

# Modelos Gráficos Probabilistas

L. Enrique Sucar

INAOE

## Sesión 14: Redes de Decisión

“un agente racional ideal es aquel que, para cada posible secuencia de percepciones, realiza la acción que maximiza su medida de rendimiento esperada, basado en la evidencia y su conocimiento.” [Russell 95]

# Redes de Decisión

- Teoría de Decisiones
  - Utilidad
  - Axiomas de utilidad
  - Utilidad del dinero
- Modelos para soporte de decisiones
  - Árboles de decisión
  - Diagramas de influencia
  - Redes de decisión dinámicas

# Teoría de Decisiones

- Marco teórico para tomar decisiones en forma racional
- Agente Racional – toma sus decisiones de forma que maximice la utilidad de sus acciones en función de sus objetivos y su conocimiento acerca del mundo

# Elementos

- Alternativas: decisiones del agente
- Eventos: producto del ambiente u otros agentes (no tiene control)
- Resultados: combinación de las decisiones y eventos, cada uno tiene asociada una preferencia para el agente
- Preferencias: valor que establece el agente de acuerdo a sus metas

# Utilidad

- La utilidad expresa que tan deseable es el resultado de cada posible acción
- Ya que normalmente se tiene incertidumbre, se utiliza la utilidad esperada:

$$U(a) = \sum_r U(r) P(r|a,e)$$

- Donde:
  - a = posibles acciones
  - r = posibles resultados
  - e = evidencia disponible

# Lotería

- A cada posible resultado (escenario) se la asocia una probabilidad de ocurrencia, al conjunto de estos se le denomina una *lotería*
- Cada estado de la lotería tiene una utilidad, de forma que se pueden ordenar de acuerdo a la preferencia del agente:
  - Prefiere A a B –  $A > B$
  - Indiferente –  $A \sim B$

# Axiomas de Utilidad

1. Orden – dados dos estados, se prefiere uno u otro, o se es indiferente
2. Transitividad – si  $A > B$  y  $B > C$ , entonces  $A > C$
3. Continuidad – Si  $A > B > C$ , existe algún valor de probabilidad,  $p$ , de forma que es indiferente entre obtener  $B$  o la lotería  $A, p$  y  $C, 1-p$

# Axiomas de Utilidad

4. Substitución – si el agente es indiferente entre dos loterías A y B, entonces es indiferente entre dos loterías más complejas que son iguales excepto en que A es substituida por B en una de ellas
5. Monotonicidad – si hay dos loterías con los mismos resultados, A y B, y el agente prefiere A, entonces debe preferir la lotería en que A tiene mayor probabilidad
6. Descomposición – loterías compuestas se pueden reducir a loterías más simples usando las leyes de probabilidad

# Principio de Utilidad

- Se prefiere la acción (decisión) que de la mayor utilidad esperada:

$$U(A) > U(B) \rightarrow A > B \text{ (A es mejor que B)}$$

- Si la utilidad es la misma se es indiferente:

$$U(A) = U(B) \rightarrow A \sim B \text{ (indiferencia)}$$

- Normalmente se mide la utilidad en términos monetarios, aunque la relación de utilidad y \$ no es lineal!

# Utilidad del Dinero

- Ejemplo:

- “En un concurso ya tienes \$1,000,000. Tienes la oportunidad de quedarte con esto o lanzar una moneda – si cae águila ganas \$3,000,000, si no pierdes lo que tenías”

- ¿Qué escogerías?

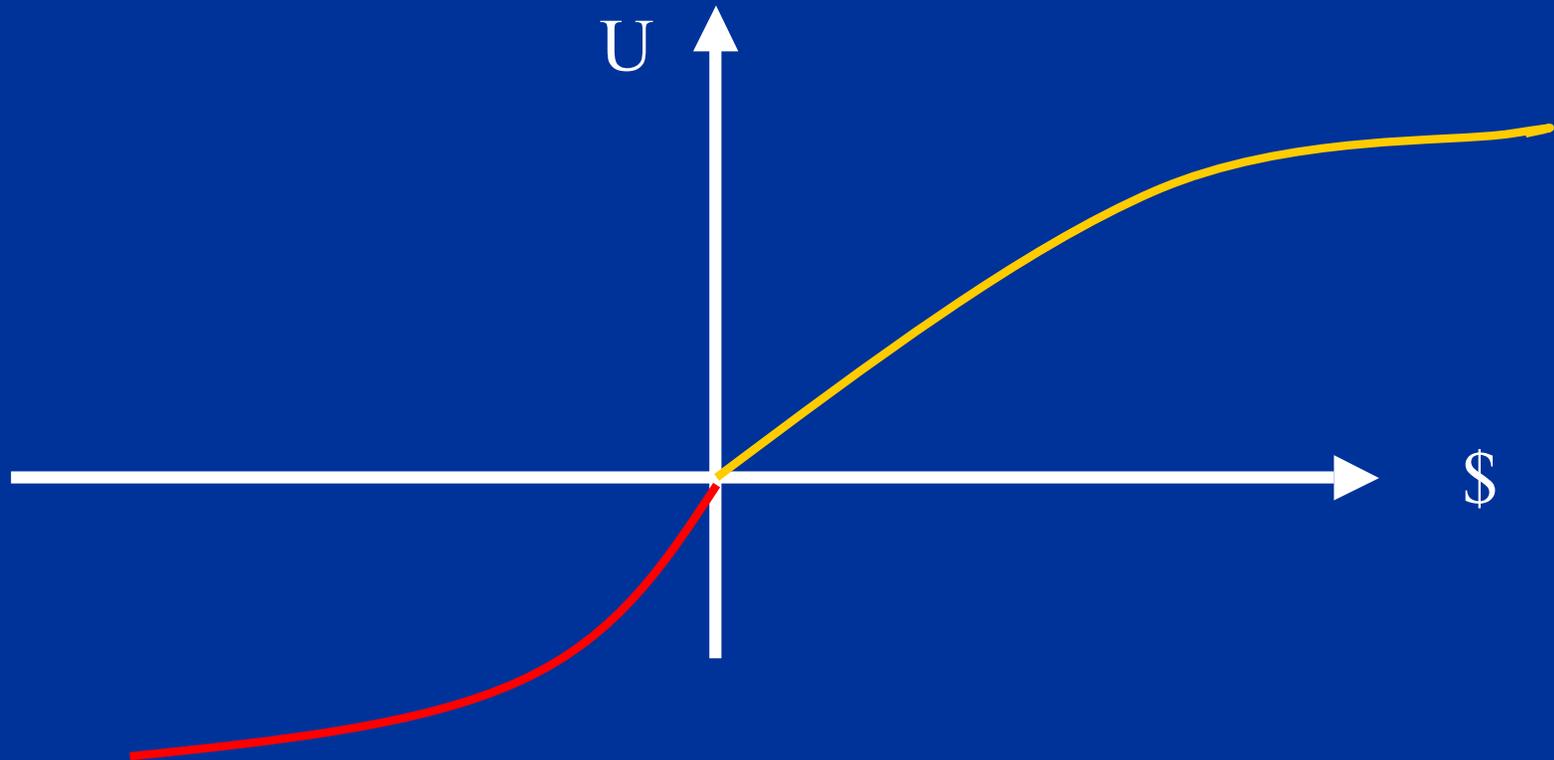
- Valor monetario esperado:

- Quedarse –  $VME = \$1,000,000$

- Apostar –  $VME = 0.5 \times 0 + 0.5 \times \$3,000,000 = \$1,500,000$

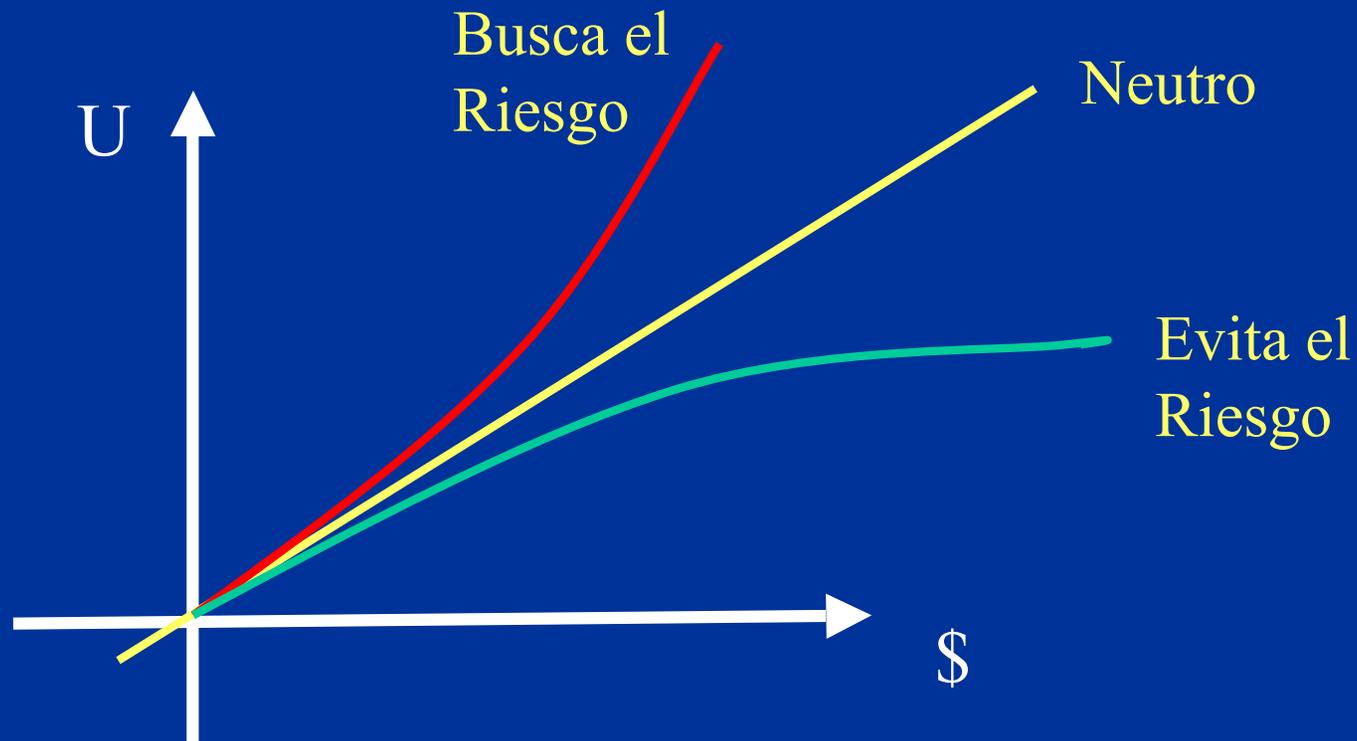
# Utilidad del Dinero

- Se ha encontrado empíricamente para la mayor parte de las personas hay existe una relación logarítmica entre VME y la utilidad.



# Utilidad del Dinero

- Sin embargo, para diferentes personas (empresas) puede haber diferentes relaciones entre  $U$  y VME dependiendo de la situación y el contexto



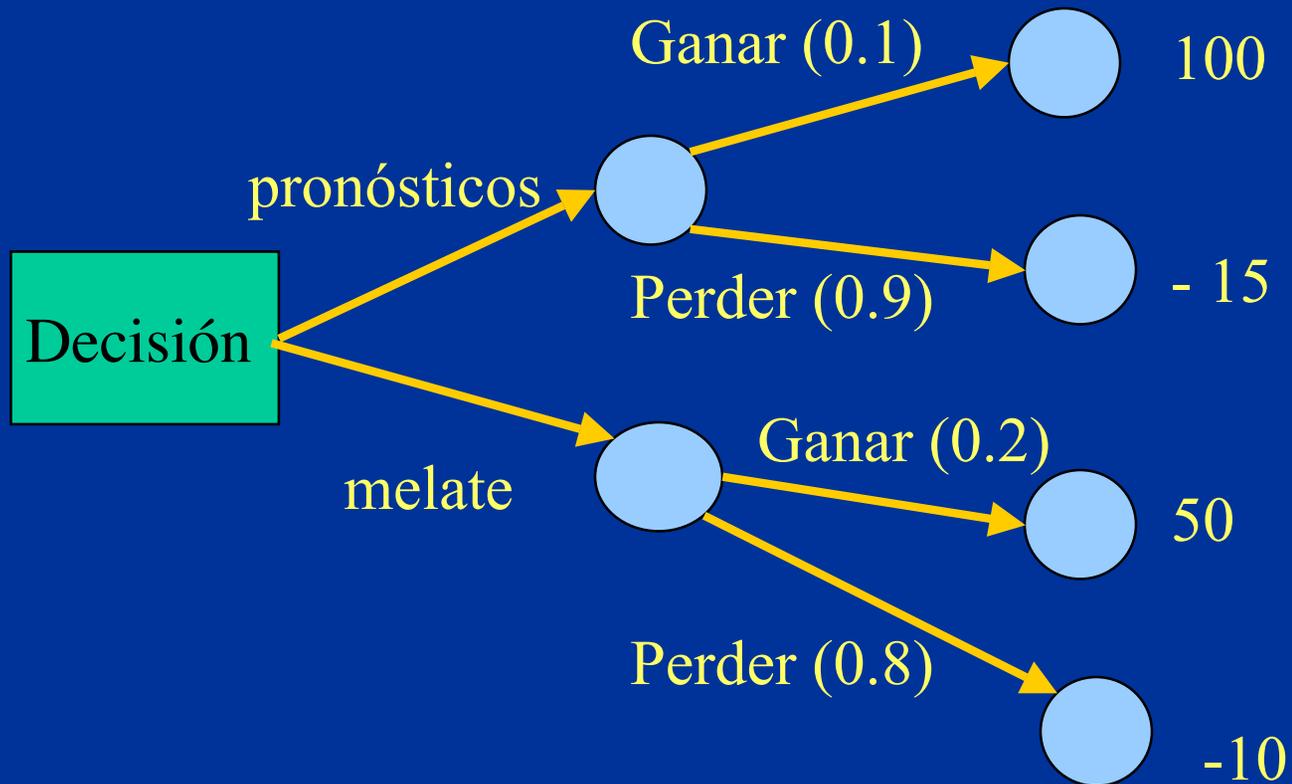
# Árboles de Decisión

- Un árbol de decisión es una representación gráfica de las alternativas disponibles para el agente y los aspectos que son inciertos
- Un árbol de decisión tiene dos tipos de nodos:
  - Nodos de decisión (cuadrados) - alternativas del agente
  - Nodos aleatorios (círculos) - posibles resultados de un evento incierto

# Árboles de Decisión

- El árbol de decisión se puede ver como una “guía” para el tomador de decisiones:
  - Al encontrar un nodo de decisión debe seleccionar una de las alternativas
  - Al encontrar un nodo aleatorio no tiene control, la trayectoria esta determinada por las probabilidades
- Cada alternativa en un nodo aleatorio tiene asociada una probabilidad
- Los nodos terminales (hojas) del árbol tienen un costo o utilidad (normalmente en unidades monetarias)

# Ejemplo de Árbol de Decisión



# Evaluación

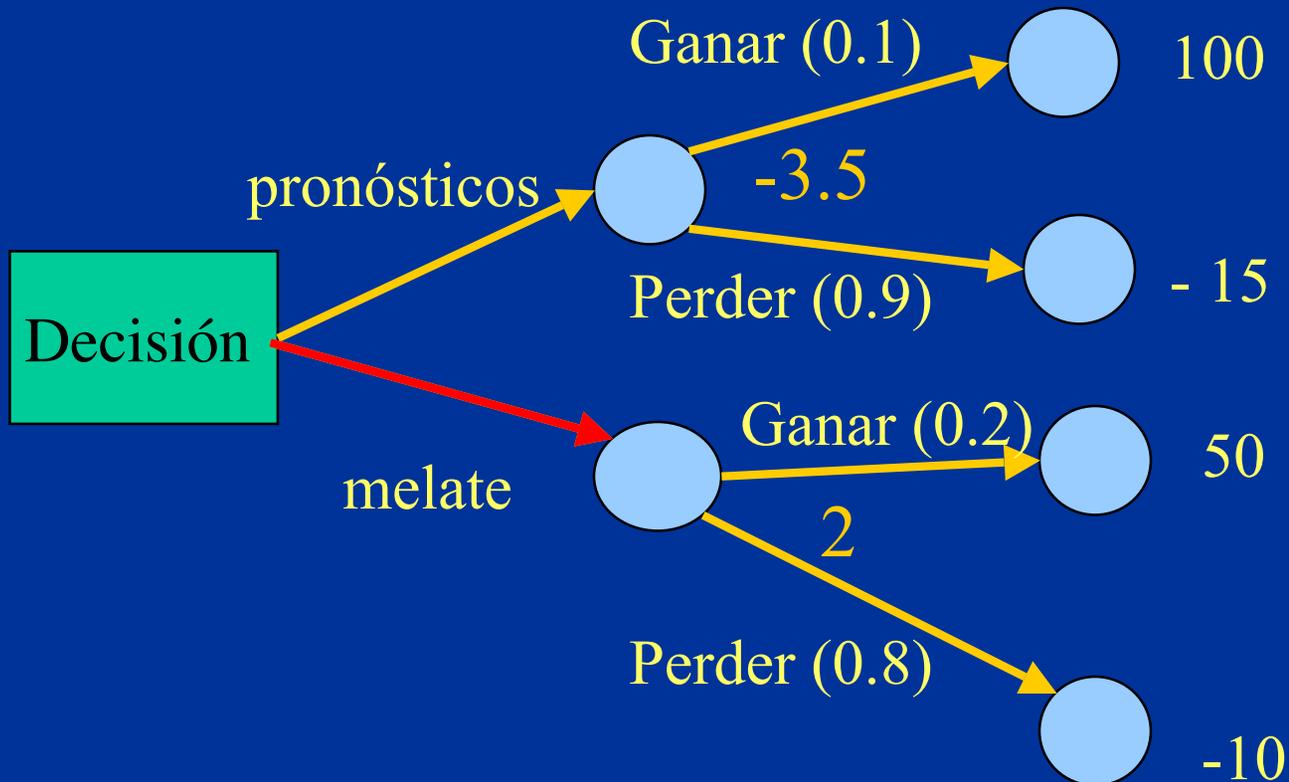
- A partir de los nodos terminales (de las hojas hacia la raíz):
  - Para los nodos aleatorios,  $E$ , se calcula la utilidad (costo) esperado en función de los costos de cada alternativa y sus probabilidades asociadas

$$V(E) = \sum P(\text{resultado}(E)) V(\text{resultado}(E))$$

- Para los nodos de decisión,  $D$ , se selecciona la alternativa de mayor utilidad (menor costo) esperado:

$$V(D) = \max V(\text{resultado}(D))$$

# Ejemplo de Evaluación



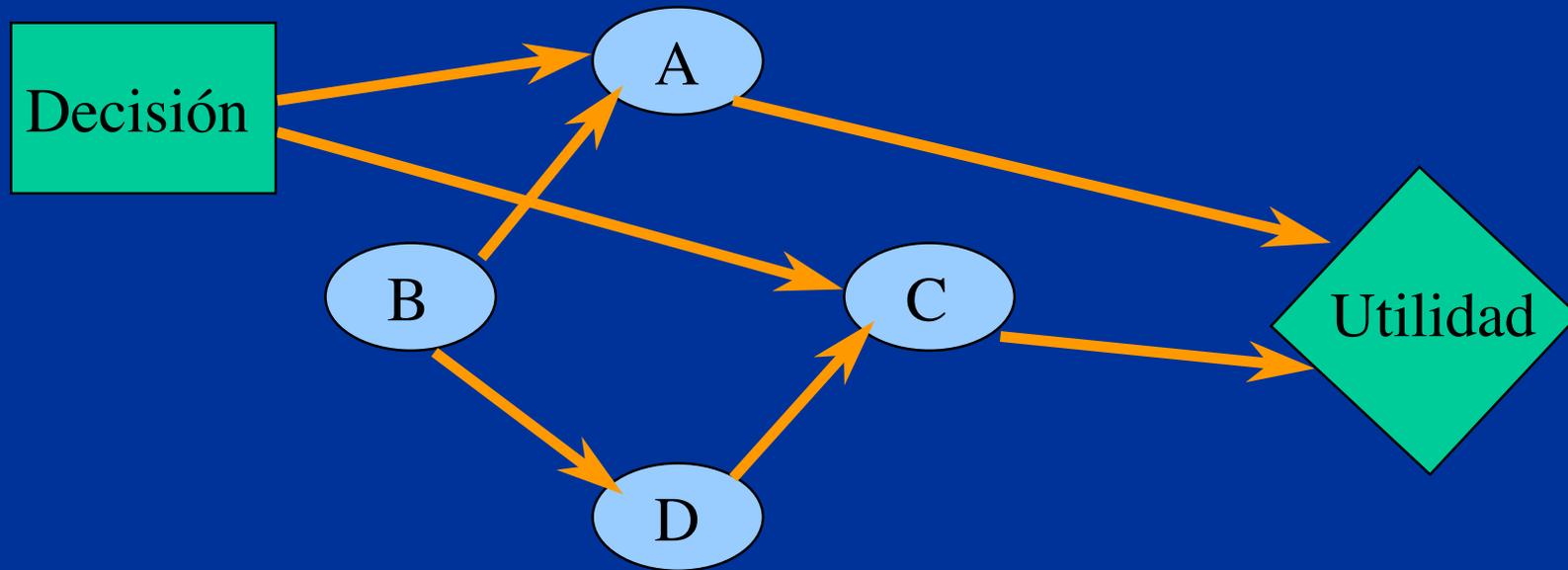
# Diagramas de Influencia

- Alternativa a los árboles de decisión que es más expresiva y a la vez permite construir modelos más compactos basados en modelos gráficos
- Se pueden ver como una extensión a las redes bayesianas, incorporando nodos de decisión y nodos de utilidad

# Tipos de Nodos

- Nodos Aleatorios – (óvalos)
- Nodos de Decisión – (rectángulos)
- Nodos de Utilidad – (rombos)

# Ejemplo



# Nodos Aleatorios

- Representan variables aleatorias como en redes bayesianas
- Pueden ser observadas o estimadas



# Nodo de Decisión

- Representan los puntos de decisión del agente
- Tiene un conjunto de valores que corresponden a las opciones en ese punto
- Los arcos hacia nodos de decisión son de *información*, indican precedencia en el tiempo
- Pueden tener arcos (influenciar) a los nodos aleatorios o a los nodos de utilidad
- Puede haber varios nodos de decisión en una red de decisión



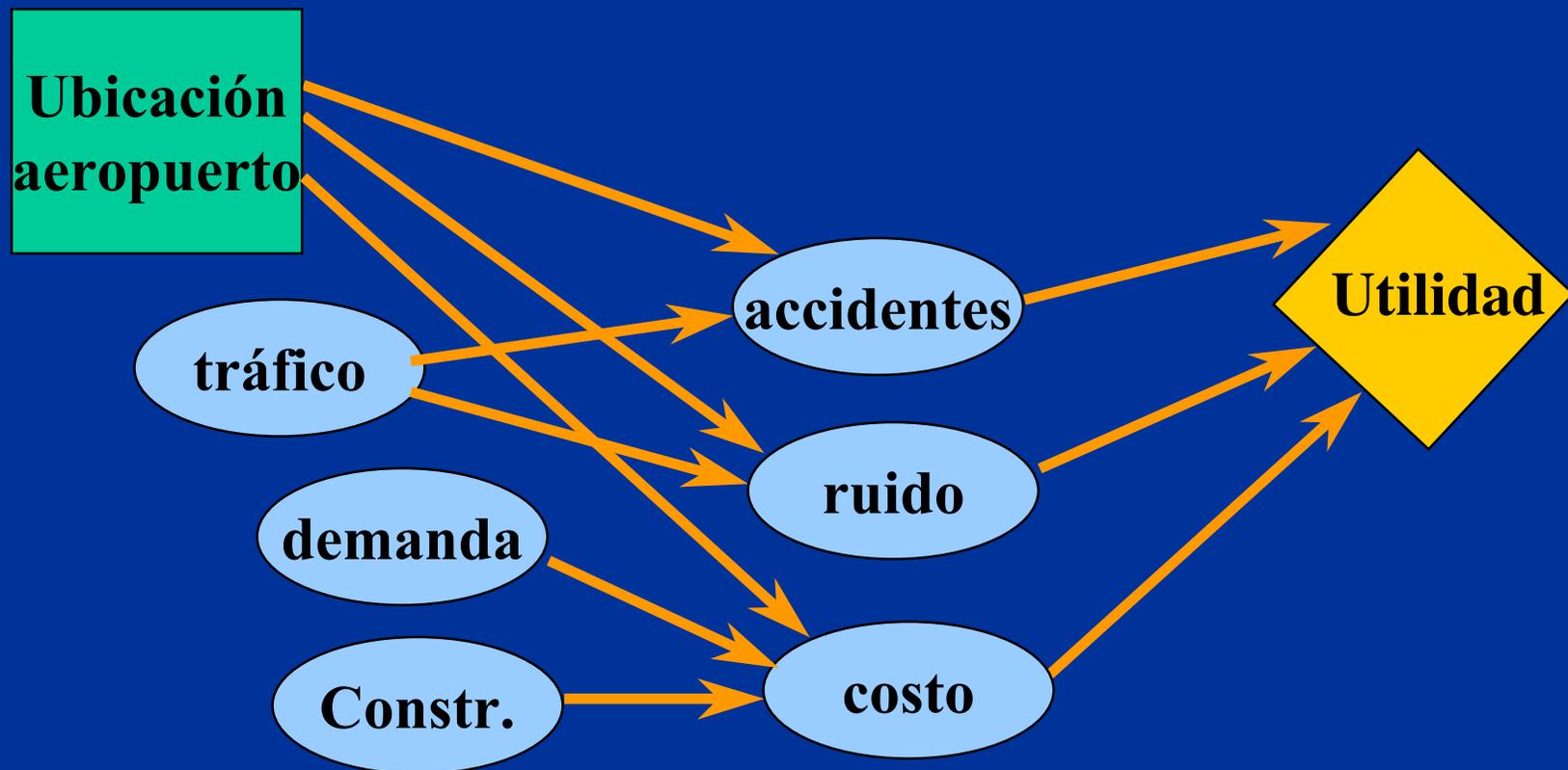
**Decisión**

# Nodo de Utilidad

- Representan la función de utilidad del agente
- Tienen como padres los nodos aleatorios y de decisión que afectan directamente la utilidad
- La utilidad se puede definir como:
  - Una matriz con un valor por cada combinación de los padres
  - Una función matemática
- En los modelos básicos hay un nodo de utilidad, pero puede haber más. Generalmente se asume que la utilidad es la suma (pesada) de los nodos de utilidad



# Ejemplo – modelo para decidir la ubicación de un Aeropuerto



# Evaluación (DI simple: un nodo de decisión y de utilidad)

1. Asignar valores a todos los nodos aleatorios conocidos (evidencia)
2. Para cada posible decisión:
  - Asignar dicho valor al nodo de decisión
  - Propagar las probabilidades
  - Calcular la utilidad
3. Seleccionar la alternativa de mayor utilidad

# Técnica de Evaluación

- En general existen 3 tipos de técnicas para resolver diagramas de influencia:
  - Conversión a un árbol de decisión
  - Eliminación de variables - aplicando una serie de transformaciones a la red
  - Conversión a una red bayesiana

# Eliminación de Variables

- Si hay varios nodos de decisión se van evaluando uno por uno en “orden”
- Para ello se requiere hacer un ordenamiento mediante una transformación de la red
- El algoritmo de evaluación se basa en una serie de transformaciones del grafo – remover nodos e invertir arcos, tal que no modifican la política óptima

# Red de decisión regular

- Una red de decisión es regular si:
  1. Es un grafo acíclico dirigido
  2. El nodo de utilidad no tiene sucesores
  3. Hay una trayectoria dirigida que contiene a todos los nodos de decisión
- La tercera condición implica un ordenamiento total de todas las decisiones
- Una representación alternativa que no impone estas restricciones son los *LIMIDs* (*L*imited *M*emory *I*nfluence *D*iagramas)

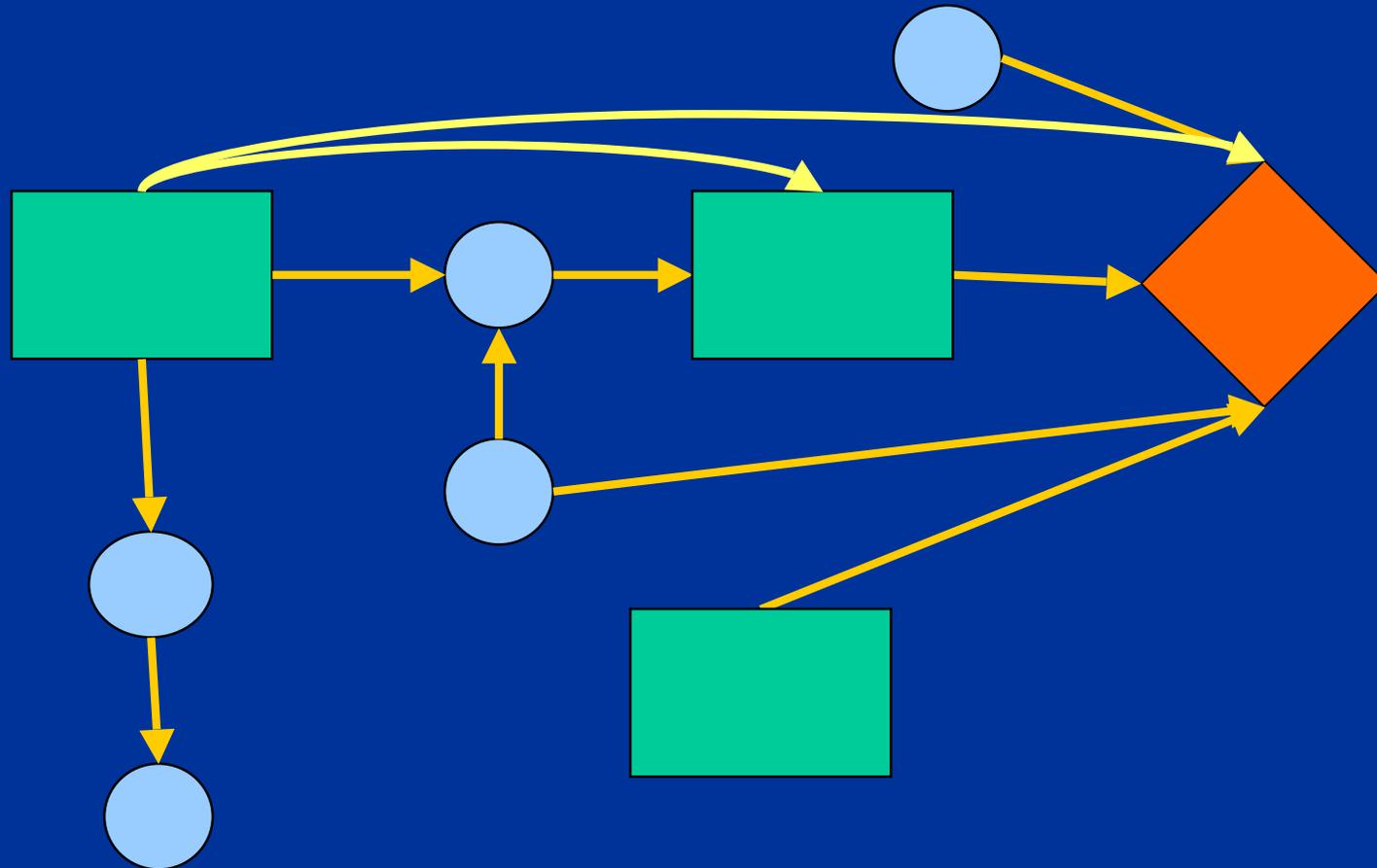
# Transformaciones

- Eliminar nodos aleatorios o de decisión que sean nodos hoja (*barren nodes*)- no afectan las decisiones
- Eliminar nodos aleatorios que son padres del nodo de utilidad y no tienen otros hijos – se recalcula el nodo de utilidad en base a los padres del nodo eliminado
- Eliminar nodos de decisión que sean padres del nodo de utilidad y que sus padres también sean padres del nodo de utilidad – tomar la decisión de mayor utilidad y guardarla en el nodo de utilidad

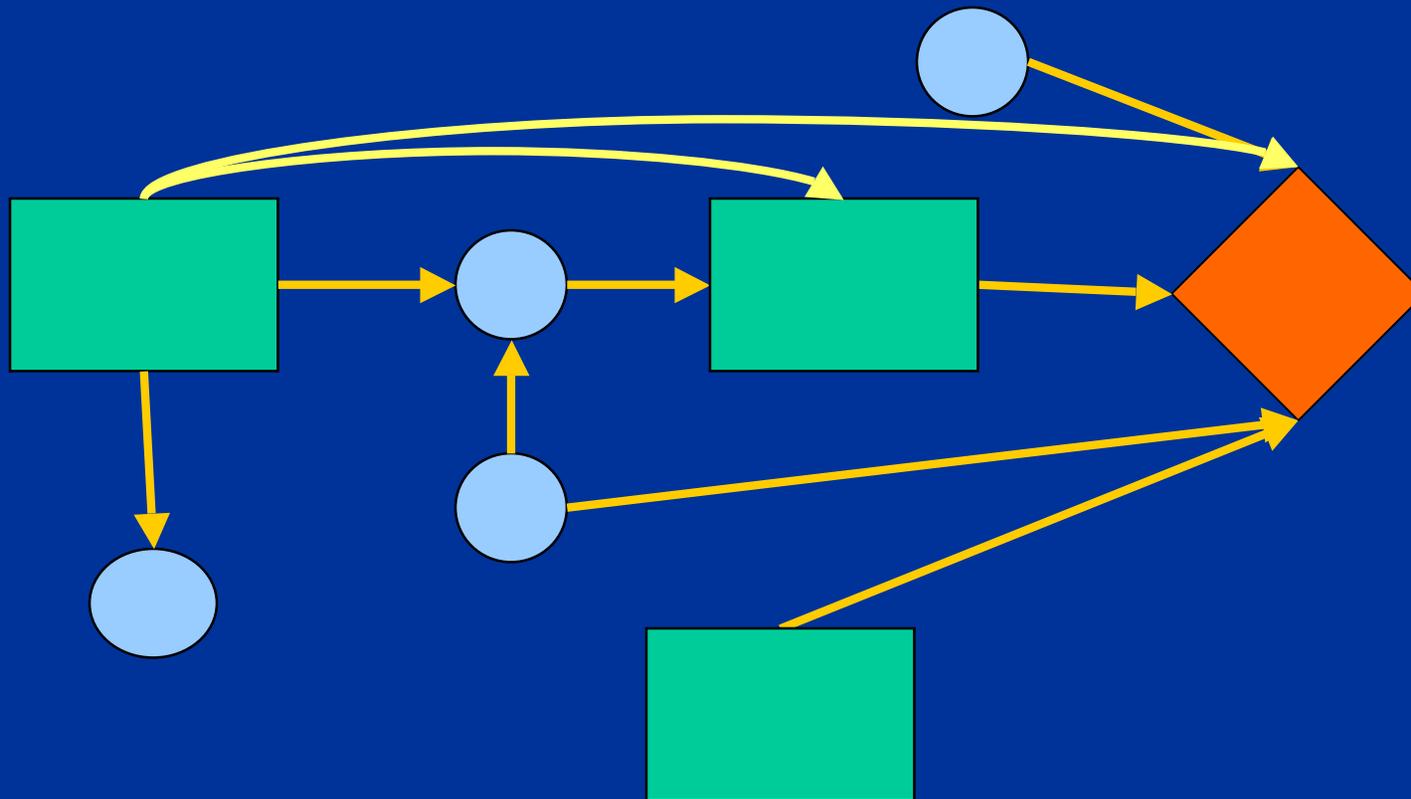
# Transformaciones

- Inversión de arcos: se puede invertir el arco entre los nodos aleatorios  $i \rightarrow j$  si no hay otra trayectoria entre  $i - j$ 
  - se invierte el arco  $j \rightarrow i$  y cada nodo hereda los padres del otro

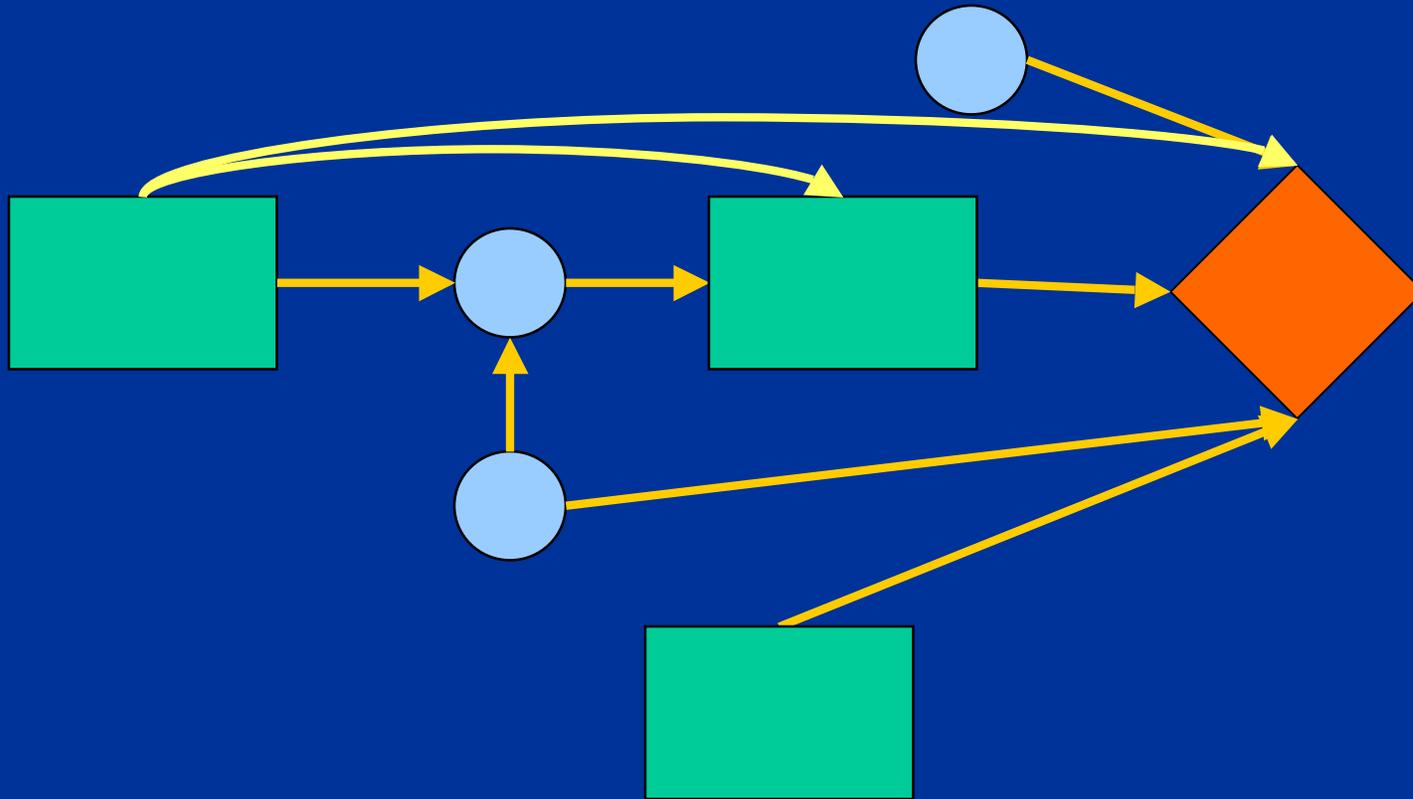
# Ejemplo de transformación



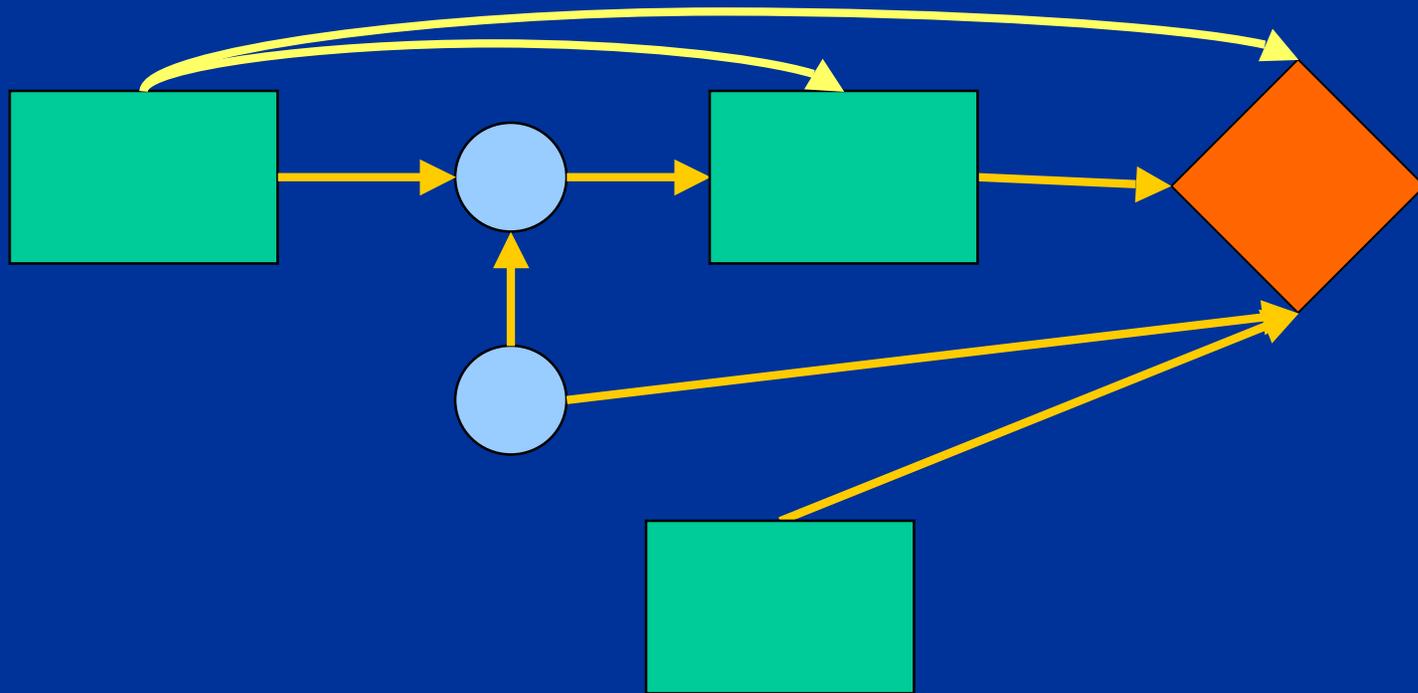
# Ejemplo de transformación



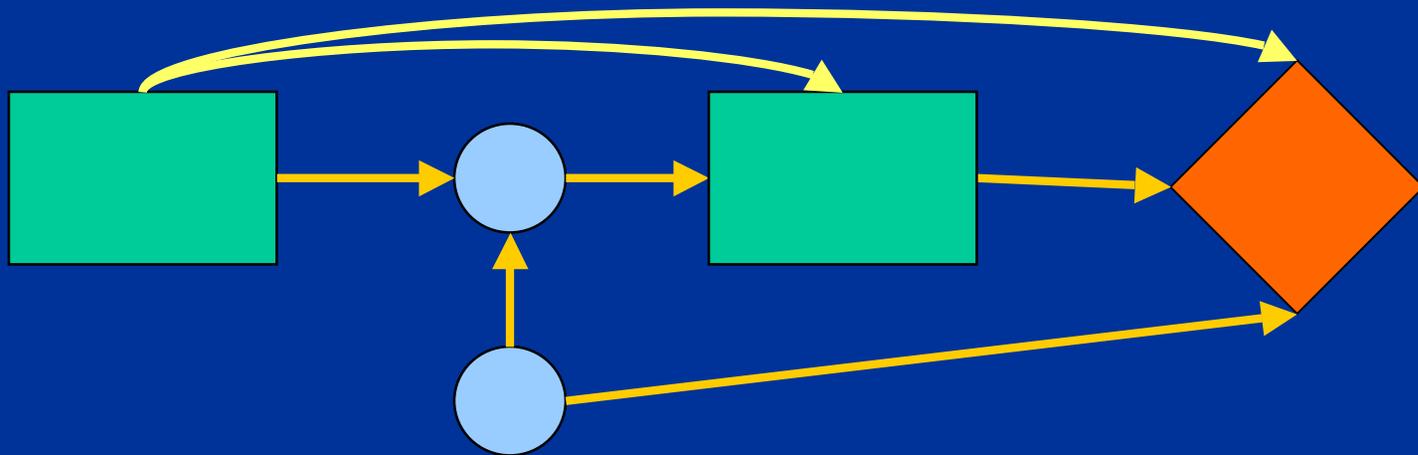
# Ejemplo de transformación



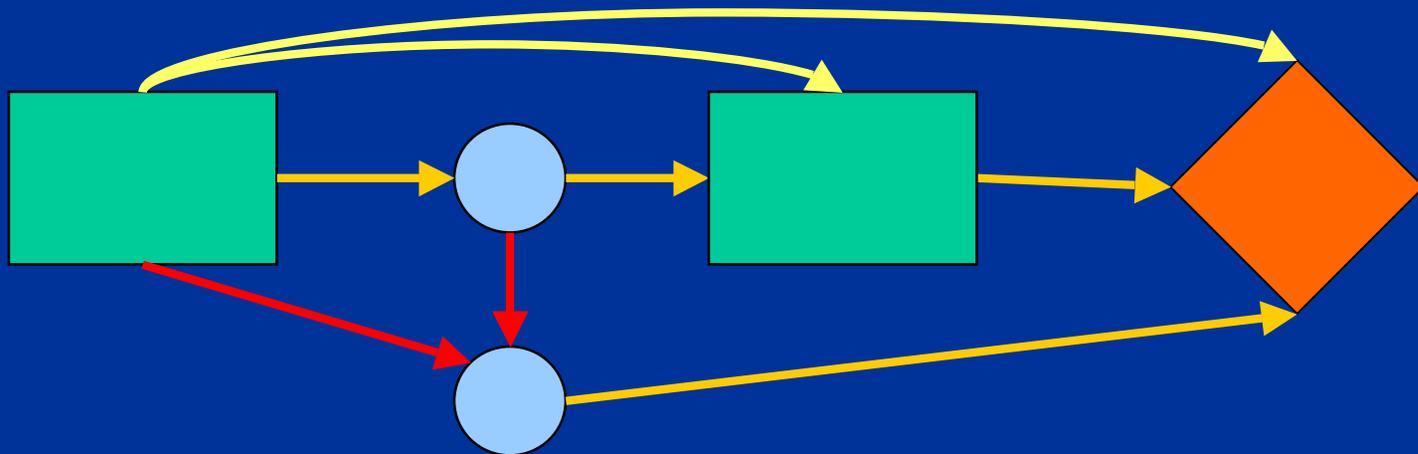
# Ejemplo de transformación



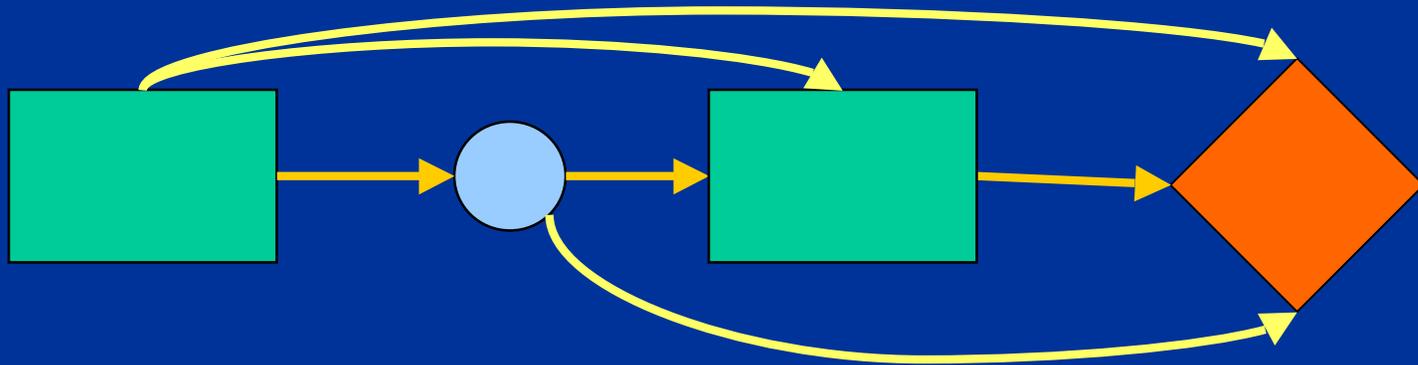
# Ejemplo de transformación



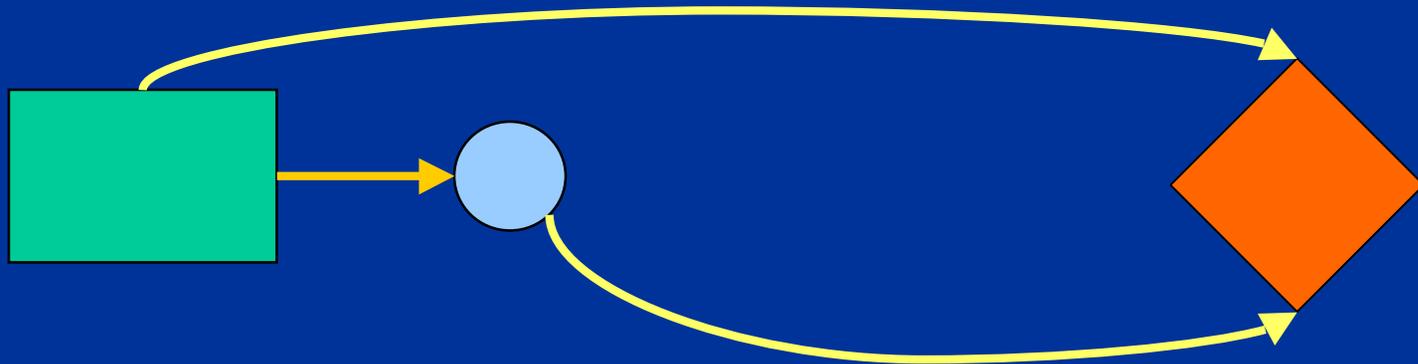
# Ejemplo de transformación



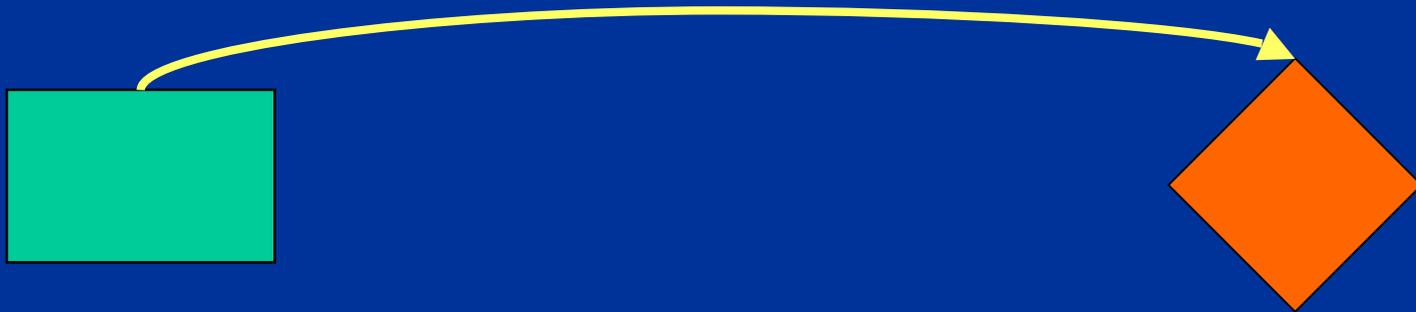
# Ejemplo de transformación



# Ejemplo de transformación



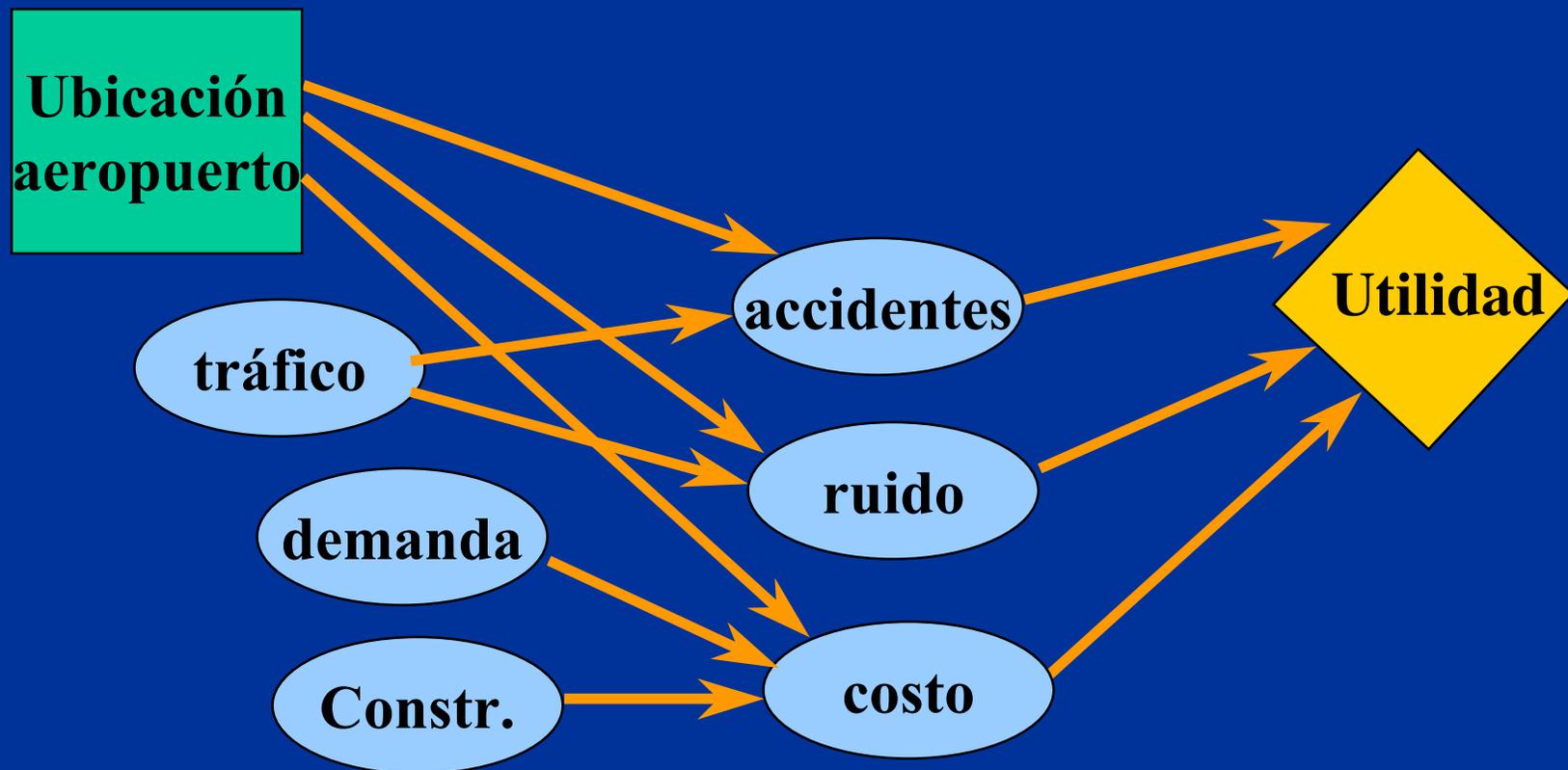
# Ejemplo de transformación



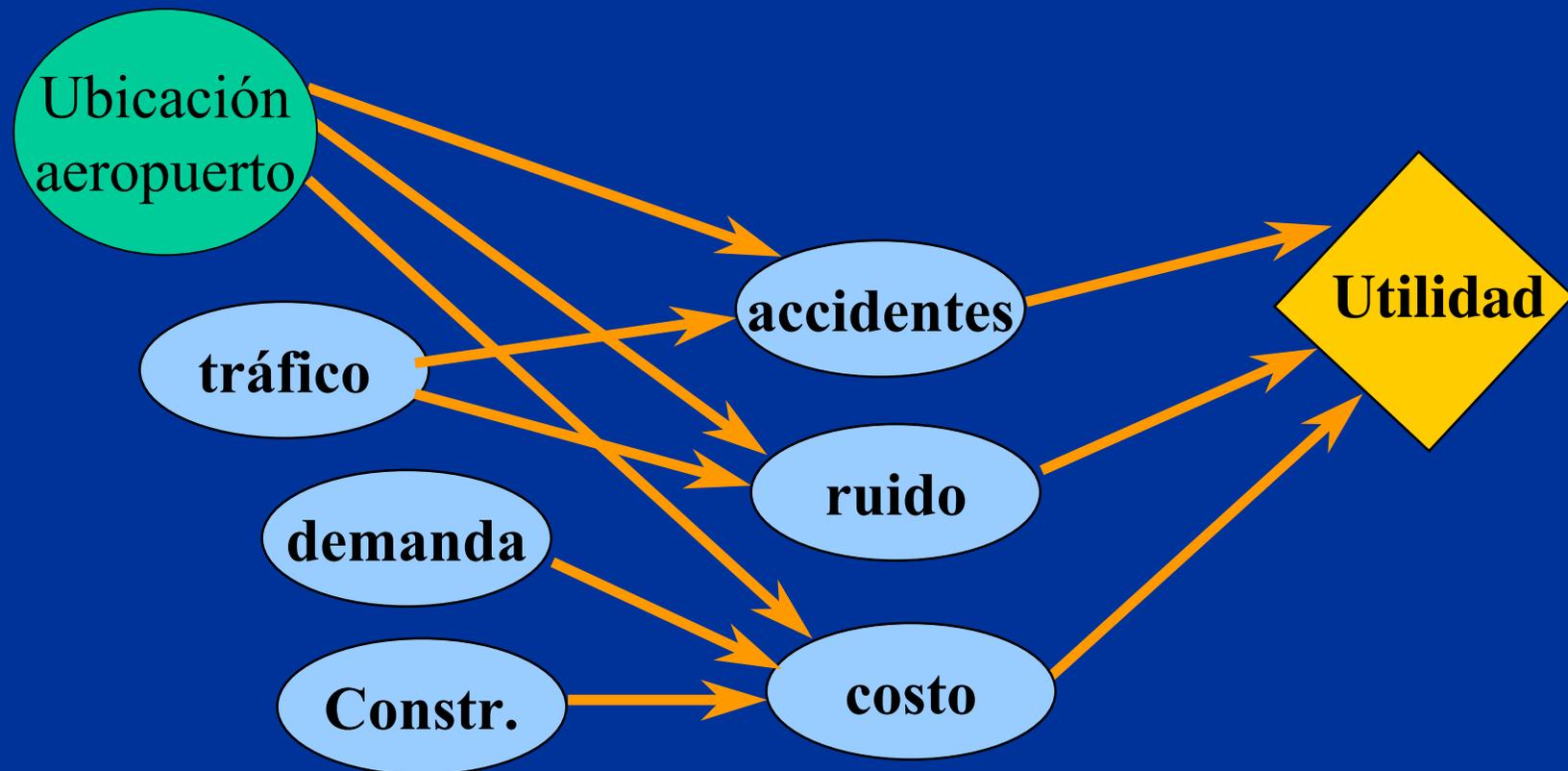
# Conversión a una red bayesiana

- Otra forma de resolver una red de decisión es transformarla a una red bayesiana:
  - Los nodos de decisión se convierten a nodos aleatorios con una distribución uniforme
  - Los nodos de utilidad se convierten a nodos aleatorios binarios, para los que su probabilidad es proporcional a la utilidad
- Entonces el problema se reduce a propagar en la red bayesiana para todas las combinaciones de los nodos de decisión, de forma que se maximice la probabilidad del nodo(s) de utilidad

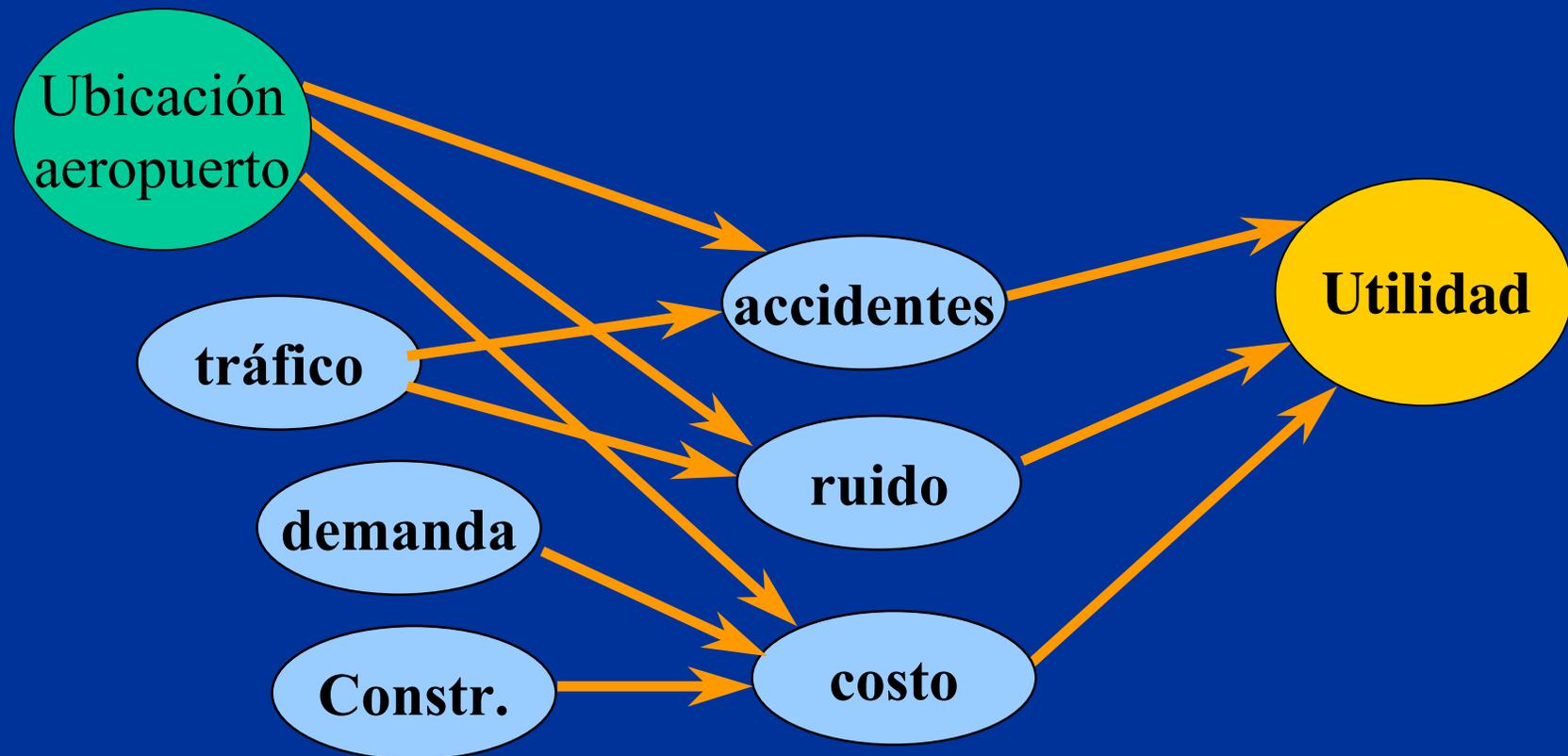
# Ejemplo de Transformación



# Ejemplo de Transformación



# Ejemplo de Transformación



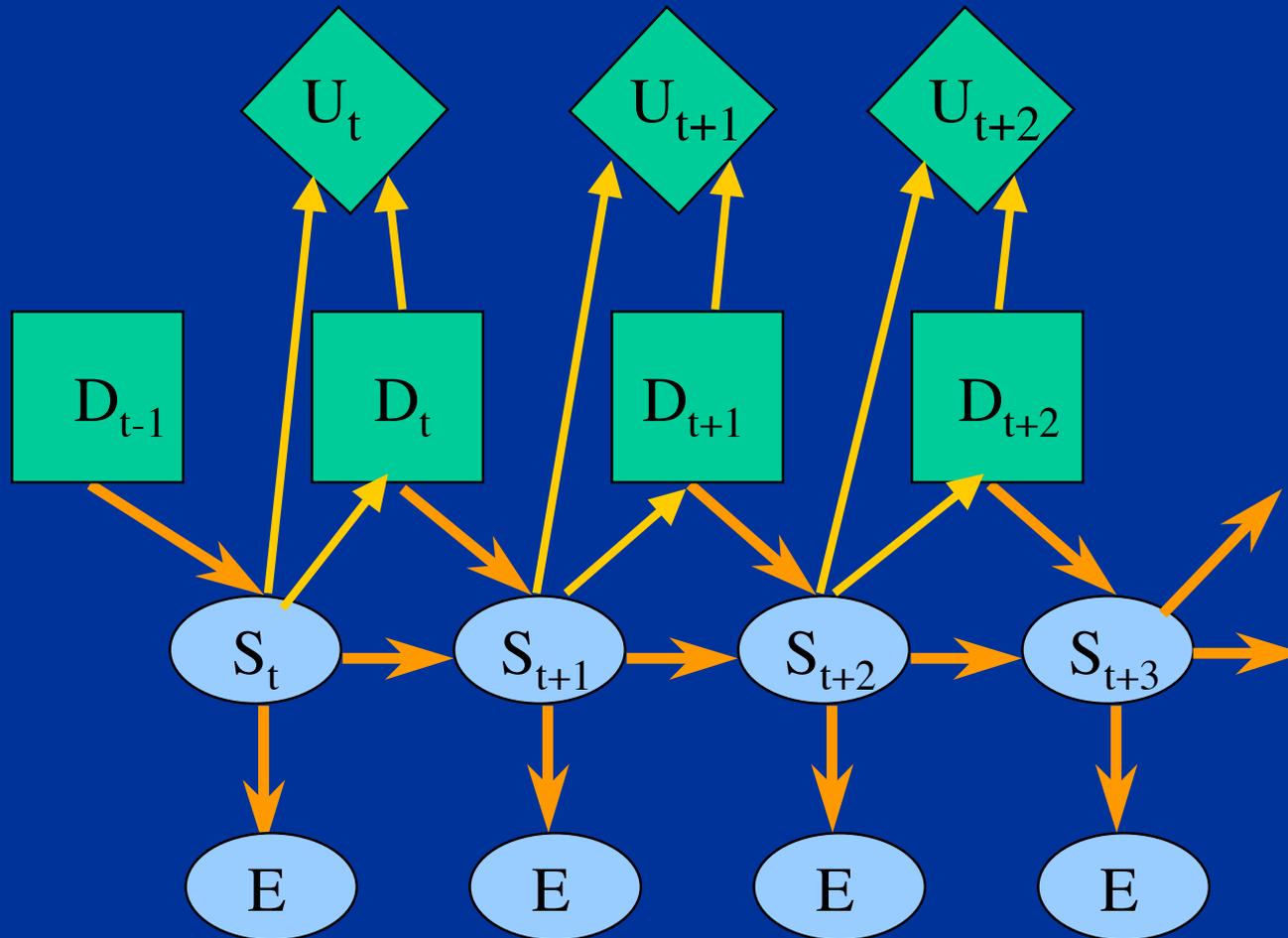
# Ejemplo en Hugin: ¿Llevar paraguas?

- Nodos aleatorios:
  - predicción del clima
  - clima
- Nodos de decisión:
  - escuchar el pronóstico
  - llevar paraguas
- Nodo de utilidad:
  - considera el compromiso entre el costo de llevar el paraguas vs. el costo de mojarse

# Redes de decisión dinámicas

- Este concepto se puede extender a la toma de decisiones en el tiempo – redes de decisión dinámicas
- Incorporan nodos de decisión y de utilidad a las redes bayesianas dinámicas
- Normalmente se tienen una serie de decisiones en el tiempo y una cierta utilidad en el futuro

# Redes de Decisión Dinámicas



# Procesos de Decisión de Markov

- Una red de decisión dinámica es equivalente a un MDP – proceso de decisión de Markov o a un POMDP – proceso de decisión de Markov parcialmente observable
- Sin embargo, en un MDP puede haber un número infinito de decisiones o etapas temporales
- Estos modelos son el tema de la siguiente sesión

# Referencias

- [Russell & Norvig] – Cap. 16
- [Sucar, Morales, Hoey] - Caps. 1, 2
- Borrás, Análisis de incertidumbre y riesgo para la toma de decisiones, Comunidad Morelos, 2001.
- Hiller & Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden-Day – Cap. 15
- Warner, A tutorial introduction to decision theory, en Readings on Uncertain Reasoning, Morgan-Kaufmann
- Shachter, Evaluating influence diagrams, Operations Research 34, 1986
- Crawley, Evaluating influence diagrams, 2004.