

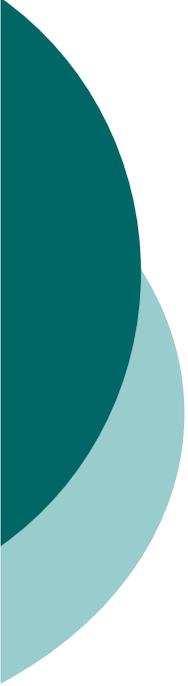
Diseño y Análisis de Algoritmos

Conteo

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa

ariel@inaoep.mx

Oficina 8311



Contenido

- Reglas de la suma y el producto
- Permutaciones
- Combinaciones



Regla de la suma

Si una tarea se puede realizar de m maneras y otra tarea se puede realizar de n maneras, entonces realizar cualquiera de ellas puede hacerse de:

$$m + n \text{ maneras}$$



Ejemplo 1: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C y 7 diferentes del lenguaje de programación Pascal.

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de un lenguaje de programación en esta biblioteca ?



Ejemplo 1: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C y 7 diferentes del lenguaje de programación Pascal.

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de un lenguaje de programación en esta biblioteca ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:

$$5 + 7 = 12 \text{ maneras}$$



Regla de la suma varias tareas

Si k tareas t_1, t_2, \dots, t_k pueden realizarse de m_1, m_2, \dots, m_k maneras, respectivamente, entonces realizar cualquiera de ellas puede hacerse de:

$$\sum_{i=1}^k m_i \quad \text{maneras}$$



Ejemplo 2: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C, 7 de Pascal, 4 de Fortran, 11 de Basic, 2 de Cobol, 5 de APL, 8 de Lisp y 10 de Matemáticas

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de programación en esta biblioteca ?



Ejemplo 2: Regla de la suma

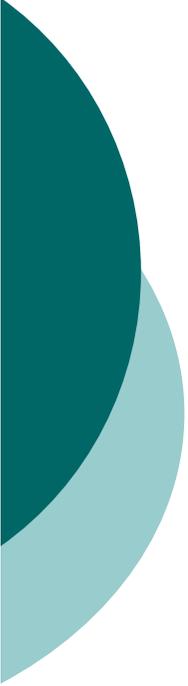
Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C, 7 de Pascal, 4 de Fortran, 11 de Basic, 2 de Cobol, 5 de APL, 8 de Lisp y 10 de Matemáticas

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de programación en esta biblioteca ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:

$$5 + 7 + 4 + 11 + 2 + 5 + 8 = 42 \text{ maneras}$$

Nota: Los 10 libros de Matemáticas no son de programación



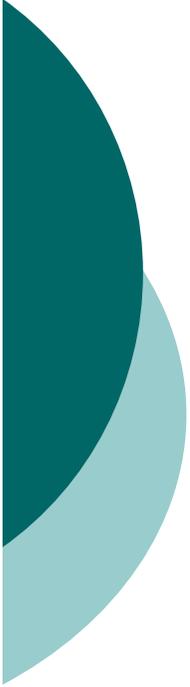
Ejemplo 3: Regla de la suma

Si Juan tiene dos amigos, Pedro y Luis y:

Pedro tiene 3 libros diferentes de programación

Luis tiene 5 libros diferentes de programación

¿ De cuántas maneras Juan puede obtener prestado un libro de programación ?



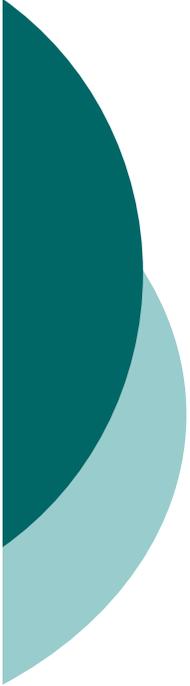
Ejemplo 3: Regla de la suma

Si Juan tiene dos amigos, Pedro y Luis y:
Pedro tiene 3 libros diferentes de programación
Luis tiene 5 libros diferentes de programación

¿ De cuántas maneras Juan puede obtener prestado un libro de programación ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:
entre 5 y 8 maneras

Nota: Los libros de Pedro no son necesariamente diferentes de los de Luis



Regla del producto

Si una tarea se puede realizar de m maneras y otra tarea se puede realizar de n maneras, entonces realizar primero una tarea y después la otra puede hacerse de:

$$m * n \text{ maneras}$$



Ejemplo 4: Regla del producto

Si en un grupo hay 8 hombres y 7 mujeres.

¿ De cuántas maneras puede formarse una pareja hombre-mujer ?



Ejemplo 4: Regla del producto

Si en un grupo hay 8 hombres y 7 mujeres.

¿ De cuántas maneras puede formarse una pareja hombre-mujer ?

Por la regla del producto esto se puede hacer de:

$$8 * 7 = 56 \text{ maneras}$$



Regla del producto varias tareas

Si k tareas t_1, t_2, \dots, t_k pueden realizarse de m_1, m_2, \dots, m_k maneras, respectivamente, entonces realizar las k tareas puede hacerse de:

$$\prod_{i=1}^k m_i \quad \text{maneras}$$



Ejemplo 5: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber ?



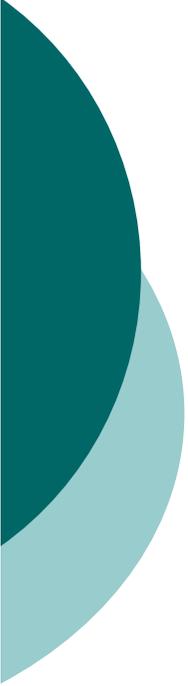
Ejemplo 5: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber ?

Por la regla del producto:

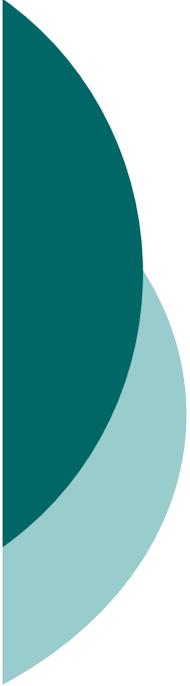
$$26 * 26 * 26 * 10 * 10 * 10 = 17,576,000$$



Ejemplo 6: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber si no se pueden repetir ni letras ni dígitos ?



Ejemplo 6: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber si no se pueden repetir ni letras ni dígitos ?

Por la regla del producto:

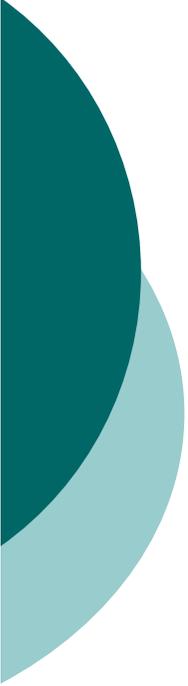
$$26 * 25 * 24 * 10 * 9 * 8 = 11,232,000$$



Ejemplo 7:

Si en un lenguaje de programación una variable puede ser de una letra o de una letra seguida de un dígito.

¿ Cuántas variables diferentes puede haber en este lenguaje de programación ?



Ejemplo 7:

Si en un lenguaje de programación una variable puede ser de una letra o de una letra seguida de un dígito.

¿ Cuántas variables diferentes puede haber en este lenguaje de programación ?

Por las reglas de la suma y el producto:

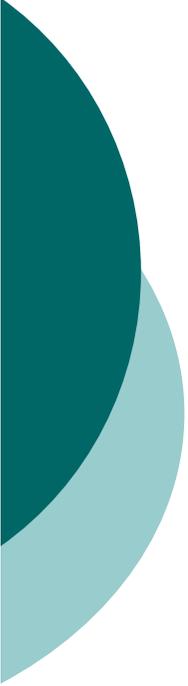
$$26 + (25 * 10) = 286$$



Permutaciones sin repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las permutaciones (ordenamientos) sin repetición de n en r , denotadas como $P(n, r)$ son:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$



Ejemplo 8: Permutaciones sin repetición

Si en un grupo hay 8 niños y 4 sillas diferentes.

¿ Cuántas maneras pueden ocuparse las 4 sillas si en cada silla solo se puede sentar un niño ?

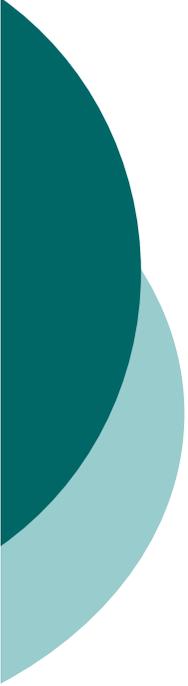


Ejemplo 8: Permutaciones sin repetición

Si en un grupo hay 8 niños y 4 sillas diferentes.

¿ Cuántas maneras pueden ocuparse las 4 sillas si en cada silla solo se puede sentar un niño ?

$$P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$



Ejemplo 9: Permutaciones sin repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos sin repetir pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?



Ejemplo 9: Permutaciones sin repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos sin repetir pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$



Permutaciones con repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las permutaciones con repetición de n en r , denotadas como $PR(n, r)$ son:

$$PR(n, r) = n^r$$



Ejemplo 10: Permutaciones con repetición

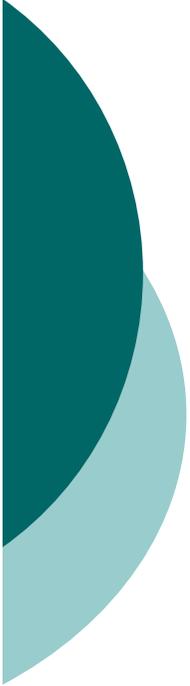
¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?



Ejemplo 10: Permutaciones con repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

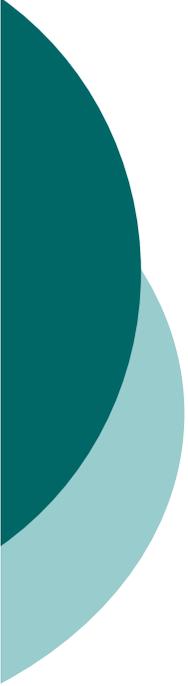
$$PR(5,3) = 5^3 = 125$$



Permutaciones

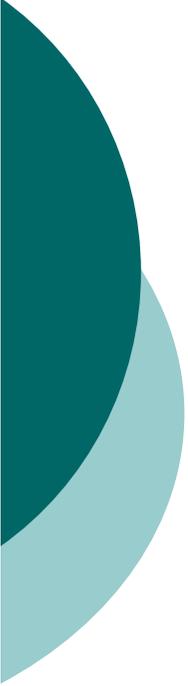
Si se tienen n objetos de r tipos diferentes tal que de cada tipo hay n_1, n_2, \dots, n_r respectivamente, el número de permutaciones (ordenamientos) de los n objetos es:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$



Ejemplo 11: Permutaciones

¿ Cuántas permutaciones de la palabra RELEER se pueden formar ?



Ejemplo 11: Permutaciones

¿ Cuántas permutaciones de la palabra RELEER se pueden formar ?

Note que hay 2 R's, 3 E's y 1 L

$$\frac{6!}{2! 3! 1!} = 60$$



Ejemplo 12

Si en una mesa circular con 6 sillas se sientan 6 personas

¿ De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si dos disposiciones se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra por rotación ?

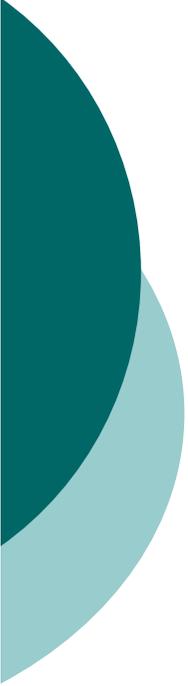


Ejemplo 12

Si en una mesa circular con 6 sillas se sientan 6 personas

¿ De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si dos disposiciones se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra por rotación ?

$$\frac{6!}{6} = 120$$



Ejemplo 13

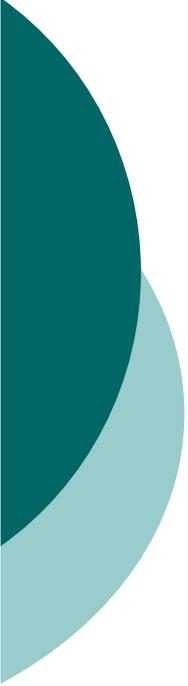
¿ Cuántos palíndromos de 6 letras en los cuales las letras que lo integran aparecen exactamente 2 veces pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?



Ejemplo 13

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras en los cuales las letras que lo integran aparecen exactamente 2 veces pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

$$P(26,3) = \frac{26!}{(26 - 3)!} = 15,600$$



Ejemplo 14

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras sin restricción pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?



Ejemplo 14

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras sin restricción pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

$$PR(26,3) = 26^3 = 17,576$$



Combinaciones sin repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las combinaciones sin repetición de n en r , denotadas como $C(n, r)$ son:

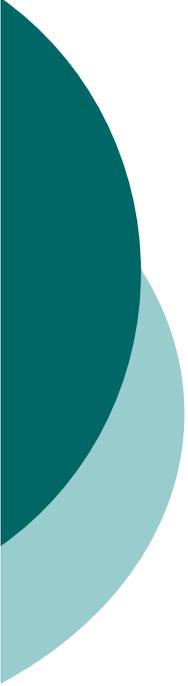
$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n - r)!}$$



Combinaciones sin repetición

Claramente:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$$



Ejemplo 15

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse un equipo de 4 personas ?



Ejemplo 15

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse un equipo de 4 personas ?

$$C(14,4) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4! (14 - 4)!} = 1001$$



Ejemplo 16

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse tres equipos de 4 personas y uno de 2 ?



Ejemplo 16

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse tres equipos de 4 personas y uno de 2 ?

$$\text{Equipo 1: } C(14,4) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = 1001$$

$$\text{Equipo 2: } C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

$$\text{Equipo 3: } C(6,4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

$$\text{Equipo 4: } C(2,2) = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$$



Ejemplo 16

Finalmente aplicando la regla del producto:

$$\binom{14}{4} \binom{10}{4} \binom{6}{4} \binom{2}{2} = 1001 * 210 * 15 \\ = 3,153,150$$



Combinaciones con repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las combinaciones con repetición de n en r , denotadas como $C(n, r)$ son:

$$CR(n, r) = \binom{n + r - 1}{r}$$

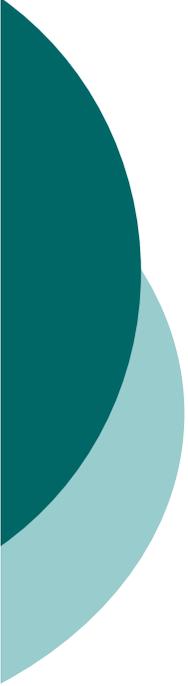
Nota: r puede ser mayor que n
 n son los distinguibles (diferentes)
 r son los no distinguibles



Ejemplo 17

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se puede pedir una docena de pasteles ?

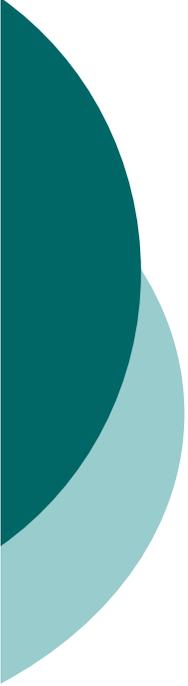


Ejemplo 17

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se puede pedir una docena de pasteles ?

$$\begin{aligned} \text{CR}(20,12) &= \binom{20 + 12 - 1}{12} = \binom{31}{12} \\ &= 141,120,525 \end{aligned}$$



Ejemplo 18

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se pueden pedir dos docenas de pasteles ?



Ejemplo 18

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se pueden pedir dos docenas de pasteles ?

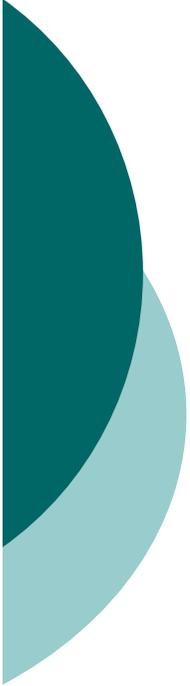
$$\begin{aligned} \text{CR}(20,24) &= \binom{20 + 24 - 1}{24} = \binom{43}{24} \\ &= 800,472,431,850 \end{aligned}$$



Ejemplo 19

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana ?



Ejemplo 19

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana ?

$$\begin{aligned} CR(4,3)CR(4,6) &= \binom{4+3-1}{3} \binom{4+6-1}{6} \\ &= \binom{6}{3} \binom{9}{6} = 20 * 84 \\ &= 1,680 \end{aligned}$$



Ejemplo 20

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana y al menos una naranja ?



Ejemplo 20

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana y al menos una naranja ?

$$\begin{aligned} CR(4,3)CR(4,2) &= \binom{4+3-1}{3} \binom{4+2-1}{2} \\ &= \binom{6}{3} \binom{5}{2} = 20 * 10 \\ &= 200 \end{aligned}$$



Ejemplo 21

Considere la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

¿ Cuántas soluciones enteras existen ?



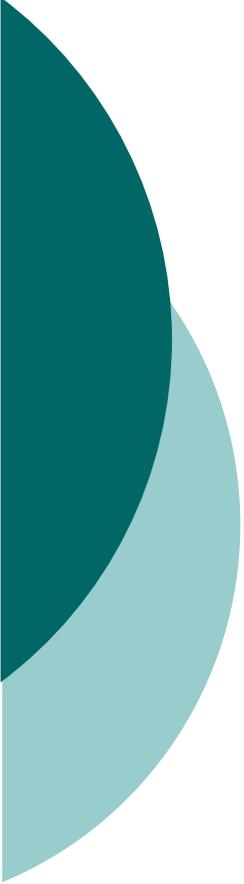
Ejemplo 21

Considere la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

¿ Cuántas soluciones enteras existen ?

$$CR(4,7) = \binom{4 + 7 - 1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$



Diseño y Análisis de Algoritmos

Conteo

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311