Diseño y Análisis de Algoritmos
Demostraciones

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311

Contenido

- Axiomas, Teoremas y Corolarios
- ¿ Qué es una demostración ?
- Métodos de demostración

Axiomas, Teoremas y Corolarios

Axioma.- es una proposición que se considera verdadera y no puede ser demostrada a partir de otros axiomas.

- Algo tan obvio que no necesita demostrarse.

Teorema.- es una proposición que para considerarse verdadera se debe demostrar a partir de los axiomas u otros teoremas ya demostrados.

Corolario.- es una consecuencia **obvia** de un teorema que no necesita demostración

Demostración (Prueba)

Un argumento válido que a partir de los axiomas o algún otro enunciado que se sabe es verdadero permite concluir la veracidad del enunciado de un teorema.

Métodos de Demostración

Directa

Por Contradicción

Por Contrarecíproco

Por casos

Inducción Matemática

Demostración Directa

Consiste en aplicar una serie de premisas e implicaciones lógicas que se sabe que son verdaderas hasta concluir lo que se quiere demostrar.

- Para probar el enunciado $p \to q$, si se sabe que $p \to r$, $r \to s$ y $s \to q$, se puede concluir que $p \to q$ es verdadero.
- Para probar q, si se sabe que p es verdadero y además que $p \to r$, $r \to s$ y $s \to q$ se puede concluir que q es verdadero.

Demostración Directa (ejemplo 1)

Demostrar que si x es par entonces x^2 es par.

Demostración Directa (ejemplo 1)

Demostrar que si x es par entonces x^2 es par.

Si x es par entonces $x=2*a$ para algún entero a, entonces $x^2=(2*a)^2$, entonces $x^2=4*a^2$, entonces $x^2=2(2*a^2)$, entonces x^2 es par. ■

Demostración Directa (ejemplo 2)

Demostrar que $x \in \mathbb{R}$ entonces $x*0=0$

Demostración Directa (ejemplo 2)

Demostrar que $x \in \mathbb{R}$ entonces $x*0=0$

Claramente $x*0=x*0$ entonces $x*(0+0)=x*0$ entonces $x*0+x*0=x*0$ entonces $(x*0+x*0)+(-(x*0))=x*0+(-(x*0))$ entonces $x*0+(x*0+(-(x*0)))=x*0+(-(x*0))$ entonces $x*0+0=0$ entonces $x*0=0$ ■

Demostración por Contradicción

Consiste en partir de la negación de lo que se quiere demostrar y llegar a una contradicción, con lo cual lo que se quiere demostrar debe ser verdadero.

- Para probar p se parte de suponer que $\neg p$ es verdadero y si $\neg p \rightarrow r$, $r \rightarrow s$ y $s \rightarrow F_0$, se puede concluir que p es verdadero.

Demostración por Contradicción (ejemplo 1)

Demostrar que $x \in \mathbb{R}$ entonces $x*0=0$

Demostración por Contradicción (ejemplo 1)

Demostrar que $x \in \mathbb{R}$ entonces $x*0=0$

Suponga que $x \in \mathbb{R}$ y $x*0 \neq 0$ entonces:
$x*0+0 \neq 0+0$ entonces
$x*0+(x*0+(-(x*0))) \neq 0+(x*0+(-(x*0)))$
entonces $(x*0+x*0)+(-(x*0)) \neq x*0+(-(x*0))$
entonces $x*0+x*0 \neq x*0$ entonces
$x*(0+0) \neq x*0$ entonces $x*0 \neq x*0$ (F_0)
por lo tanto:

si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x*0=0$ ■

Demostración por Contradicción (ejemplo 2)

Demostrar que si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$.

Demostración por Contradicción (ejemplo 2)

Demostrar que si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$.

Suponga que $x*y=0$ y $x\neq 0$ y $y\neq 0$ entonces $(x*y)*y^{-1}=0*y^{-1}$ entonces $x*(y*y^{-1})=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0$ entonces $x=0$ (F_0) por lo tanto si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$ ■

Demostración por Contradicción (ejemplo 2)

Demostrar que **si $\boldsymbol{x*y=0}$ entonces $\boldsymbol{x=0}$ o $\boldsymbol{y=0}$**.

Suponga que $\boldsymbol{x*y=0}$ **y** $\boldsymbol{x\neq 0}$ **y** $\boldsymbol{y\neq 0}$ entonces $(x*y)*y^{-1}=0*y^{-1}$ entonces $x*(y*y^{-1})=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0$ entonces $x=0$ (F_0) por lo tanto si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$ ■

Demostración por Contradicción (ejemplo 2)

Demostrar que **si $\boldsymbol{x*y=0}$ entonces $\boldsymbol{x=0}$ o $\boldsymbol{y=0}$**.

Suponga que $\boldsymbol{x*y=0}$ **y** $\boldsymbol{x\neq 0}$ **y** $\boldsymbol{y\neq 0}$ entonces $(x*y)*y^{-1}=0*y^{-1}$ entonces $x*(y*y^{-1})=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0*y^{-1}$ entonces $x*1=0$ entonces $x=0$ (F_0) por lo tanto si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$ ■

$$\neg(p\rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p)\wedge(\neg q)$$
$$\Leftrightarrow(p\wedge(\neg q))$$

Demostración por Contrarecíproco

Consiste en demostrar el contrarecíproco aprovechando que [$p \rightarrow q \Leftrightarrow (\neg q) \rightarrow (\neg p)$] lo cual algunas veces es más fácil.

- Para probar que $p \rightarrow q$ es verdadero se prueba que $(\neg q) \rightarrow (\neg p)$ es verdadero y si se logra entonces se puede concluir $p \rightarrow q$ es verdadero.

Demostración por Contrarecíproco (ejemplo 1)

Demostrar que si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$.

Demostración por Contrarecíproco (ejemplo 1)

Demostrar que si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$.

Probaremos que si $x\neq0$ y $y\neq0$ entonces $x*y\neq0$

Si $x\neq0$ y $y\neq0$ entonces $x*y\neq0*y$ entonces $x*y\neq0$

Por lo tanto si $x*y=0$ entonces $x=0$ o $y=0$ ■

Demostración por Contrarecíproco (ejemplo 2)

Demostrar que si x^2 es impar *e*ntonces x es impar.

Demostración por Contrarecíproco (ejemplo 2)

Demostrar que si x^2 es impar entonces x es impar.

Probaremos que si x es par entonces x^2 es par

Si x es par entonces $x=2*a$ para algún entero a entonces $x^2=(2*a)^2$, entonces $x^2=4*a^2$, entonces $x^2=2(2*a^2)$, entonces x^2 es par.

Por lo tanto si x^2 es impar entonces x es impar ■

Demostración por Casos

Consiste en dividir el universo del discurso en casos y demostrar la proposición para cada uno de los casos.

- Es importante que los casos considerados cubran todo el universo del discurso.

Demostración por Casos (ejemplo 1)

Demostrar que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$

Demostración por Casos (ejemplo 1)

Demostrar que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$

Probaremos 2 casos $x > 0$ y $x < 0$

1) Si $x > 0$ entonces $x * x > 0 * x$ entonces $x^2 > 0$
2) Si $x < 0$ entonces $x + (-x) < 0 + (-x)$ entonces $0 < (-x)$ entonces $0 * (-x) < (-x) * (-x)$ entonces $0 < (-x)^2$ entonces $0 < x^2$ porque $\boldsymbol{(-x)^2 = x^2}$ entonces $x^2 > 0$

Por lo tanto si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ ■

Demostración por Casos (ejemplo 2)

Demostrar que para todo natural n, n^2+n+1 es impar

Demostración por Casos (ejemplo 2)

Demostrar que para todo natural n, n^2+n+1 es impar

Probaremos 2 casos n par y n impar

1) Si n es par entonces n^2 es par entonces n^2+n es par entonces n^2+n+1 es impar
2) Si n es impar entonces n^2 es impar entonces n^2+n es par entonces n^2+n+1 es impar

Por lo tanto, para todo natural n, n^2+n+1 es impar ■

Demostración por Inducción Matemática

Para probar que una propiedad se cumple para todos los números naturales basta probar que:

1) Paso base: la propiedad se cumple para 1
2) Paso de inducción: si la propiedad se cumple para n (hipótesis de inducción) entonces también se cumple para n+1

- Existen variaciones de la inducción, pero en esencia la idea es la misma.

Demostración por Inducción Matemática (variante)

Para probar que una propiedad se cumple para para todo número natural $n \geq n_0$ basta probar que:

1) Paso base: la propiedad se cumple para n_0
2) Paso de inducción: si la propiedad se cumple para n (hipótesis de inducción) entonces también se cumple para n+1

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 1)

Probar que para todo número natural n se cumple que n^3+2n es divisible por 3.

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 1)

Probar que para todo número natural n se cumple que n^3+2n es divisible por 3.

1) Para n=1, $n^3+2n=1^3+2=3$ que es divisible por 3
2) Si n^3+2n es divisible por 3 entonces

$$(n+1)^3+2(n+1)=(n^3+3n^2+3n+1)+(2n+2)$$
$$=(n^3+2n)+(3n^2+3n+3)$$
$$=(n^3+2n)+3(n^2+3n+1)$$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 1)

Y como ambos sumandos son divisibles por 3, uno por hipótesis de inducción y el otro porque es múltiplo de 3 entonces $(n+1)^3+2(n+1)$ es divisible por 3

Por lo tanto, para todo número natural n se cumple que n^3+2n es divisible por 3 ∎

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 2)

Probar que para todo número natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 2)

Probar que para todo número natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$

1) Para n=4, $2^4=16<24=4!$
2) Si $2^n < n!$ entonces

   $2^{(n+1)} = 2*2^n < 2*n! < (n+1)*n! = (n+1)!$

   con lo cual $2^{(n+1)} < (n+1)!$

Por lo tanto, para todo número natural $n \geq 4$ se cumple que $2^n < n!$ ■

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 3)

Probar que para todo número natural *n* se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 3)

Probar que para todo número natural *n* se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1) Para n=1

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = \frac{6}{6}$$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 3)

2) Si se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

entonces:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 3)

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n\,(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Demostración por Inducción Matemática (ejemplo 3)

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

Por lo tanto, para todo número natural *n* se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \blacksquare$$

Diseño y Análisis de Algoritmos
Demostraciones

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311