Diseño y Análisis de Algoritmos
Conjuntos

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311

Contenido

- Conjuntos
- Operaciones entre conjuntos
- Conjuntos infinitos

Conjuntos

Conjunto es una colección bien definida de elementos

- Por bien definida se entiende que para cada elemento posible se puede decidir si pertenece o no pertenece al conjunto
- Los conjuntos en general se definen relativos a un conjunto universo U que contiene todos los elementos posibles

Notación: - Usualmente mayúsculas para conjuntos y minúsculas para elementos

- Que un elemento *x* pertenezca a un conjunto *A* se denota como $x \in A$

Formas de definir un conjunto

Extensional: enumerar todos los elementos del conjunto.

- $A=\{1,2,3,4,5\}$
- $A=\{2,4,6,8\}$

Intensional: expresar la propiedad que cumplen los elementos de un conjunto.

- $A=\{x|x$ es un número entero $1 \leq x \leq 5\}$
- $A=\{x|x$ es un número entero par $1 < x < 10\}$

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos son iguales si tiene exactamente los mismos elementos.

Ejemplo: si

$A=\{2,4,6,8\}$

$B=\{x|x \text{ es un número entero par } 1 < x < 10\}$

Entonces $A = B$

Subconjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B* de un universo *U*, *A* es un subconjunto de *B* si todo elemento de *A* es también elemento de *B*, lo cual se denota como $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$

Ejemplo: si

$A=\{2,4,6,8\}$

$B=\{x|x$ es un número entero par $1 < x < 10\}$

Entonces $A \subseteq B$

Subconjuntos propios

Dados dos conjuntos *A* y *B* de un universo *U*, *A* es un subconjunto de *B* si todo elemento de *A* es también elemento de *B* y $A \neq B$, lo cual se denota como $A \subset B$ o $B \supset A$

Ejemplo: si

$A=\{2,4\}$

$B=\{x|x$ es un número entero par $1 < x < 10\}$

Entonces $A \subset B$

Cardinal de un conjunto

El cardinal de un conjunto A se define como el número de elementos de A y se denota como $|A|$

Ejemplo: si

$A=\{2,4,6,8\}$

Entonces $|A|=4$

Conjunto vacío

Si el cardinal de un conjunto es 0, es decir no tiene elementos se le denomina conjunto vacío y se denota como $\emptyset$ o $\{\}$

Notas:

$|\emptyset|=0$

$\{\emptyset\} \neq \emptyset$ puesto que $|\{\emptyset\}|=1$

Conjunto potencia

El conjunto potencia de un conjunto A, denotado por $P(A)$ o 2^A es el conjunto que contiene a todo los subconjuntos de A

Notas: $|P(A)| = 2^{|A|}$

$\emptyset \in P(A)$ y $A \in P(A)$

Ejemplo: Si $A=\{2,4,6\}$

Entonces: $P(A)=\{ \emptyset,\{2\},\{4\},\{6\},$
$\{2,4\},\{2,6\},\{4,6\},$
$\{2,4,6\} \}$

Operaciones de conjuntos

Dados dos conjuntos *A* y *B* de un universo *U*

Unión: $A \cup B = \{x \in U | \ x \in A \ \text{o} \ x \in B\}$

Intersección: $A \cap B = \{x \in U | \ x \in A \ \text{y} \ x \in B\}$

Diferencia: $A - B = \{x \in U | \ x \in A \ y \ x \notin B\}$

Dif. Simétrica: $A \triangle B = \{x \in U | \ x \in A \cup B \ \text{y} \ x \notin A \cap B\}$

Complemento: $\bar{A} = \{x \in U | \ x \notin A\}$

Ejemplos de operaciones de conjuntos

Dados dos conjuntos A,B de un universo U

$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{2,3,4,5\}$

$$A \cup B = \{2,3,4,5,6,8\}$$
$$A \cap B = \{2,4\}$$
$$A - B = \{6,8\}$$
$$A \triangle B = \{3,5,6,8\}$$
$$\bar{A} = \{0,1,3,5,7,9\}$$

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos *A*,*B* de un universo *U*

El producto cartesiano de *A* y *B* denotado como *A*x*B* se define como:

$$A \times B = \{(x, y) | \, x \in A \;\; \text{y} \;\; y \in B\}$$

A partir del producto cartesiano se define lo que es una relación, una función, un orden, etc.

Propiedades de conjuntos

Si $A \subset B$ entonces: $A \cup B = B$

$A \cap B = A$

$\bar{B} \subseteq \bar{A}$

Doble complemento: $\bar{\bar{A}} = A$

Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Propiedades de conjuntos

Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Idempotencia: $A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Identidad: $A \cup \phi = A$

$A \cap U = A$

Propiedades de conjuntos

Inversas: $A \cup \bar{A} = U$

$A \cap \bar{A} = \phi$

Dominación: $A \cup U = U$

$A \cap \phi = \phi$

Absorción: $A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

Conjuntos finitos e infinitos

Un conjunto es finito si su cardinal es un numero natural.

Ejemplo: $A=\{1,2,3,4,5\}$ es finito puesto que $|A|=5$ que es un número natural

Un conjunto es infinito si no es finito.

Ejemplo: $A=\{x|x$ es un número entero $> 3\}$

Operaciones con conjuntos infinitos

Dados tres conjuntos *A,B,C,D* de un universo *U* si *A,B* son infinitos y *C,D son* finitos entonces:

U es infinito

$A \cup B$ es infinito

$A \cup C$ es infinito

$A \cap B$ puede ser finito o infinito

$A \cap C$ es finito

$\bar{A}$ puede ser finito o infinito

$\bar{C}$ es infinito

Operaciones con conjuntos infinitos

Dados tres conjuntos *A,B,C,D* de un universo *U* si *A,B* son infinitos y *C,D son* finitos entonces:

- $A - B$ puede ser finito o infinito
- $A - C$ es infinito
- $C - A$ es finito
- $A \triangle B$ puede ser finito o infinito
- $A \triangle C$ es infinito
- *P*(*A*) es infinito
- *A* x *B* es infinito
- *A* x *C* es infinito

Propiedades de conjuntos finitos e infinitos

Dados tres conjuntos *A,B,C,D* de un universo *U* si *A,B* son infinitos y *C,D son* finitos entonces:

$|A|$ no está definido

$|C \cup D| = |C| + |D| - |C \cap D|$

$|P(C)| = 2^{|C|}$

$|C \times D| = |C| * |D|$

$|C - D| = |C| - |C \cap D|$

$|C \triangle D| = |C \cup D| - |C \cap D|$

Conjuntos de Números

$\mathbb{N}$ El conjunto de los números naturales

$\mathbb{Z}$ El conjunto de los enteros

$\mathbb{Q}$ El conjunto de los números racionales

$\mathbb{I}$ El conjunto de los números Irracionales

$\mathbb{R}$ El conjunto de los números reales

$\mathbb{C}$ El conjunto de los números complejos

Conjuntos infinitos

Un conjunto infinito pueden ser:

Numerable si existe una biyección con los números naturales

No numerables si no es numerable

Problemas de conjuntos

En una escuela de 50 alumnos, 30 estudian C, 25 estudian Java y 10 estudian ambos
¿Cuántos alumnos estudian algún lenguaje de programación ?

Problemas de conjuntos

En una escuela de 50 alumnos, 30 estudian C, 25 estudian Java y 10 estudian ambos
¿Cuántos alumnos estudian algún lenguaje de programación ?

Sabemos:

$$|A| = 30, |B| = 25 \; y \; |A \cap B| = 10$$

Buscamos:

$$|A \cup B| = ?$$

Problemas de conjuntos

En una escuela de 50 alumnos, 30 estudian C, 25 estudian Java y 10 estudian ambos
¿Cuántos alumnos estudian algún lenguaje de programación ?

Sabemos:

$$|A| = 30, |B| = 25 \; y \; |A \cap B| = 10$$

Buscamos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 30+25\text{-}10=45$$

Problemas de conjuntos

Un cierto circuito lógico puede tener tres defectos D1, D2, D3. Sea A el conjunto de los que tienen el defeco D1, B el conjunto de los que tienen el defecto D2 y C el conjunto de los que tienen el defecto D3. En una muestra de 100 se sabe que:

$$|A| = 23, |B| = 26 \; y \; |C| = 30$$
$$|A \cap B| = 7, |A \cap C| = 8, |B \cap C| = 10$$
$$|A \cap B \cap C| = 3$$

¿Cuántos circuitos defectuosos hay en la muestra?

$$|A \cup B \cup C| =$$

Problemas de conjuntos

$|A| = 23, |B| = 26\ y\ |C| = 30$
$|A \cap B| = 7, |A \cap C| = 8, |B \cap C| = 10$
$|A \cap B \cap C| = 3$

¿Cuántos circuitos defectuosos hay en la muestra?

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 23+26+30 -7-8-10 +3 = 57$$

Diseño y Análisis de Algoritmos
Conjuntos

Dr. Jesús Ariel Carrasco Ochoa
ariel@inaoep.mx
Oficina 8311