n-1} + \dots + a_k (n-k) r^{n-k} = 0$$

Por lo cual $n r^n$ es una solución de la recurrencia

En general, si r es una raíz del polinomio característico con multiplicidad m , entonces:

$$r^n, n r^n, n^2 r^n, n^3 r^n, \dots, n^{m-1} r^n$$

Son todas soluciones de la recurrencia $T(n)$

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Por lo tanto si $r_1, r_2, \dots, r_s$ son las raíces diferentes del polinomio característico cada una con multiplicidad $m_1, m_2, \dots, m_s$ respectivamente, la solución general es:

$$T(n) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$$

Para cualquier conjunto de constantes c_{ij} con $i=1, \dots, s$ y $j=0, \dots, m_i - 1$, donde el número total de constantes es k

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2$$

$$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) - 4T(n-3)$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$a_2 = ?$$

$$a_3 = ?$$

Recurrencias Homogéneas Lineales (2)

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 2$$

$$T(n) = 5T(n-1) - 8T(n-2) - 4T(n-3)$$

En este caso:

$$k = 3$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -5$$

$$a_2 = 8$$

$$a_3 = 4$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Son recurrencias en las cuales $T(n)$ se puede escribir como una combinación lineal de los anteriores mas un término que no depende de T

$$T(n_0) = t_0$$

:

$$T(n_{k-1}) = t_{k-1}$$

$$T(n) = a_1T(n-1) + \dots + a_kT(n-k) + b^nP_d(n)$$

O de forma general:

$$a_0T(n) + a_1T(n-1) + \dots + a_kT(n-k) = b^nP_d(n)$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

En este caso el polinomio característico es:

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)(x - b)^{d+1} = 0$$

Y a partir de este polinomio se procede como en el caso de las recurrencias homogéneas lineales

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -2$$

$$b = 1$$

$$d = 0$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 2

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 2

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -2$$

$$b = 1$$

$$d = 1$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 3

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 4T(n - 1) - 2^n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 3

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 4T(n - 1) - 2^n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -4$$

$$b = 2$$

$$d = 0$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 4

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 4T(n - 1) + n2^n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales

Ejemplo 4

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 4T(n - 1) + n2^n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -4$$

$$b = 2$$

$$d = 1$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

Puede haber más de un término no recurrente

$$T(n_0) = t_0$$

:

$$T(n_{k-1}) = t_{k-1}$$

$$T(n) = a_1T(n-1) + \cdots + a_kT(n-k) + b_1^n P_{d_1}(n) \\ + \cdots + b_s^n P_{d_s}(n)$$

O de forma general:

$$a_0T(n) + \cdots + a_kT(n-k) = b^n P_d(n) + \cdots + b_s^n P_{d_s}(n)$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

En este caso el polinomio característico es:

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1} \dots (x - b_s)^{d_s+1} = 0$$

Y a partir de este polinomio se procede como en el caso de las recurrencias homogéneas lineales

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + n + 2^n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

Ejemplo

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 2T(n - 1) + n + 2^n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -2$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 2$$

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 0$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

Entonces la ecuación característica es:

$$(x - 2)(x - 1)^2(x - 2) = 0$$

Es decir:

$$(x - 1)^2(x - 2)^2 = 0$$

Con lo que:

$$r_1 = 1 \quad m_1 = 2$$

$$r_2 = 2 \quad m_2 = 2$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

La solución es de la forma:

$$T(n) = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$$

El sistema de ecuaciones para c_1, c_2, c_3, c_4 es:

$$n = 0 \quad c_1 + \quad + \quad c_3 + \quad = 0$$

$$n = 1 \quad c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 3$$

$$n = 2 \quad c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 12$$

$$n = 3 \quad c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 = 35$$

Recurrencias no Homogéneas Lineales (2)

La solución es:

$$c_1 = -2$$

$$c_2 = -1$$

$$c_3 = 2$$

$$c_4 = 1$$

Finalmente:

$$T(n) = n2^n + 2^{n+1} - n - 2$$

Método Maestro

Considere la recurrencia:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = cT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + dn^k$$

En este caso:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } c < b^k \\ \Theta(n^k \log_b(n)) & \text{si } c = b^k \\ \Theta(n^{\log_b c}) & \text{si } c > b^k \end{cases}$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^3$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^3$$

En este caso:

$$k = 3$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^3$$

Entonces, como $4 < 2^3$:

$$T(n) = \Theta(n^3)$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2$$

En este caso:

$$k = 2$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2$$

Entonces, como $4 = 2^2$:

$$T(n) = \Theta(n^2 \log_2(n))$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

Entonces, como $4 > 2^1$:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$$

Método Maestro (2)

Considere la recurrencia:

$$T(1) = a$$

$$T(n) = cT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + g(n)$$

con $g(n) = \Theta(n^k)$

En este caso:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } c < b^k \\ \Theta(n^k \log_b(n)) & \text{si } c = b^k \\ \Theta(n^{\log_b c}) & \text{si } c > b^k \end{cases}$$

Método Maestro (2)

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n^3 - 2n^2 + 2n + 17$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$b = ?$$

$$c = ?$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n^3 - 2n^2 + 2n + 17$$

En este caso:

$$k = 3$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Método Maestro

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n^3 - 2n^2 + 2n + 17$$

Entonces, como $4 < 2^3$:

$$T(n) = \Theta(n^3)$$

Cambio de rango

Considere la recurrencia no lineal:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = T^2(n - 1)$$

El objetivo es transformarla en una recurrencia Lineal

Cambio de rango

Considere la recurrencia no lineal:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = T^2(n - 1)$$

Tomaremos $U(n) = \log_2 T(n)$ con lo cual $T(n) = 2^{U(n)}$ quedando:

$$U(0) = \log_2 T(0) = \log_2(2) = 1$$

$$\begin{aligned} U(n) &= \log_2 T(n) = \log_2(T^2(n - 1)) \\ &= 2\log_2(T(n - 1)) \\ &= 2U(n - 1) \end{aligned}$$

Cambio de rango

Entonces la solución para $U(n)$ es:

$$U(n) = 2^n$$

Para obtener la solución de $T(n)$ recordemos que:

$$T(n) = 2^{U(n)}$$

Por lo cual finalmente queda:

$$T(n) = 2^{2^n}$$

Cambio de rango

Considere la misma recurrencia no lineal:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = T^2(n - 1)$$

Si tomamos $U(n) = \log_3 T(n)$ con lo cual $T(n) = 3^{U(n)}$ quedando:

$$\begin{aligned} U(n) &= \log_3 T(n) = \log_3 (T^2(n - 1)) \\ &= 2 \log_3 (T(n - 1)) \\ &= 2U(n - 1) \end{aligned}$$

Cuál es la diferencia ?

Cambio de rango

Ejemplo 2:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = 2^n T^2(n - 1)$$

Cambio de rango

Ejemplo 2:

$$T(0) = 2$$

$$T(n) = 2^n T^2(n - 1)$$

Tomaremos $U(n) = \log_2 T(n)$ con lo cual $T(n) = 2^{U(n)}$ quedando:

$$U(0) = \log_2 T(0) = \log_2(2) = 1$$

$$\begin{aligned} U(n) &= \log_2 T(n) = \log_2(2^n T^2(n - 1)) \\ &= \log_2(2^n) + 2\log_2(T(n - 1)) \\ &= n + 2U(n - 1) \end{aligned}$$

Cambio de rango

Quedando una recurrencia lineal:

$$U(0) = 1$$

$$U(n) = 2U(n - 1) + n$$

Cambio de rango

Considere la recurrencia no lineal:

$$U(0) = 1$$

$$U(n) = 2U(n - 1) + n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -2$$

$$b = 1$$

$$d = 1$$

Cambio de rango

Entonces la ecuación característica es:

$$(x - 2)(x - 1)^2 = 0$$

Con lo que:

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 & m_1 &= 1 \\ r_2 &= 1 & m_2 &= 2 \end{aligned}$$

Cambio de rango

La solución es de la forma:

$$U(n) = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$$

El sistema de ecuaciones para c_1, c_2, c_3 es:

$$n = 0 \quad c_1 + c_2 + \quad = 1$$

$$n = 1 \quad 2c_1 + c_2 + c_3 = 3$$

$$n = 2 \quad 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 8$$

Cambio de rango

La solución es:

$$c_1 = 3$$

$$c_2 = -2$$

$$c_3 = -1$$

Entonces la solución para $U(n)$ es:

$$U(n) = 3 * 2^n - n - 2$$

Cambio de rango

Para obtener la solución de $T(n)$ recordemos que:

$$T(n) = 2^{U(n)}$$

Por lo cual finalmente queda:

$$T(n) = 2^{3*2^n - n - 2}$$



Recurrencias (más ejemplos)

Recurrencias (más ejemplos)

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T(n - 1) + 3n + 3^n$$

En este caso:

$$k = ?$$

$$a_0 = ?$$

$$a_1 = ?$$

$$b = ?$$

$$d = ?$$

Recurrencias (más ejemplos)

$$T(0) = 0$$

$$T(n) = 3T(n - 1) + 3n + 3^n$$

En este caso:

$$k = 1$$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -3$$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 3$$

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 0$$

Recurrencias (más ejemplos)

Entonces la ecuación característica es:

$$(x - 3)(x - 1)^2(x - 3) = 0$$

Es decir:

$$(x - 1)^2(x - 3)^2 = 0$$

Con lo que:

$$r_1 = 1 \quad m_1 = 2$$

$$r_2 = 3 \quad m_2 = 2$$

Recurrencias (más ejemplos)

La solución es de la forma:

$$T(n) = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 3^n + c_4 n 3^n$$

El sistema de ecuaciones para c_1, c_2, c_3, c_4 es:

$$n = 0 \quad c_1 + \quad + \quad c_3 + \quad = 0$$

$$n = 1 \quad c_1 + c_2 + 3c_3 + 3c_4 = 6$$

$$n = 2 \quad c_1 + 2c_2 + 9c_3 + 18c_4 = 33$$

$$n = 3 \quad c_1 + 3c_2 + 27c_3 + 81c_4 = 135$$

Recurrencias (más ejemplos)

La solución es:

$$c_1 = -2.25$$

$$c_2 = -1.5$$

$$c_3 = 2.25$$

$$c_4 = 1$$

Finalmente:

$$T(n) = n3^n + 2.25 * 3^n - 1.5n - 2.25$$

Recurrencias (más ejemplos) (2)

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4\binom{n}{2}$$

En este caso aplica el teorema maestro ?

Recurrencias (más ejemplos) (2)

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4\binom{n}{2}$$

En este caso aplica el teorema maestro ?

$$\begin{aligned} 4\binom{n}{2} &= 4 \frac{n!}{2! (n-2)!} = 4 \frac{n(n-1)(n-2)!}{2! (n-2)!} \\ &= 2n^2 - 2n = O(n^2) \end{aligned}$$

Recurrencias (más ejemplos) (2)

Ejemplo:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4\binom{n}{2}$$

En este caso:

$$k = 2$$

$$b = 2$$

$$c = 4$$

Recurrencias (más ejemplos) (2)

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 4T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4\binom{n}{2}$$

Entonces, como $4 = 2^2$:

$$T(n) = \Theta(n^2 \log_2 n) = \Theta(n^2)$$

Recurrencias (más ejemplos) (3)

Considere la recurrencia no lineal:

$$T(0) = 2$$

$$T(1) = 2$$

$$T(n) = T(n - 1)T(n - 2)$$

Cómo procedemos ?

Recurrencias (más ejemplos) (3)

Considere la recurrencia no lineal:

$$T(0) = 2$$

$$T(1) = 2$$

$$T(n) = T(n - 1)T(n - 2)$$

Transformarla en una recurrencia Lineal

Cómo ?

Recurrencias (más ejemplos) (3)

$$T(0) = 2$$

$$T(1) = 2$$

$$T(n) = T(n-1)T(n-2)$$

Tomaremos $U(n) = \log_2 T(n)$ con lo cual
 $T(n) = 2^{U(n)}$ quedando:

$$U(0) = \log_2 T(0) = \log_2(2) = 1$$

$$U(1) = \log_2 T(1) = \log_2(2) = 1$$

$$\begin{aligned} U(n) &= \log_2 T(n) = \log_2(T(n-1)T(n-2)) \\ &= \log_2(T(n-1)) + \log_2(T(n-2)) \\ &= U(n-1) + U(n-2) \end{aligned}$$

Recurrencias (más ejemplos) (3)

Quedando una recurrencia lineal:

$$U(0) = 1$$

$$U(1) = 1$$

$$U(n) = U(n - 1) + U(n - 2)$$

Que es la recurrencia de Fibonacci con lo cual:

$$U(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Recurrencias (más ejemplos) (3)

Quedando finalmente:

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$



Diseño y Análisis de Algoritmos

Recurrencias

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311