



**I
N
A
O
E**

Métodos Libres de Malla para Ecuaciones Diferenciales Parciales Evolutivas

J. Antonio Muñoz-Gómez, Pedro González-Casanova
Henríquez, Gustavo Rodríguez-Gómez

Reporte Técnico No. CCC-05-001
12 de enero de 2005

© Coordinación de Ciencias Computacionales
INAOE

Luis Enrique Erro 1
Sta. Ma. Tonantzintla,
72840, Puebla, México.



Meshfree Methods for Evolutionary Partial Differential Equations

J. Antonio Muñoz-Gómez¹, Pedro González-Casanova Henríquez²,
Gustavo Rodríguez-Gómez³

Coordinación de Ciencias Computacionales, Instituto Nacional
de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Luis Enrique Erro 1,
Sta. Ma. Tonantzintla, C.P. 72840, Puebla, México.
^{1,3}{jantonio, grodrig}@inaoep.mx

Cómputo Científico, DGSCA, Universidad Nacional
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito
Exterior, C.P. 04510, México D.F.
²pedrogc@dgsca2.unam.mx

Abstract. It is presented the numerical solution of partial differential equations (PDE) employing radial basis functions (RBF) through the asymmetrical collocation method, which is based on a set of random points and it does not require of a mesh process, as occurs in finite differences method, finite volume method and finite element method. We show two examples using the multiquadric kernel: convection - diffusion 1D with forward Euler for time discretization and Poisson 2D with domain decomposition, which can handle huge data volumes and reduce the condition number of the resulting algebraic system in each partition. The selection of the parameter c , of the multiquadric kernel, is realized through an exhaustive search of such form that minimizes the root mean square. The obtained numerical results show a high superiority in the accuracy and in the facility of implementation in comparison with finite differences.

Keywords. Meshless methods, partial differential equation, radial basis function, domain decomposition, advection-diffusion, Poisson.

Métodos Libres de Malla para Ecuaciones Diferenciales Parciales Evolutivas

J. Antonio Muñoz-Gómez¹, Pedro González-Casanova Henríquez²,
Gustavo Rodríguez-Gómez³

Coordinación de Ciencias Computacionales, Instituto Nacional
de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Luis Enrique Erro 1,
Sta. Ma. Tonantzintla, C.P. 72840, Puebla, México.
^{1,3}{jantonio, grodrig}@inaoep.mx

Cómputo Científico, DGSCA, Universidad Nacional
Autónoma de México, Ciudad Universitaria, Circuito
Exterior, C.P. 04510, México D.F.
²pedrogc@dgsca2.unam.mx

Resumen. Se presenta la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) empleando funciones de base radial (FBR) mediante el método de colocación asimétrico el cual está basado en un conjunto de nodos aleatorios y no requiere de un proceso de mallado, como ocurre en diferencias finitas, volumen finito y elemento finito. Se muestran dos ejemplos de aplicación empleando el núcleo multicuadrado: convección-difusión 1D con Euler hacia adelante para discretizar el tiempo y Poisson 2D con descomposición de dominio, con el cual podemos manejar grandes volúmenes de datos y se disminuye el número condición del sistema algebraico resultante en cada partición. La selección del parámetro c del núcleo multicuadrado es realizada mediante una búsqueda exhaustiva de tal forma que minimice el error cuadrático medio. Los resultados numéricos obtenidos muestran una clara superioridad de exactitud y facilidad de implementación en comparación con diferencias finitas.

Palabras Clave. Métodos libres de malla, ecuaciones diferenciales parciales, funciones de base radial, descomposición de dominio, convección-difusión, Poisson.

1. Introducción

Tradicionalmente, la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales es realizada vía métodos de diferencias finitas DF, elemento finito EF y volumen finito VF. Estos métodos tienen en común que requieren de una malla que da el soporte a la solución numérica con un orden de convergencia algebraico.

Para reducir los tiempos de cómputo se han desarrollado los métodos libres de malla MLM¹, como su nombre lo indica no requieren de una malla para obtener la solución numérica de la ecuación diferencial parcial EDP. Los métodos libres de mallas están basados en un conjunto independiente de puntos o nodos

¹Mesh-Free-Method

$x \in \mathbb{R}^d$ y el costo de la generación de la malla es eliminado. Además, para cierto tipo de problemas se ha reportado convergencia espectral.

Los métodos libres de malla son el eje principal de la investigación propuesta. Nuestro interés recae en problemas de gran demanda de cómputo, donde la utilización de métodos de descomposición de dominio MDD y su correspondiente programación en paralelo, a través de un cúmulo de computadoras Donald et al. [1], es uno de los puntos que se irán abordando a lo largo del presente reporte.

En esta investigación se propone el estudio de ecuaciones diferencias parciales de tipo convección-difusión, que se pueden analizar desde un enfoque Euleriano o Lagrangiano. Dado que dentro del campo de estudio de DF, VF y EF se han desarrollado estrategias de refinamiento, por ejemplo: h-refinamiento y p-refinamiento, que son conocidas como Mallas Adaptivas, en la presente investigación se pretende analizar distintas estrategias, que en forma análoga puedan ser incorporadas para el caso de nodos aleatorios.

El campo de métodos libres de mallas es reciente y existen pocas aplicaciones a problemas temporales con métodos numéricos que involucren la programación en paralelo, este tópico es el tema principal de la investigación.

2. Motivación

En esta sección se describe un panorama general para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, se da la motivación del uso de métodos libres de malla y se exponen algunos ejemplos de aplicación.

Desde una perspectiva general la simulación de algún proceso físico modelado por una EDP conlleva los siguientes pasos Hockney & Eastwood [2]:

- Fenómeno Físico.
- Modelo Matemático.
- Aproximación Discreta del Modelo.
- Aproximación Numérica.
- Visualización de Resultados.

Nuestro interés recae en el cuarto punto que es la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, el resto de los puntos se asumen que son dados por terceras personas. En el caso de visualización se empleará alguna aplicación que considere graficación en $2D$ y $3D$.

Es interesante preguntarnos, ¿Por qué utilizar métodos libres de malla si los métodos de diferencias finitas, volumen finito y elemento finito han sido utilizados exitosamente a lo largo de décadas?.

- El mallado de un objeto es una de las tareas que consumen mayor cantidad de tiempo de cómputo, típicamente se gasta el 70% del proceso total en la etapa del mallado. Esto es considerado el cuello de botella en aplicaciones de simulación.
- La generación de mallas móviles resulta extremadamente compleja y costosa computacionalmente.
- Para problemas elípticos lineales se ha reportado convergencia espectral Cheng [3].

- Cuando se utilizan métodos semi - Lagrangianos se reduce la difusión numérica de los métodos en la dirección del flujo² en la parte advectiva. El proceso de interpolación requerido para ajustar la posición estimada del movimiento para cada paso de tiempo introduce difusión numérica.
- El mayor poder computacional, supercomputadoras, no es la panacea para dar solución numérica a EDP's. La tendencia actual del cómputo científico es combinar las estrategias computacionales con el análisis numérico.

La motivación del uso de métodos libres de malla es reducir los tiempos de cómputo y que el orden de convergencia sea mayor o igual al de los métodos numéricos actuales. Entendiendo por convergencia al decrecimiento del error obtenido conforme N crece, siendo N el número de nodos.

Consideramos que los métodos libres de mallas no suplantarán de forma definitiva a diferencias finitas, elemento finito o volumen finito. Se puede utilizar una combinación de ellos aprovechando la teoría ya establecida y los métodos numéricos que se han desarrollado a lo largo de décadas.

Muchos procesos industriales, físicos, químicos o naturales de interés medio ambiental tienen un común denominador: la física del problema puede ser aproximada por una ecuación diferencial parcial de tipo convección difusión. Efectivamente, procesos en apariencia muy distintos tales como: el funcionamiento de los filtros de carbón activo (canisters) empleados en la industria automotriz, la dispersión de contaminantes en la atmósfera, análisis estructural, diseño de estructuras aerodinámicas para jets, flúidos para yacimientos poco profundos, la distribución de estado estacionario de una sustancia pasiva disuelta en agua y transportada por flujo, transporte de múltiples reacciones químicas, clima espacial, transferencia de calor, galvanización de las hojas de acero y la solidificación de la aleación, aplicaciones financieras como la variación de los precios de activos en la bolsa de valores, simulación de terremotos, en modelación de astrofísica-computacional como es la formación de galaxias y vientos solares, flujo del electrón en semiconductores, la propagación de los incendios forestales, recientemente en problemas de nanotecnología como la mecánica del carbón en nanotubos y el movimiento de glaciares pueden describirse mediante modelos matemáticos muy similares.

Estos procesos tienen además otras características comunes, entre las que destacan la geometría tridimensional compleja, dependientes del tiempo, puede formar ondas de choque y efectos de rarefacción, y gran demanda de cómputo. Tradicionalmente se emplean métodos basados en mallas DF, VF y EF.

3. Estado del Arte

Suponga que $f = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, es una función real definida en d dimensiones que buscamos aproximar, donde la distribución de los puntos es aleatoria. Una aproximación a f vía función radial es una función S de la forma

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1)$$

donde N denota el número de puntos, λ el vector de incógnitas, $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ llamado núcleo radial y $\|\cdot\|$ denota la norma Euclídeana. Con objeto de ser más claros se omitió el polinomio requerido en (1). Resolver (1) equivale a resolver el sistema algebraico de ecuaciones

$$\Phi \lambda = f \quad (2)$$

²Upwind Method

donde la matrix Φ es de $n \times n$, λ de $n \times 1$ y f de $n \times 1$, la solución de (2) puede ser determinada si la matrix Φ es no singular.

Dentro de las funciones de base radial (FBR) se tienen las funciones de soporte global y soporte compacto, en la siguiente tabla se muestran las más comunes:

Núcleo Radial	Nombre	Soporte
$\phi(r) = r^{2d} \log(r)$	Placa Delgada	Global
$\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	Multicuádrlica	Global
$\phi(r) = 1/\sqrt{r^2 + c^2}$	Inv. Multicuádrlica	Global
$\phi(r) = e^{-r^2/c^2}$	Exponencial	Global
$\phi(r) = (1 - r)_+^4$	Wendland	Compacto

Desde el punto de vista práctico, un trabajo importante fue la comparación de todos los métodos de interpolación para datos aleatorios en los 80's realizado por Richard Franke [4]. En su comparación, él concluye que los núcleos multicuádrlico y placa delgada son los mejores métodos disponibles hasta esa fecha, también conjetura que la matriz de interpolación resultante Φ empleando multicuádrlicos es invertible. Estos resultados impulsaron fuertemente la investigación en funciones radiales.

La superioridad de exactitud en problemas de interpolación empleando funciones de base radial es soportada por las cotas teóricas estimadas. Por ejemplo, para el caso de interpolar una función regular, Madych & Nelson [5] mostraron que para cierta clase de funciones radiales, incluyendo la multicuádrlica y la Gaussiana, el error de interpolación converge a tasa exponencial, $O(\lambda^{1/h})$, donde $0 < \lambda < 1$ y h es la distancia máxima posible de cualquier punto $x_i \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ a su punto de referencia más cercano en X . Para el núcleo Gaussiano, Wendland [6] refinó la cota a $O(\lambda\sqrt{1/h})$. Estas cotas convergen mucho más rápido que la tasa algebraica $O(h^\ell)$ proveniente del método de elemento finito y otros métodos, inclusive con $\ell > d$, conocido como super-convergencia, donde d es la convergencia esperada basada en el grado de interpolación. Además, Madych [7] estimó una cota de error para el núcleo multicuádrlico que incorpora el parámetro de forma $O(e^{ac}h^{c/h})$, donde a es una constante positiva. Para el caso de la función de soporte acotado de Wendland, se tiene una convergencia algebraica $O(h^{3/2})$. Estos resultados tiene un gran impacto en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.

En el trabajo de Kansa [8, 9] propone la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales mediante aproximación vía funciones radiales. La idea principal consiste en aproximar la solución u de la EDP por (1), las derivadas parciales son aplicadas a la función radial $\phi(r)$ y el problema original de la EDP se transforma en resolver un sistema algebraico de ecuaciones del tipo (2). Este enfoque es llamado método de colocación asimétrico y es un método libre de malla. En Larsson [10] se muestran otros métodos de colocación y una comparación numérica para el problema de Poisson, en Fasshauer [11] se compara el método de Kansa con el enfoque de interpolación de Hermite a un problema de Poisson en $2D$, concluyendo que el método de Kansa tiene la ventaja de ser fácil de implementar. El trabajo de Kansa es la base inicial de nuestro trabajo de investigación, en la sección de resultados preliminares se muestra la solución de EDP's empleando el enfoque de colocación de Kansa.

El problema de aproximación empleando funciones radiales y la solución de EDP's mediante dicho método, tienen en común la solución de un sistema algebraico de ecuaciones (2). El sistema algebraico resultante es mal condicionado y por lo general denso. El mal número condición ocasiona que la solución del sistema algebraico sea numéricamente incorrecta, la densidad del sistema algebraico depende del tipo de núcleo radial seleccionado. Por ejemplo, empleando funciones radiales compactas, el sistema algebraico es raro, es

un sistema diagonal en donde el ancho de la diagonal está determinado por la zona de soporte, fuera de la diagonal se tienen ceros. Conforme la zona de soporte aumenta, el número condición del sistema algebraico crece. Por otro lado, empleando funciones de soporte global el sistema algebraico resultante es denso. A pesar de que el tiempo computacional para resolver un sistema algebraico denso es comparativamente mayor que el de un sistema ralo, por lo general se elige un sistema denso proveniente de la utilización del núcleo multicuádrico, debido a su convergencia espectral (exponencial). Cuando el sistema algebraico es no-lineal se pueden emplear métodos de optimización no lineal como son métodos inexactos de Newton, método de Broyden, Homotopías, ver Nocedal et al. [12].

El uso de aproximantes basados en funciones radiales tiene la ventaja de ser independiente del espacio \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$, lo cual es muy importante cuando se emplea para la solución numérica de EDP's. En efecto, empleando el método de colocación para la solución de EDP's es fácilmente programable independientemente de la dimensión del espacio \mathbb{R}^d , hecho que no sucede cuando se utiliza algún método basado en mallas como elemento finito y otros.

Observaciones numéricas y resultados teóricos muestran una estrecha relación entre el mal condicionamiento del sistema algebraico (2) y el error de aproximación. En particular, no existe un caso conocido en que se tenga una buena aproximación y un buen condicionamiento de forma simultánea. Existe la dicotomía: Si uno requiere un error pequeño se obtiene un mal condicionamiento, si uno busca un algoritmo estable se obtiene un error de aproximación comparativamente mayor, esto es conocido como principio de incertidumbre Schaback [13].

Para disminuir el mal condicionamiento del sistema algebraico se han propuesto distintas alternativas: descomposición de dominio, funciones radiales de soporte compacto, preconditionamiento y combinaciones de las estrategias anteriores. La descomposición de dominio para funciones de soporte global ha demostrado ser efectiva, el preconditionamiento del sistema también reduce el mal condicionamiento pero no se ha logrado determinar un preconditionador general para las funciones de soporte global. La determinación del soporte compacto que minimiza el número condición es un problema sujeto a investigación actual.

Empleando el núcleo multicuádrico y un problema elíptico en $2D$, en Cheng et al. [3] muestra una convergencia numérica del orden $O(h^7)$ en comparación con $O(h^2)$ obtenido por diferencias finitas. El orden de convergencia en ecuaciones diferenciales parciales empleando aproximación vía funciones radiales es un problema de investigación actual.

En la última década se han desarrollado diversas aplicaciones empleando aproximación vía funciones radiales, como son: el problema de valor inicial Hon [14], ecuación no lineal de Burger, Hon [15], ecuaciones diferenciales elípticas, Sharan [16], matemáticas financieras, Hon [17] y [18], modelación de aguas de poca profundidad, Jichun Li [19], Hon [20] y Wong et al. [21], campo superficial del viento, Hickernell [22], modelo mixto bifásico y trifásico, Hon [23] y [24].

3.1. Descomposición de dominio

El método de descomposición de dominio (DD) consta de dos componentes principales: partición de los datos y el algoritmo de descomposición de dominio, ambos están estrechamente relacionados. Por partición de datos entenderemos al algoritmo que toma un conjunto de puntos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ definidos en una región Ω , divide la región omega en k -particiones o subdominios $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_k$, donde la intersección de regiones $\Omega_i \cap \Omega_j$ $i \neq j$ puede ser vacía, por lo regular se requiere que el número de elementos en cada partición sean similares. El algoritmo de descomposición de dominio, se refiere a las variantes del algoritmo de Schwarz [25], donde la idea básica del algoritmo aditivo con regiones de traslape de Schwarz consiste en dividir Ω en dos particiones $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ con una región de traslape, resolver cada partición en

paralelo, transferir la solución de los puntos en las regiones de traslape e iterar hasta que no existan cambios en la región de traslape.

La estrecha relación entre la partición de datos y el algoritmo de Schwarz, estriba en que el algoritmo de Schwarz requiere de las particiones del dominio Ω , el algoritmo de partición de datos se encarga de dicha tarea.

Dentro de la motivación para usar descomposición de dominio se tiene:

- Reducción del tiempo de cómputo.
- Excelente herramienta para problemas bajamente acoplados.
- Refinamiento local puede ser fácilmente implementado.
- Es necesario para problemas de cómputo masivo.
- Diferentes modelos físicos pueden ser usados en distintas particiones.
- Es una estrategia para obtener una mejor aproximación cuando se emplea aproximación vía funciones radiales.

La partición de datos es ampliamente utilizada en el método de elemento finito, existen herramientas computacionales que realizan la partición considerando distintas funciones de costo para obtener las k -regiones, ejemplo de ello son: Metis, Chaco, Jostle, Party y Scotch en sus variantes serial y paralela. Cuando el conjunto de puntos X están distribuidos de forma aleatoria, se requiere de otro tipo de algoritmos de partición, por ejemplo bisección-recursiva, esta clase de algoritmos son de nuestro interés debido a la aleatoriedad de los datos que es utilizada en la aproximación vía funciones radiales.

Una revisión básica de métodos de descomposición de dominio se encuentra en el libro de Smith [26], desde el punto de vista de implementación en el trabajo de Karniadakis [27] se describe la teoría y programación de EDP's empleando MPI como lenguaje de programación. De manera abreviada llamaremos a ecuaciones diferenciales parciales vía funciones de base radial en paralelo como PRP.

Básicamente existen dos categorías para los métodos de descomposición de dominio que son: con traslape y sin traslape, dentro de los cuales se tienen: métodos aditivos, multiplicativos, iterativos de substracción, etc. La selección del método a utilizar depende del problema que se esté resolviendo, por ejemplo si tenemos regiones con distintas características físicas, resulta razonable emplear descomposición de dominio sin traslape con frontera tipo Neumann-Neumann, (para una mayor referencia de métodos de descomposición de dominio consulte la conferencia anual [28]).

Dentro del campo de estudio PRP se cuenta con pocos trabajos realizados a la fecha, un trabajo previo a PRP se encuentra en Dubal [29] que emplea descomposición de dominio con núcleo multicuádrico para resolver problemas de aproximación en $1D$. Dentro del campo de PRP en Hon & Wu [30] se muestran las justificaciones teóricas del algoritmo aditivo de Schwarz empleando FBR de soporte compacto. En el trabajo de Kansa & Hon [31], se encontró que dividiendo el problema en regiones más pequeñas el mal condicionamiento del sistema es reducido, lo que da una mejor aproximación. En Zhou et al. [32] se muestra el algoritmo de Schwarz con regiones de traslape en las variantes aditiva y multiplicativa, esto es aplicado a un problema elíptico y a un problema singular perturbado, concluyen que el uso de descomposición de dominio es una buena opción para reducir el mal condicionamiento del sistema. Recientemente Ling & Kansa [33] emplean 4 regiones con traslape con fronteras tipo Dirichlet-Dirichlet con el clásico algoritmo de Schwarz; aunado a ello se utiliza un preconditionador del sistema logrando reducir el tiempo computacional

y mejorando el número condición. Un interesante trabajo se muestran en Li & Hon [34], emplean un problema elíptico y realizan una comparación numérica del algoritmo de Schwarz con región de traslape (con/sin correspondencia de puntos) y sin región de traslape, concluyen que cuando no existe correspondencia de puntos en las fronteras se obtiene el mismo error cuadrático medio que empleando correspondencia de puntos, también que el número de iteraciones para la versión multiplicativa en comparación con la aditiva es aproximadamente la mitad. Este resultado es conocido en elemento finito.

El área de PRP está en una etapa inicial, se han reportado problemas elípticos con pocas regiones de traslape. Todavía no se ha propuesto un enfoque que considere partición de dominio para datos aleatorios, implementación del problema de comunicación de puntos de frontera, solución de problemas dependientes de tiempo y selección del algoritmo de descomposición de dominio a utilizar.

3.2. Parámetro de Control

Las funciones radiales, multicuádrlica, inversa-multicuádrlica y exponencial, requieren de un parámetro de control c que debe ser dado por el usuario. El parámetro de control c juega un papel determinante en la aproximación numérica, Carlson & Foley [35], Rippa [36], para problemas de interpolación y la solución de EDO's y EDP's.

Desde el punto de vista algorítmico, podemos clasificar los métodos para determinar c^* como iterativos y no-iterativos. Dentro de las estrategias no-iterativas se encuentran los trabajos de Kansa [31], Hardy [37], Moody y Darken [38]. Por otro lado, dentro de las estrategias iterativas se cuenta a Rippa [36], Cheng [39], Gutmann [40], Galperin et al. [41], Alotto et al. [42] y recientemente el trabajo de Fornberg & Wright [43].

Experimentalmente se conoce que el parámetro c está en función del número de puntos N , la posición espacial de los nodos x_i $i = 1, \dots, N$ y la función a interpolar f ó la *EDP* a resolver. La determinación de un criterio para conocer el mejor parámetro c es un pregunta de investigación abierta y de gran interés entre la comunidad científica.

3.3. Mallas y nodos adaptivos

En años recientes las mallas adaptivas han ganado mucha atención, tanto en la parte de ingenieros como matemáticos. Una de las razones es el hecho de que las mallas adaptivas son requeridas para problemas en donde se dan cambios de la geometría del dominio de interés, como es la simulación de problemas de impacto, penetración, explosión, fragmentación y largas deformaciones; ver Shaofan [44]. La idea principal en mallas adaptivas es contar con una malla más fina en zonas de alto gradiente y una malla menos fina en regiones con bajo gradiente.

En problemas dependientes del tiempo empleando mallas adaptivas, el proceso de mallado se da cada cierto intervalo de tiempo Δt . El proceso de mallado es la parte que consume la mayor cantidad de tiempo de cómputo, cerca del 70 por ciento del tiempo total.

En los métodos libres de malla, de manera similar a las mallas adaptivas, se tienen los nodos adaptivos. La idea es contar con un mayor número de nodos en zonas de alto gradiente y un menor número de nodos en regiones con bajo gradiente. Es decir, se requiere que los nodos sean adaptivos con respecto de la solución obtenida.

Existen muchas técnicas de mallas adaptivas, como son: h-refinamiento, p-refinamiento, h-p-refinamiento, r-refinamiento y m-refinamiento; ver González [45]. Para mayor referencia de técnicas de mallas adaptivas, consultar el congreso anual International Meshing Roundtable. Los puntos generales que deben de satisfacer las mallas adaptivas son dados en Kallinderis [46] y son subrayados por los editores Thomson & Soni [47]:

- La adaptación debe resultar en una mejora de la precisión numérica.
- La adaptación debe ser automática y eficiente.
- La idea fundamental de la adaptación de la malla es reducir el error de discretización espacial.
- El error temporal y conservación deben ser preservados si es requerido.
- El error adicional introducido por los algoritmos adaptivos no debe reducir significativamente los beneficios obtenidos.

Los puntos generales mostrados son aplicables al diseño de algoritmos de nodos adaptivos. Tales puntos proveen criterios iniciales de evaluación para la comparación de algoritmos adaptivos. Dado que el proceso de mallado es una tarea computacionalmente costosa, los nodos adaptivos no requieren de un proceso de mallado y por lo tanto ofrecen una ventaja computacional que debe ser aprovechada.

3.4. Problemas de frontera

Dentro de la temática de métodos libres de malla empleando aproximación con funciones radiales, se tienen los siguientes problemas de frontera.

- Empleando el método de colocación asimétrico de Kansa, ¿el sistema algebraico resultante es invertible?
- Dada una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, determinar la colocación de los puntos que cubran el dominio, este se conoce como el proceso de mallado en elemento finito.
- Partición de una región $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ en k -subregiones, donde los nodos están distribuidos de forma aleatoria.
- Determinar el orden de convergencia para distintos núcleos radiales en ecuaciones diferenciales parciales.
- Formulación de métodos numéricos en forma conservativa para métodos libres de malla.
- ¿Bajo qué condiciones las funciones radiales de soporte compacto son mejores a las funciones radiales globales? Donde la mejora puede ser tiempo computacional, precisión numérica o complejidad de implementación.
- Métodos eficientes de nodos adaptivos en serie y paralelo.
- Determinación del parámetro c en el núcleo multicuadrado.

En el trabajo de Leveque [48], se muestran las bases teóricas y algorítmicas de métodos numéricos conservativos para sistemas hiperbólicos no-lineales.

4. Propuesta

En las secciones anteriores se han descrito los métodos libres de malla y se planteó el uso de aproximación con funciones radiales aplicados a ecuaciones diferenciales parciales. A continuación se plantea el objetivo principal, los objetivos secundarios, metas a cumplir y cronograma de actividades.

4.1. Objetivo principal

El objetivo principal de la propuesta de esta tesis es el estudio y formulación de métodos numéricos, de descomposición de dominio, para ecuaciones diferenciales parciales de tipo convección difusión, a base de técnicas de aproximación radial.

Este objetivo implica la investigación de algoritmos numéricos libres de mallas que se reflejen en la estructuración de procedimientos computacionales paralelos, considerando mejorar el número condición del sistema algebraico resultante de la discretización.

4.2. Objetivos secundarios

Para satisfacer al objetivo principal de la tesis, se consideran los siguientes objetivos secundarios:

- Análisis y diseño de algoritmos de nodos adaptivos para leyes de conservación: lineales, semi-lineales y cuasi-lineales.
- Formulación de algoritmos numéricos conservativos basados en técnicas de aproximación de tipo base radial.
- Diseño y formulación de técnicas computacionales paralelas cuya partición de memoria dependa de los algoritmos numéricos formulados.
- Determinación de cubiertas -subáreas- del dominio global que reflejen el comportamiento de la EDP como resultado de los algoritmos adaptivos.
- El énfasis de esta tesis está en el desarrollo de métodos numéricos para problemas lineales o problemas no lineales susceptibles de ser linealizados. En el contexto de esta investigación no descartamos el análisis y desarrollo de métodos numéricos conservativos.

Con base a los métodos numéricos desarrollados o investigados, se generará una biblioteca de funciones con su respectiva documentación. Esto se traducirá en reportes técnicos internos.

4.3. Metas

Considerando los objetivos anteriores, se plantean las metas que serán cubiertas durante el transcurso de la investigación.

- Programar métodos adaptivos para funciones de base radial.
- Determinar experimentalmente la convergencia para EDP's temporales.
- Proponer una metodología para la implementación de EDP's en paralelo.
 - Definir un esquema de comunicación para datos en puntos de frontera en k -particiones.
 - Programación del manejo eficiente de archivos I/O.
 - Determinar un criterio de paro para los algoritmos paralelos.
- Determinar los métodos numéricos óptimos para la discretización de la derivada temporal.

- Definir algoritmos de nodos adaptivos para problemas elípticos lineales con distintos núcleos radiales.
- Definir un conjunto de problemas para criterios de validación.

Las metas planteadas nos proporcionan una guía de actividades a satisfacer para lograr implementar métodos numéricos empleando funciones de base radial para problemas en $2D$ y $3D$.

4.4. Cronograma de Actividades

En la siguiente tabla se muestra el cronograma de actividades de los 12 trimestres que cubren los 3 años del Doctorado. Existen algunos temas que por su relevancia cubren varios trimestres: Inv. Estado del Arte y Redacción de Tesis. En general los puntos citados se deben trabajar de manera constante durante el transcurso de la investigación.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Definición de Tema	*	*										
Inv. Estado del Arte ³		*	*	*	*							
Inv. Estado del Arte ⁴						*	*	*	*	*	*	
Estudio EDP en gral.				*	*	*	*	*	*	*		
Descomposición Domino			*	*			*	*				
Nodos Adaptivos			*					*		*		
Alg. Num. Conservativos				*	*	*	*	*				
Teoría de FBR			*	*		*	*		*	*		
Escritura Artículos						*			*		*	
Evaluación de Métodos					*	*			*	*		
Avance 50 % Tesis							*	*				
Redacción de Tesis								*	*	*	*	*
Defensa de Tesis												*

El contenido de la tabla cubre los aspectos generales del plan de trabajo. No se incluyen las tareas requeridas por el Departamento de Ciencias de la Computación, descritas en el reporte "Programa Doctoral en Ciencias de la Computación, Guía para Estudiantes", se asume que tales puntos deben de ser cubiertos en su totalidad.

5. Metodología

La idea general es llegar a resolver problemas en $3D$, para ello se resolverán una serie de problemas en $1D$ y $2D$ paulatinamente.

En primera instancia se planteó un problema difusivo $u_t = u_{xx}$ en $1D$, en donde se conocía la solución analítica, se resolvió por diferencias finitas y el método de Kansa, implementándolo en modo serial y posteriormente en paralelo. Con este sencillo ejemplo se logró comprender cómo se emplea MPI para dar solución a una EDP en particular y analizar los pasos que conllevan a la implementación en paralelo.

Posteriormente se planteó la solución del problema de Poisson en $2D$, por colocación no simétrica de Kansa, que se muestra en la sección de resultados preliminares. En dicho problema se distinguieron dos conceptos importantes: partición de datos e implementación en paralelo.

³Investigación del tema de interés para definir la propuesta Doctoral.

⁴Busqueda de artículos relevantes.

De lo expuesto anteriormente, se tienen los dos primeros problemas a resolver: proponer un esquema de comunicación en paralelo para el envío de datos de puntos de frontera en común y dada la partición de datos determinar los puntos de frontera en común entre particiones. Ambos problemas deben considerar datos en $3D$.

Por otro lado y desde el punto de vista numérico, los resultados analizados para el caso lineal de convección-difusión en $1D$, nos plantea el estudio y desarrollo de nuevos algoritmos radiales, seriales y paralelos, en $2D$ y $3D$ basados en distintos núcleos radiales y así analizar sus ordenes de convergencia. Esto con objeto de desarrollar algoritmos más eficientes.

Empleando distintos núcleos radiales se determinará experimentalmente el orden de convergencia para un problema $1D$ temporal. Este enfoque numérico es importante para determinar la convergencia ya que no hay resultados mostrados en esta dirección.

Los esquemas de mallas adaptativas son conocidos en el área de elemento finito, se analizarán cuáles de los conceptos implícitos en estas técnicas son aplicables a los algoritmos libres de mallas. Ejemplo de ello es la adición/remoción de nodos que se adapten al tipo de solución obtenida.

Con respecto a descomposición de dominio, se explorarán algunas variantes del algoritmo de Schwarz que resulten apropiadas para el problema a resolver. Dentro de las variantes del algoritmo de Schwarz se contemplan los casos de fronteras tipo Dirichlet-Dirichlet y Neumann-Neumann.

En particular, y para el caso de leyes de conservación, primero analizaremos casos en $1D$ hiperbólicos en diferencias finitas, en donde se tenga formación de ondas de choque. Una vez analizados los casos de estudio, se investigarán esquemas que consideren el uso de aproximación radial planteado en forma conservativa que utilice partición de dominio.

Finalmente, para validar que la solución numérica obtenida por los algoritmos propuestos sea correcta, se debe satisfacer que la solución obtenida sea mejor o igual a lo obtenido con otros métodos numéricos, por ejemplo volumen finito. Para ello se debe seleccionar varios casos de prueba y analizar los resultados.

La selección de la ecuación diferencial parcial de prueba se divide en dos casos: se conoce la solución analítica y no se conoce la solución analítica. En el segundo caso, la solución numérica se ha validado en distintos artículos quedando así establecida la certeza de que la solución numérica obtenida es correcta. Cuando se conoce la solución analítica, podemos medir el error cometido empleando por ejemplo el error cuadrático medio

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \tilde{u}_i)^2} \quad (3)$$

donde N es el número de nodos, u es la solución analítica y \tilde{u} la solución determinada numéricamente.

6. Resultados Preliminares

En esta sección se describen tres ejemplos: el primero consiste en la solución del problema de Poisson en $2D$ lineal con coeficientes constantes, el segundo ejemplo es un problema en paralelo aplicado a la ecuación de Poisson sobre un dominio irregular, en el último se compara numéricamente un problema convección-difusión en $1D$ empleando núcleo multicuadrático, placa delgada y diferencias finitas.

6.1. Problema de Poisson

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio d -dimensional y denotemos por $\partial\Omega$ ó Γ la frontera del dominio. Se desea resolver la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} Lu &= f & \text{en } \Omega \\ Bu &= g & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

donde L , es un operador diferencial, en particular el Laplaciano ∇^2 , y B nos determina las condiciones de frontera, Dirichlet, Neumann o Robin. En particular se tiene la ecuación elíptica

$$u_{xx} + u_{yy} = 13 \exp(-2x + 3y) \quad \text{en } \Omega \quad (5)$$

que es usada en Kansa [9] y Hon [49]. La solución analítica es $u(x, y) = \exp(-2x + 3y)$. Las condiciones de frontera están determinadas por la solución analítica en Γ . El dominio de interés es un cuadrilátero unitario $\Omega = [0, 1]^d$ con $d = 2$. Para determinar el error cometido entre la solución analítica y la estimada se utiliza

$$ECM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \tilde{u}_i)^2} \quad (6)$$

donde u denota a la solución analítica y \tilde{u} la estimada.

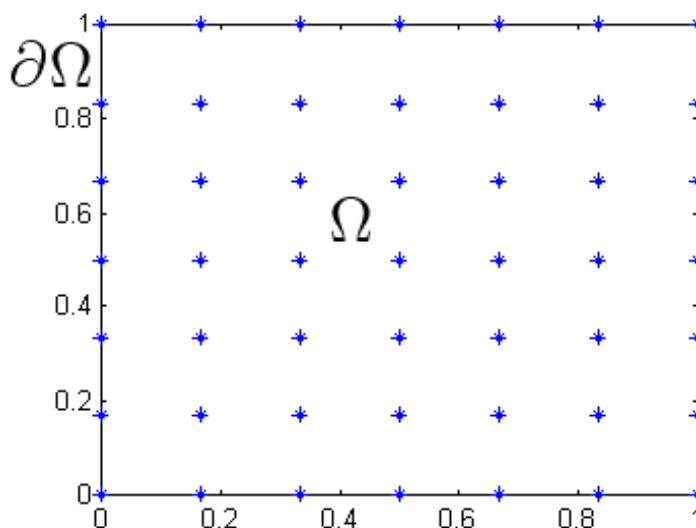


Figura 1. Distribución de 49 puntos equiespaciados.

Se toman $N = 49$ puntos distribuidos en el intervalo $[0, 1]^2$, como se muestra en la Figura 1, de los cuales 24 nodos corresponden a los puntos de frontera y 25 a puntos interiores. Resolviendo (5) con el núcleo $\phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$ se obtiene un $error = 7,147 \times 10^{-4}$ con $c = 2,4$.

Resolviendo el mismo problema pero con diferencias finitas para lo cual empleamos segundas derivadas centrales se obtiene un error $0,9899 \times 10^{-2}$. Nótese que el uso de la función radial con núcleo multicuadrático es dos ordenes de magnitud superior que diferencias finitas, esto es consistente con la convergencia espectral reportada para problemas elípticos.

Variando el parámetro c se obtiene la Figura 2 que muestra cómo disminuye el error conforme crece el valor de c , lo cual es consistente con el principio de incertidumbre de Schaback.

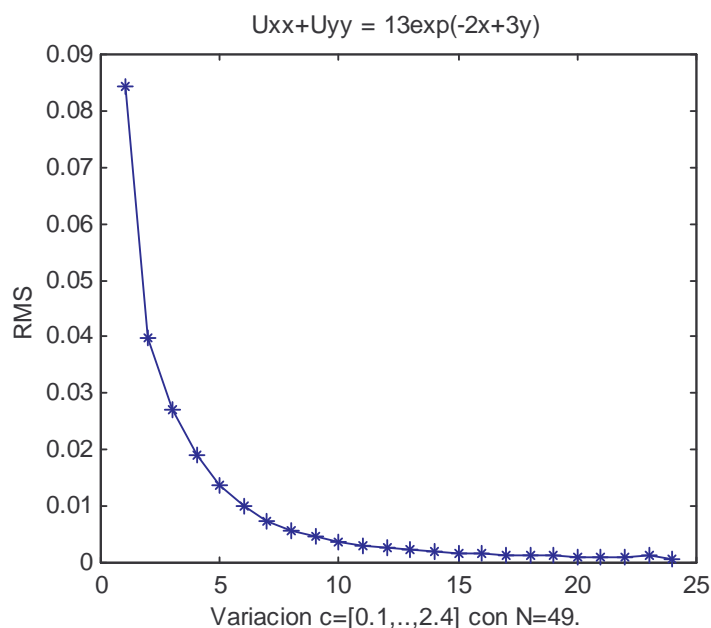


Figura 2. Disminución del error conforme crece el parámetro c .

6.2. EDP en Paralelo

Se describe el algoritmo clásico de Schwarz con región de traslape y coincidencia de puntos. Esto es aplicado a un problema elíptico en $2D$.

Sin pérdida de generalidad, considere que la región Ω está dividida en dos particiones como se muestra en la Figura 3, cada región $i = 1, 2$ está caracterizada por los puntos en la frontera $\partial\Omega_i$, puntos de la partición Ω_i y puntos de transferencia entre dominio, los cuales corresponden a la intersección de ambas regiones. El problema consiste en resolver la EDP (8) en paralelo formada por los datos de cada partición e intercambiar información para actualizar las fronteras, este proceso se itera hasta que el cambio en la región de traslape sea menor que una cota η . Los puntos de frontera común $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ entre ambas regiones toman valores iniciales arbitrarios. Lo anterior se representa de forma iterativa como:

$$\begin{cases} Lu_1^n = f(x) & \text{en } \Omega_1 \\ Lu_1^n = g(x) & \text{en } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1 \\ u_1^n = u_2^{n-1}|_{\Gamma_1} & \text{en } \Gamma_1 \end{cases} \quad \text{y} \quad (7)$$

$$\begin{cases} Lu_1^n = f(x) & \text{en } \Omega_2 \\ Lu_1^n = g(x) & \text{en } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2 \\ u_2^n = u_1^{n-1}|_{\Gamma_2} & \text{en } \Gamma_2 \end{cases}$$

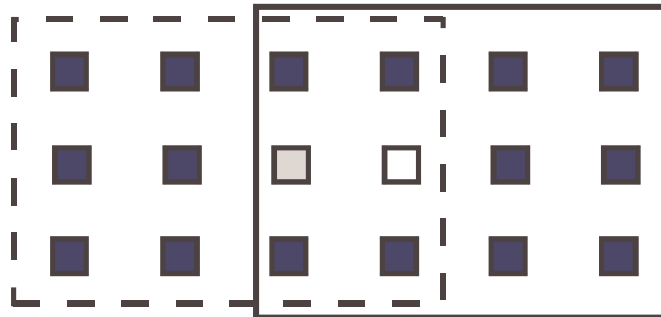


Figura 3. Partición en dos Dominios.

Para el ejemplo mostrado en la Figura 3, el intercambio de información corresponde a enviar el dato $u_1(1, 3) \rightarrow u_2(1, 1)$ y $u_2(1, 0) \leftarrow u_1(1, 2)$, considerando los índices por separado para cada región.

Considere la siguiente EDP:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 4 & \text{en } \Omega \\ u(x, y) &= 8 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8}$$

definida sobre el dominio en \mathbb{R}^2 descrito en la Figura 4, este problema consiste en $N = 1,771$ nodos, los cuales están divididos en nodos de la frontera $N_{\partial\Omega} = 594$ y nodos del interior $N_{\Omega} = 1,117$. Empleando el núcleo de placa delgada y formando el sistema lineal de ecuaciones a resolver $A\lambda = b$, con $A = A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$ e $i, j = 1, \dots, N$, la matriz resultante requiere de 25 Mbytes de memoria empleando precisión doble, lo cual es viable computacionalmente, pero nos restringe a problemas que dependan de la capacidad de memoria y velocidad de procesamiento de la computadora.

Para resolver (8) se dividió el problema en 5 regiones con traslape, donde cada partición corresponde a las letras *I, N, A, O, E*, el traslape se da en la región que comunica a cada letra como se muestra en la Figura 5. Se utilizó el algoritmo clásico de Schwarz que lo podemos enunciar como:

Algoritmo : Schwarz Aditivo

Iterar hasta convergencia

Para cada partición Ω_k



Figura 4. Definición del Dominio a Particionar.



Figura 5. Cinco regiones con traslape para resolver el problema en paralelo.

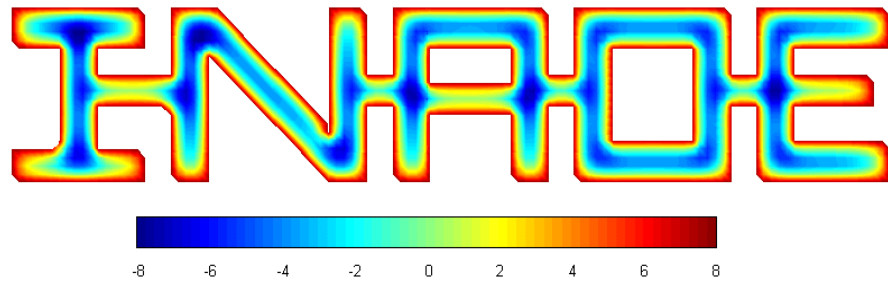


Figura 6. Poisson en paralelo con 5 particiones que corresponden a cada letra.

Resolver $A_i \lambda_i = b_i$

Actualizar las fronteras $U_i|_{\Gamma_i}$ del vecino artificial de frontera Γ_i .

Se realizo un número fijo de iteraciones, 14 en este caso. El Algoritmo 1 fue implementado en C++ utilizando Microsoft Visual empleando MPICH (Gropp et al. [50]), como lenguaje de comunicación y utilizando Gauss con pivote parcial para resolver el sistema de ecuaciones lineales cuyo orden de complejidad es $O(n^2)$ en almacenamiento y $O(n^3)$ para resolver el sistema.

La ecuación (8) se resuelve aplicando el Algoritmo 1 con las regiones mostradas en la Figura 5, el resultado es mostrado en la Figura 6, que lo podemos interpretar como la disipación de calor dado en las fronteras hacia el interior del modelo. Como era de esperarse, las zonas con menor calor se encuentran alejadas de la orilla y cerca de los centros de cada letra.

En este segundo experimento, nos interesa analizar gráficamente qué pasa en las fronteras lógicas de las particiones. Es decir, el intercambio de información en las zonas comunes. Para ejemplificar esto empleare-

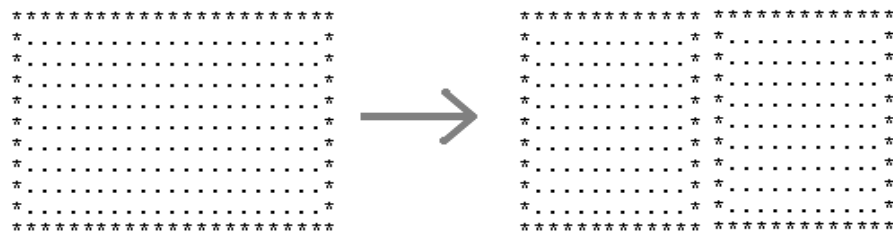


Figura 7. Izq. dominio original, Der. dominio original dividido en dos regiones con traslape.

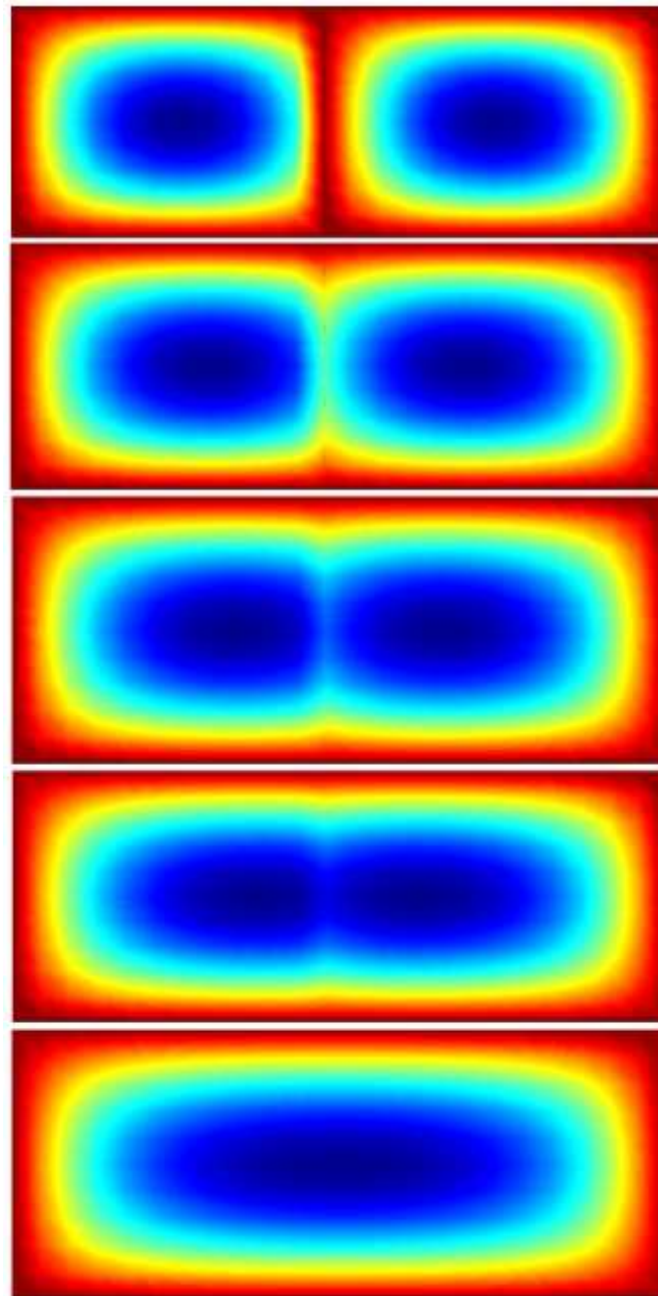


Figura 8. Intercambio de información entre dos regiones, empleando Algoritmo de Schwarz y el núcleo radial de Placa Delgada

mos (8) definida sobre un rectángulo $R = \{(x, y) | a < x < b, c < y < d\}$ como se muestra en la parte izquierda de la Figura 7, el dominio es particionado en dos regiones con una región mínima de traslape (2 vecinos) como se muestra en la parte derecha de la Figura 7.

Para resolver (8) se empleó el núcleo de placa delgada *TPS* y el Algoritmo 1. En la Figura 8 se muestra la solución numérica de la EDP (8) en las iteraciones $\{1, 3, 6, 9, 14\}$. Observe como se da el intercambio de información en cada iteración, note que en la parte de abajo de la Figura 8 se obtiene el resultado como si se hubiera resuelto el problema sin partición de dominio.

6.3. Convección-Difusión

La siguiente EDP de tipo convección-difusión lineal es analizada en Boztosun [51]

$$U_t = k_{xx}U_{xx} + k_x U_x \quad (9)$$

sujeta a condiciones de frontera tipo Dirichlet e inicio. La solución analítica está dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a e^{bt - c_1 x} \\ c &= \frac{k_x \pm \sqrt{k_x^2 + 4k_{xx}}}{2k_x} > 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Para dar solución numérica a (9) se emplea Euler hacia adelante para discretizar el tiempo. Utilizando la notación de FBR se tiene

$$\Phi \lambda^{n+1} = \Phi \lambda^n + k \left[k_{xx} \Phi''_x + k_x \Phi'_x \right] \lambda^n \quad (11)$$

donde k denota el tamaño del paso en el tiempo. De una forma compacta

$$\Phi \lambda^{n+1} = G \lambda^n \quad (12)$$

donde $G = \Phi + k[k_{xx} \Phi''_x + k_x \Phi'_x]$. Expresando el sistema iterativo a resolver $Ax = b$. La ecuación (12) la descomponemos:

$$\begin{aligned} b &= G \lambda^n \\ \Phi \lambda^{n+1} &= b \end{aligned} \quad (13)$$

que son resueltas en dos pasos. Por el momento, no nos interesa una manera computacionalmente eficiente de resolver (13), como puede ser emplear la factorización LU o algún método iterativo; por ejemplo SOR o GMRES. Se empleó el método de Gauss con pivoteo parcial que está dado de manera implícita en Matlab mediante el operador binario slash.

En el primer experimento se varía el número de puntos $N = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ manteniendo fijo el tamaño del paso del tiempo $k = 0,001$ y con los valores $k_{xx} = 2$, $k_x = -1$, $a = 107$, $b = -0,5$ y $t_{\text{máx}} = 1$. Se emplearon las funciones radiales *TPS* y *MQ* con el parámetro $c = 1$ para *MQ*. En la Figura 9 se muestran ambos resultados. La línea punteada corresponde al error obtenido empleando *MQ* y la línea continua corresponde al error empleando *TPS*. En dicha gráfica no hay una diferencia notable entre ambos resultados. Se esperaba que utilizando *MQ* se hubiera obtenido un error menor, esto se debe a que no se seleccionó el mejor parámetro c .

En el siguiente ejemplo se compara la solución numérica empleando las funciones radiales multicuádrica, placa delgada y el método de diferencias finitas. Siendo los parámetros:

$$t_{\text{máx}} = 1, \Delta t = 0,0001, a = 157, b = 0,5, k_{xx} = 2, k_x = -1$$

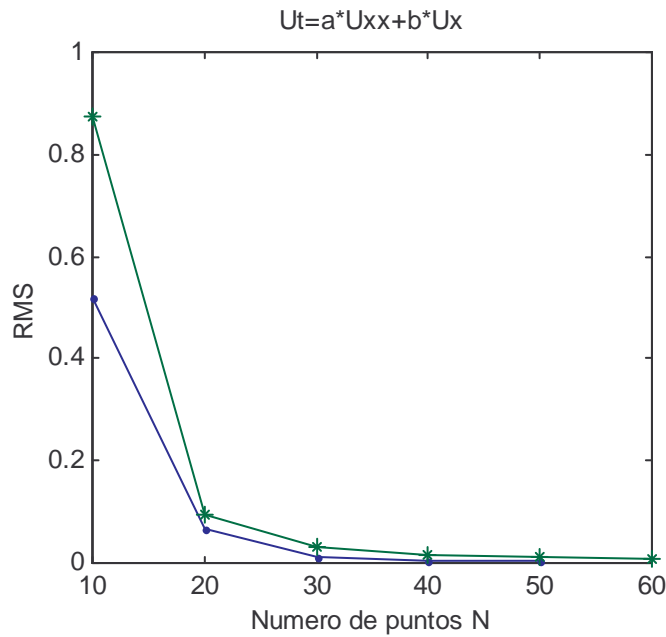


Figura 9. La línea punteada corresponde a MQ y la línea continua a TPS.

los errores encontrados son:

- *MQ* : $e = 0.0041$ con $N = 10$ y $c = 56$.
- *TPS* : $e = 0.0041$, pero se requirieron $N = 76$ para igualar la precisión de *MQ*. Con $N = 10$ el error cometido $e = 1,2794$.
- *DF* : $e = 0.0041$, pero se requirieron $N = 3000$, $\Delta t = 0.0000001$, para igualar la precisión de *MQ*. Con $N = 10$ el error cometido $e = 1.9415$.

Como puede notarse, el número de nodos necesarios para obtener el mismo error con *MQ*, *TPS* y *DF* es: 10, 76 y 3000 respectivamente. Es decir, la diferencia en número de nodos es dos órdenes de magnitud entre *MQ* y *DF*.

En los ejemplos mostrados se abordaron tres clases distintas de problemas: Poisson, PRP y Convección-Difusión. Estos resultados muestran problemas típicos que se encuentran en la literatura y en particular para el campo naciente de PRP. Se le dió un especial cuidado al problema de PRP ya que consideramos que descomposición de dominio es una condición necesaria para problemas reales.

Hasta donde tenemos conocimiento, no se ha reportado ningún trabajo en donde se estudie la posible convergencia espectral de discretizaciones con núcleos multicuádricos para problemas de convección-difusión. Los resultados anteriores representan un primer esfuerzo en esta dirección e indican que efectivamente la velocidad de convergencia del núcleo *MQ* supera considerablemente la correspondiente velocidad para *TPS* y *DF*.

Este trabajo se continuará con objeto de profundizar y verificar numéricamente la conjetura de que el núcleo *MQ* tiene convergencia espectral para el caso de convección-difusión.

Referencias

- [1] Donald J. Becker, Thomas Sterling, Daniel Savarese, John E. Dorband, Udaya A. Ranawak, Charles V. Packer, "BEOWULF: A Parallel Workstation for Scientific Computation", Proceedings, International Conference on Parallel Processing (1995).
- [2] R.W. Hockney & J.W. Eastwood, "Computer Simulation using Particle", Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1988).
- [3] Cheng, A.H.-D., Golberg, M.A., Kansa, E.J. and Zammito, G., "Exponential convergence and h-c multiquadric collocation method for partial differential equations", Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol. 19, No. 5, pp. 571-594 (2003).
- [4] R. Franke, "Scattered data interpolation: test of some methods", Comput. Math. 38 181-200 (1982).
- [5] W. R. Madych and S. A. Nelson, "Bounds on multivariate polynomials and exponential error estimates for multiquadric interpolation", J Approximation Theory 70, 94-114 (1992).
- [6] H. Wendland, "Gaussian interpolation revisited", K. Kopotun, T. Lyche, and M. Neamtu, editors, Trends in approximation theory, Vanderbilt University Press, pp. 1-10 (2001).
- [7] W. R. Madych, "Miscellaneous error bounds for multiquadric and related interpolators", Comput Math Appl 24, 121-138 (1992).
- [8] E. J. Kansa, "Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I: Surface approximations and partial derivative estimates", Comput. Math. Appl. 19 (8/9) 127-145 (1990).
- [9] Kansa, E. J., "Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – II: Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations", Comput. Math. Appl. 19 (8/9), 147-161 (1990).
- [10] E. Larsson and B. Fornberg, "A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs", Compu. and Math. with Appl., vol. 46, 5-6 (2003).
- [11] Gregory E. Fasshauer, "Solving Partial Differential Equations by Collocation with Radial Basis Functions", Proceedings of Chamonix (1996).
- [12] J. Nocedal & Stephen J. Wright, "Numerical Optimization", Springer Series in Operations Research (1999).
- [13] Schaback, R., "Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation", Advances in Comp. Math. 3, 251-264 (1995)
- [14] Y. C. Hon, and X. Z. Mao, "A Multiquadric Interpolation Method for Solving Initial Value Problems", J. Sci. Comput., 12, 51-55 (1997).
- [15] Y. C. Hon, and X. Z. Mao, "An Efficient Numerical Scheme for Burgers' Equation", Internat. J. Appl. Sci. Comput., 95 37-50 (1998).

- [16] M. Sharan, E. J. Kansa, and S. Gupta, "Applications of the multiquadric method for numerical solutions of elliptic partial differential equations", *Appl. Math. & Comput.*, 84: 275-302 (1997).
- [17] Y. C. Hon, "A Quasi-radial Basis Functions Method for American Options Pricing", *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5), pp 513-524 (2002).
- [18] Y. C. Hon, and X. Z. Mao, "A Radial Basis Function Method for Solving Options Pricing Models", *Financial Engineering*, 8, (1), 31-49 (1999).
- [19] Jichun Li, C.S. Chen, Darrel Pepper, Yitung Chen, "Mesh-free method for groundwater modeling", *Boundary Elements XXIV*, eds. C.A. Brebbia, A. Tadeu and V. Popov, WIT Press, Southampton, Boston, pp. 115-124 (2002).
- [20] Y. C. Hon, K. F. Cheung, X. Z. Mao, and E. J. Kansa, "A Multiquadric Solution for Shallow Water Equations", *ASCE J. Hydraulic Engineering*, 125, (5), 524-533 (1999).
- [21] S. M. Wong, Y. C. Hon and M. Golberg, "Compactly Supported Radial Basis Functions for Shallow Water Equations", *Applied Mathematics and Computation*, Vol 127, pp. 79-101 (2002).
- [22] F. J. Hickernell and Y. C. Hon, "Radial basis function approximation of the surface wind field from scattered data", *Internat. J. Appl. Sci. Comput.* 4, 221-247 (1998)
- [23] Y. C. Hon, M. W. Lu, W. M. Xue, and X. Zhou, "Multiquadric Method for the Numerical Solution of a Biphasic Model", *Internat. J. Appl. Sci. Comput.*, 88, 153-175 (1997).
- [24] Y. C. Hon, M. Lu, M. W. Xue and X. Zhou, "Numerical Algorithm for Triphasic Model of Charged and Hydrated Soft Tissues", *Computational Mechanics*, 29(1), pp 1-15 (2002)
- [25] H. A. Schwarz, "Gesammelte Mathematische Abhandlungen", 2, 113-143, Springer Berlin, First Published in *Vierteljahsschrift Naturforsch. Gez. Zurich*, 15, 272-286 (1870).
- [26] Barry Smith, Petter Bjorstad, William Gropp, "Domain Decomposition: Parallel Multilevel Methods for Elliptic Partial Differential Equations", New York: Cambridge University Press (1996).
- [27] George Em Karniadakis, Robert M. Kirby, "Parallel Scientific Computing in C++ and Mpi: A Seamless Approach to Parallel Algorithms and Their Implementation", Cambridge University Press (2003).
- [28] <http://www.ddm.org/> Página Oficial de Métodos de Descomposición de Dominio.
- [29] Dubal M.R., "Domain decomposition and local refinement for multiquadric approximations. I: Second order equations in one-dimension", *Int. J. Appl. Sci. Comput.* 1(1), 146-171 (1994).
- [30] Y.C. Hon, Zongmin Wu, "Additive Schwarz Domain Decomposition with Radial Basis Approximation". *Int. J. Appl. Math.*, Vol. 4, No. 1, pp. 81-98 (2000).
- [31] Kansa, E. J. and Y. C. Hon, "Circumventing the ill-conditioning problem with multiquadric radial basis functions: Applications to elliptic partial differential equations", *Comput. Math. Applic.*, Vol. 39, pp. 123-137 (2000).
- [32] X. Zhou, Y. C. Hon, and J. Li, "Overlapping Domain Decomposition Method by Radial Basis Functions", *Appl. Numer. Math.*, 44, (1-2), 241-255 (2003).

- [33] L. Ling, and E.J. Kansa, "Preconditioning for Radial Basis Functions with Domain Decomposition Methods", *Mathematical and Computer Modelling*, Submitted to *Mathematical and Computer Modelling*, March (2004).
- [34] J. Li, and Y. C. Hon, "Domain Decomposition for Radial Basis Meshless Methods", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Vol. 20, Issue 3, pp. 450-462 (2004).
- [35] R.E. Carlson and T.A. Foley, "The parameter \mathfrak{R}^2 in multiquadric interpolation", *Comput. Math. Appl.* 21 (1991).
- [36] Shamuël Rippa, "An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation", *Adv. Comp. Math.* 11, 193-210 (1999).
- [37] R.L. Hardy, "Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces", *J. Geophys. Res.* 76, 1905-1915 (1971).
- [38] J. Moody, and C. J. Darken, "Fast Learning in Networks of Locally-Tuned Processing Units", *Neural Comput.*, 1, 281-294 (1989).
- [39] A.H.-D. Cheng, G. Zammito, E.J. Kansa and G. Davi, "Optimizing shape parameter in the multiquadric collocation solution of PDE", 3rd International ISAAC Congress, Berlin, Germany, 20–25 (2001).
- [40] H. M. Gutmann, "A Radial Basis Function Method for Global Optimization", *J. Global Optimization*, 19, 201-207 (2001).
- [41] Galperin, E.A., Z. Pan and Q. Zheng, "Application of global optimization to implicit solution of partial differential equations", *Comput. Math. Appli.* 25(10/11): 119-124 (1993).
- [42] P. Alotto, A. Caiti, G. Molinari, and M. Repetto, "A Multiquadrics-Based Algorithm for the Acceleration of Simulated Annealing Optimization Procedures", *IEEE Trans. on Magnetics*, 32, (3), 1198-1201 (1996).
- [43] Bengt Fornberg, Grady Wright, "Stable Computation of Multiquadric Interpolants for All Values of the Shape Parameter", *Computers and Mathematics with Applications* 166, 497-523 (2004).
- [44] Shaofan Li, Wing Kam Liu, "Meshfree and particle methods and their applications", *American Society of Mechanical Engineers*, vol. 55, 1 (2002).
- [45] P. González Casanova, "Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations: A Review", UNAM, technical report (2003).
- [46] E. Kallinderis, Y., "Adaptive methods for compressible CFD", *Computer Methods in Applied Science and Engineering*, 189 (2000).
- [47] M. W. J.F. Thompson, B. Soni, "Handbook of grid generation", CRC Press, Boca Raton, FL (1999).
- [48] R. Leveque, "Numerical Methods for Conservation Laws", *Lectures in Mathematics ETH Zürich*, Birkhäuser-Verlag, Basel (1990).
- [49] Y. C. Hon and Li. Chen, "Numerical Comparisons of Two Meshless Methods Using Radial Basis Functions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 26, pp 205-225 (2002).

- [50] W. Gropp and E. Lusk and N. Doss and A. Skjellum, "A high-performance, portable implementation of the MPI message passing interface standard", *Parallel Computing*, Vol 22 Num. 6, pp. 789-828 (1996). See <http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/mpich/>.
- [51] I. Boztosun, A. Charafi, M. Zerroukat, and K. Djidjeli. "Thin-Plate Spline Radial Basis Function Scheme for Advection-Diffusion Problems", *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol. BETEQ 2001, No. 2, pp. 267-282 (2002).