Diseño y Análisis de Algoritmos
Conteo

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311

Contenido

- Reglas de la suma y el producto
- Permutaciones
- Combinaciones

Regla de la suma

Si una tarea se puede realizar de m maneras y otra tarea se puede realizar de n maneras, entonces realizar cualquiera de ellas puede hacerse de:

$$m + n \quad \text{maneras}$$

Ejemplo 1: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C y 7 diferentes del lenguaje de programación Pascal.

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de un lenguaje de programación en esta biblioteca ?

Ejemplo 1: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C y 7 diferentes del lenguaje de programación Pascal.

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de un lenguaje de programación en esta biblioteca ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:

$$5 + 7 = 12 \text{ maneras}$$

Regla de la suma varias tareas

Si k tareas t_1, t_2, …, t_k pueden realizarse de m_1, m_2, …, m_k maneras, respectivamente, entonces realizar cualquiera de ellas puede hacerse de:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \quad \text{maneras}$$

Ejemplo 2: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C, 7 de Pascal, 4 de Fortran, 11 de Basic, 2 de Cobol, 5 de APL, 8 de Lisp y 10 de Matemáticas

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de programación en esta biblioteca ?

Ejemplo 2: Regla de la suma

Si una biblioteca tiene 5 libros diferentes del lenguaje de programación C, 7 de Pascal, 4 de Fortran, 11 de Basic, 2 de Cobol, 5 de APL, 8 de Lisp y 10 de Matemáticas

¿ De cuántas maneras puede obtenerse un libro de programación en esta biblioteca ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:

$$5 + 7 + 4 + 11 + 2 + 5 + 8 = 42 \text{ maneras}$$

Nota: Los 10 libros de Matemáticas no son de programación

Ejemplo 3: Regla de la suma

Si Juan tiene dos amigo, Pedro y Luis y:

Pedro tiene 3 libros diferentes de programación

Luis tiene 5 libros diferentes de programación

¿ De cuántas maneras Juan puede obtener prestado un libro de programación ?

Ejemplo 3: Regla de la suma

Si Juan tiene dos amigo, Pedro y Luis y:

Pedro tiene 3 libros diferentes de programación

Luis tiene 5 libros diferentes de programación

¿ De cuántas maneras Juan puede obtener prestado un libro de programación ?

Por la regla de la suma esto se puede hacer de:

entre 5 y 8 maneras

Nota: Los libros de Pedro no son necesariamente diferentes de los de Luis

Regla del producto

Si una tarea se puede realizar de m maneras y otra tarea se puede realizar de n maneras, entonces realizar primero una tarea y después la otra puede hacerse de:

$$m * n \quad \text{maneras}$$

Ejemplo 4: Regla del producto

Si en un grupo hay 8 hombres y 7 mujeres.

¿ De cuántas maneras puede formarse una pareja hombre-mujer ?

Ejemplo 4: Regla del producto

Si en un grupo hay 8 hombres y 7 mujeres.

¿ De cuántas maneras puede formarse una pareja hombre-mujer ?

Por la regla del producto esto se puede hacer de:

$$8 * 7 = 56 \text{ maneras}$$

Regla del producto varias tareas

Si k tareas $t_1, t_2, \ldots, t_k$ pueden realizarse de $m_1, m_2, \ldots, m_k$ maneras, respectivamente, entonces realizar las k tareas puede hacerse de:

$$\prod_{i=1}^{k} m_i \quad \text{maneras}$$

Ejemplo 5: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber ?

Ejemplo 5: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber ?

Por la regla del producto:

$$26 * 26 * 26 * 10 * 10 * 10 = 17,576,000$$

Ejemplo 6: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber si no se pueden repetir ni letras ni dígitos ?

Ejemplo 6: Regla del producto

Si una placa consta de 3 letras y tres dígitos y hay 26 letras diferentes (A-Z) y 10 dígitos diferentes (0-9).

¿ Cuántas placas diferentes puede haber si no se pueden repetir ni letras ni dígitos ?

Por la regla del producto:

$$26 * 25 * 24 * 10 * 9 * 8 = 11{,}232{,}000$$

Ejemplo 7:

Si en un lenguaje de programación una variable puede ser de una letra o de una letra seguida de un dígito.

¿ Cuántas variables diferentes puede haber en este lenguaje de programación ?

Ejemplo 7:

Si en un lenguaje de programación una variable puede ser de una letra o de una letra seguida de un dígito.

¿ Cuántas variables diferentes puede haber en este lenguaje de programación ?

Por las reglas de la suma y el producto:

$$26 + (25 * 10) = 286$$

Permutaciones sin repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las permutaciones (ordenamientos) sin repetición de n en r, denotadas como *P*(*n*,*r*) son:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 8: Permutaciones sin repetición

Si en un grupo hay 8 niños y 4 sillas diferentes.

¿ Cuántas maneras pueden ocuparse las 4 sillas si en cada silla solo se puede sentar un niño ?

Ejemplo 8: Permutaciones sin repetición

Si en un grupo hay 8 niños y 4 sillas diferentes.

¿ Cuántas maneras pueden ocuparse las 4 sillas si en cada silla solo se puede sentar un niño ?

$$P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

Ejemplo 9: Permutaciones sin repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos sin repetir pueden formarse son los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

Ejemplo 9: Permutaciones sin repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos sin repetir pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Permutaciones con repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las permutaciones con repetición de n en r, denotadas como $PR(n,r)$ son:

$$PR(n,r) = n^r$$

Ejemplo 10: Permutaciones con repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

Ejemplo 10: Permutaciones con repetición

¿ Cuántos números diferentes de 3 dígitos pueden formarse con los dígitos impares (1,3,5,7,9) ?

$$PR(5,3) = 5^3 = 125$$

Permutaciones

Si se tienen n objetos de r tipos diferentes tal que de cada tipo hay n_1, n_2, …, n_r respectivamente, el número de permutaciones (ordenamientos) de los n objetos es:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}$$

Ejemplo 11: Permutaciones

¿ Cuántas permutaciones de la palabra RELEER se pueden formar ?

Ejemplo 11: Permutaciones

¿ Cuántas permutaciones de la palabra RELEER se pueden formar ?

Note que hay 2 R’s, 3 E′s y 1 L

$$\frac{6!}{2!\,3!\,1!} = 60$$

Ejemplo 12

Si en una mesa circular con 6 sillas se sientan 6 personas

¿ De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si dos disposiciones se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra por rotación ?

Ejemplo 12

Si en una mesa circular con 6 sillas se sientan 6 personas

¿ De cuántas maneras diferentes pueden sentarse si dos disposiciones se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra por rotación ?

$$\frac{6!}{6} = 120$$

Ejemplo 13

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras en los cuales las letras que lo integran aparecen exactamente 2 veces pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

Ejemplo 13

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras en los cuales las letras que lo integran aparecen exactamente 2 veces pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

$$P(26,3) = \frac{26!}{(26-3)!} = 15{,}600$$

Ejemplo 14

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras sin restricción pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

Ejemplo 14

¿ Cuántos palíndromos de 6 letras sin restricción pueden formarse con las 26 letras del alfabeto ?

$$\mathrm{PR}(26{,}3) = 26^3 = 17{,}576$$

Combinaciones sin repetición

Si se tienen n objetos diferentes, las combinaciones sin repetición de n en r, denotadas como $C(n,r)$ son:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Combinaciones sin repetición

Claramente:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$$

Ejemplo 15

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse un equipo de 4 personas ?

Ejemplo 15

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse un equipo de 4 personas ?

$$C(14,4) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!\,(14-4)!} = 1001$$

Ejemplo 16

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse tres equipos de 4 personas y uno de 2 ?

Ejemplo 16

Si se tiene un grupo de 14 personas

¿ De cuántas formas puede formarse tres equipos de 4 personas y uno de 2 ?

Equipo 1: $C(14,4) = \binom{14}{4} = \frac{14!}{4!(14-4)!} = 1001$

Equipo 2: $C(10,4) = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$

Equipo 3: $C(6,4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$

Equipo 4: $C(2,2) = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1$

Ejemplo 16

Finalmente aplicando la regla del producto:

$$\binom{14}{4}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = 1001 * 210 * 15$$
$$= 3{,}153{,}150$$

Combinaciones con repetición

Si se tienen *n* objetos diferentes, las combinaciones con repetición de *n* en *r*, denotadas como *C*(*n*,*r*) son:

$$CR(n,r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Nota: *r* puede ser mayor que *n*

n son los distinguibles (diferentes)

r son los no distinguibles

Ejemplo 17

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se puede pedir una docena de pasteles ?

Ejemplo 17

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se puede pedir una docena de pasteles ?

$$\mathrm{CR}(20{,}12) = \binom{20+12-1}{12} = \binom{31}{12}$$

$$= 141{,}120{,}525$$

Ejemplo 18

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se pueden pedir dos docenas de pasteles ?

Ejemplo 18

Si en una pastelería ha 20 tipos diferentes de pasteles.

¿ De cuántas maneras se pueden pedir dos docenas de pasteles ?

$$\mathrm{CR}(20,24) = \binom{20+24-1}{24} = \binom{43}{24}$$

$$= 800{,}472{,}431{,}850$$

Ejemplo 19

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana ?

Ejemplo 19

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana ?

$$CR(4,3)CR(4,6) = \binom{4+3-1}{3}\binom{4+6-1}{6}$$

$$= \binom{6}{3}\binom{9}{6} = 20 * 84$$

$$= 1{,}680$$

Ejemplo 20

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana y al menos una naranja ?

Ejemplo 20

Se quieren repartir 7 manzanas y 6 naranjas entre 4 niños.

¿ De cuántas maneras se pueden repartir las 13 frutas si se quiere que cada niño reciba al menos una manzana y al menos una naranja ?

$$CR(4,3)CR(4,2) = \binom{4+3-1}{3}\binom{4+2-1}{2}$$

$$= \binom{6}{3}\binom{5}{2} = 20 * 10$$

$$= 200$$

Ejemplo 21

Considere la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

¿ Cuántas soluciones enteras existen ?

Ejemplo 21

Considere la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

¿ Cuántas soluciones enteras existen ?

$$CR(4,7) = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = 120$$

Diseño y Análisis de Algoritmos
Conteo

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311