



Diseño y Análisis de Algoritmos

Lógica

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311



Contenido

- Lógica de proposiciones
- Operaciones entre proposiciones
- Lógica de predicados
- Modelos de razonamiento



Proposición

Un enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad Falso o Verdadero

Ejemplos:

- Zacatlán está en Tlaxcala
- Brasil gano el mundial de futbol México 70

No son proposiciones

- Hola
- ¿Cómo te llamas?

Operaciones entre proposiciones

Dadas dos proposiciones p y q

Negación: $\neg p$

Es una proposición que toma el valor de verdad opuesto al de p

Disyunción: $p \vee q$

Es una proposición que es falsa si p y q son falsas y es verdadera en otro caso

Conjunción: $p \wedge q$

Es una proposición que es verdadera si p y q son verdaderas y es falsa en otro caso

Operaciones entre proposiciones

Dadas dos proposiciones p y q

Implicación: $p \rightarrow q$

Es una proposición que es falsa si p es verdadera y q es falsa y es verdadera en otro caso

Equivalencia: $p \leftrightarrow q$

Es una proposición que es verdadera si p y q tienen el mismo valor de verdad y es falsa en otro caso

Tablas de verdad

Es una tabla que indica los valores de verdad que toma una proposición dependiendo de los valores de verdad de sus componentes

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V

Equivalencia de proposiciones

Dos proposiciones p y q son equivalentes si siempre tiene el mismo valor de verdad y se denota como $p \Leftrightarrow q$

Una proposición que siempre es verdadera se denomina Tautología (T_0)

Una proposición que siempre es falsa se denomina Contradicción (F_0)

Nota:

Si $p \leftrightarrow q$ es una tautología entonces $p \Leftrightarrow q$

Propiedades de la lógica proposicional

Sean p, q, r tres proposiciones

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Propiedades de la lógica proposicional

Sean p, q, r tres proposiciones

$$p \vee p \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge p \Leftrightarrow p$$

$$p \vee F_0 \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$$

$$p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$$

$$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$$

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

Dual de una proposición

Si p es una proposición que sólo incluye los operadores $\neg \wedge \vee$ entonces el dual de p denotado por p^d es la proposición que se obtiene sustituyendo cada $\wedge$ por $\vee$, cada $\vee$ por $\wedge$, cada T_0 por F_0 y cada F_0 por T_0

Ejemplo:

El dual de $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee T_0)$

Es $(\neg p \vee q) \wedge (p \wedge F_0)$

Principio de Dualidad

Si p y q son dos proposiciones y $p \Leftrightarrow q$ entonces $p^d \Leftrightarrow q^d$

Reglas de Inferencia (modelos de razonamiento)

Modus Ponens

$$\frac{p \longrightarrow q \quad p}{q}$$

Modus Tollens

$$\frac{p \longrightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$$

Reglas de Inferencia (modelos de razonamiento)

Regla de conjunción

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q}$$

Silogismo disyuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q}$$

Reglas de Inferencia (modelos de razonamiento)

Silogismo

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow r$$

Contradicción

$$\neg p \rightarrow F_0$$

$$p$$



Predicados

Un propiedad que se aplica sobre una lista de argumentos (variables)

Ejemplo:

- x es un gato
 - argumento - x
 - propiedad - "es una gato"

Predicados

Comúnmente se usa una notación compacta estilo función

Ejemplo:

- $\text{Gato}(x) = x \text{ es un gato}$

Un predicado puede tener más de una variable

Ejemplo:

- $\text{Padre}(x,y) = x \text{ es padre de } y$

Predicados

Al instanciar todas las variable de un predicado se obtiene una proposición

Ejemplo:

- $\text{Gato}(\text{Tomás}) = \text{Tomás es un gato}$
- $\text{Padre}(\text{Pedro}, \text{Juan}) = \text{Pedro es padre de Juan}$

El conjunto de valores que pueden tomar las variable se le llama universo del discurso

Todo predicado está asociado a un universo del discurso

Operaciones entre predicados

Dados dos predicados $P(x)$ y $Q(y)$

Negación: $\neg P(x)$

Disyunción: $P(x) \vee Q(y)$

Conjunción: $P(x) \wedge Q(y)$

Implicación: $P(x) \rightarrow Q(y)$

Equivalencia: $P(x) \leftrightarrow Q(y)$

El resultado de estas operaciones es otro predicado



Cuantificadores

Dado un predicado $P(x)$ un cuantificador es una expresión que indica cuantos elementos del universo del discurso de la variable x satisfacen al predicado

Cuantificador Universal: $(\forall x)P(x)$

Indica que todos los elementos del universo del discurso de x hacen verdadero a $P(x)$

Cuantificador Existencial: $(\exists x)P(x)$

Indica que al menos un elemento del universo del discurso de x hace verdadero a $P(x)$

Cuantificadores

En un predicado cada variable puede estar cuantificada de manera diferente y el orden de los cuantificadores es importante

Ejemplo:

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ indica que para todos los elementos del universo del discurso de x existe un elemento del universo del discurso de y tal que $P(x, y)$ es verdadero

$(\exists y)(\forall x)P(x, y)$ indica que existe un elemento del universo del discurso de y tal que para todos los elementos del universo del discurso de x , $P(x, y)$ es verdadero

Cuantificadores

Considere el predicado $P(x, y) = x^2 - y^2 = 0$ si el universo del discurso de x y y son los números reales $\mathbb{R}$ entonces:

$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 - y^2 = 0)$ indica que para todo número real x existe un número real y tal que se satisface la ecuación $x^2 - y^2 = 0$, lo cual es verdadero

$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - y^2 = 0)$ indica que existe un número real y tal que para todo número real x se satisface la ecuación $x^2 - y^2 = 0$, lo cual es falso

Negación de cuantificadores

Cuantificador Universal:

$$\neg(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$$

La negación de que para todos los elementos del universo del discurso de x , $P(x)$ sea verdadero es equivalente a que exista un elemento del universo del discurso de x para el cual la negación de $P(x)$ es verdadera

Negación de cuantificadores

Cuantificador Existencial:

$$\neg(\exists x)P(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$$

La negación de que exista un elemento del universo del discurso de x para el cual $P(x)$ sea verdadero es equivalente a que para todos los elementos del universo del discurso de x la negación de $P(x)$ es verdadera

Negación de cuantificadores

En general las negaciones se distribuyen hasta que afecten solamente a predicados no cuantificados sin operadores adicionales

Ejemplo:

$$\neg(\forall x)[(\exists y)[(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(y, z))]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)\neg[(\exists y)[(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(y, z))]]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg[(\forall z)(P(x, y) \wedge Q(y, z))]$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)\neg(P(x, y) \wedge Q(y, z))$$

$$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x, y) \vee \neg Q(y, z))$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \quad (\forall x)P(x)}{(\forall x)Q(x)}$$

$$\frac{(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)] \quad (\forall x)\neg Q(x)}{(\forall x)\neg P(x)}$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \quad P(a)}{Q(a)}$$

$$\frac{(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \quad \neg Q(a)}{\neg P(a)}$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{(\forall x)P(x) \quad (\forall x)Q(x)}{(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)]}$$

$$\frac{(\forall x)[P(x) \longrightarrow Q(x)] \quad (\forall x)[Q(x) \longrightarrow R(x)]}{(\forall x)[P(x) \longrightarrow R(x)]}$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \quad (\forall x)\neg P(x)}{(\forall x)Q(x)}$$

$$\frac{(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \quad \neg P(a)}{Q(a)}$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{(\forall x)P(x)}{P(a)}$$

$$\frac{P(a)}{(\exists x)P(x)}$$

Reglas de Inferencia con cuantificadores

$$\frac{[(\exists x)\neg P(x)] \rightarrow F_0}{(\forall x)P(x)}$$

$$\frac{P(1) \quad (\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \rightarrow P(n+1)]}{(\forall n \in \mathbb{N})P(n)}$$



Diseño y Análisis de Algoritmos

Lógica

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311