

Modelos Gráficos Probabilistas

L. Enrique Sucar

INAOE

Sesión 14: Redes de Decisión

“un agente racional ideal es aquel que, para cada posible secuencia de percepciones, realiza la acción que maximiza su medida de rendimiento esperada, basado en la evidencia y su conocimiento.” [Russell 95]

Redes de Decisión

- **Teoría de Decisiones**
 - Utilidad
 - Axiomas de utilidad
 - Utilidad del dinero
- **Modelos para soporte de decisiones**
 - Árboles de decisión
 - Diagramas de influencia
 - Redes de decisión dinámicas

Teoría de Decisiones

- Marco teórico para tomar decisiones en forma racional
- Agente Racional – toma sus decisiones de forma que maximice la utilidad de sus acciones en función de sus objetivos y su conocimiento acerca del mundo

Elementos

- Alternativas: decisiones del agente
- Eventos: producto del ambiente u otros agentes (no tiene control)
- Resultados: combinación de las decisiones y eventos, cada uno tiene asociada una preferencia para el agente
- Preferencias: valor que establece el agente de acuerdo a sus metas

Utilidad

- La utilidad expresa que tan deseable es el resultado de cada posible acción
- Ya que normalmente se tiene incertidumbre, se utiliza la utilidad esperada:

$$U(a) = \sum_r U(r) P(r|a,e)$$

- Donde:
 - a = posibles acciones
 - r = posibles resultados
 - e = evidencia disponible

Lotería

- A cada posible resultado (escenario) se la asocia una probabilidad de ocurrencia, al conjunto de estos se le denomina una *lotería*
- Cada estado de la lotería tiene una utilidad, de forma que se pueden ordenar de acuerdo a la preferencia del agente:
 - Prefiere A a B – $A > B$
 - Indiferente – $A \sim B$

Axiomas de Utilidad

1. Orden – dados dos estados, se prefiere uno u otro, o se es indiferente
2. Transitividad – si $A > B$ y $B > C$, entonces $A > C$
3. Continuidad – Si $A > B > C$, existe algún valor de probabilidad, p , de forma que es indiferente entre obtener B o la lotería A, p y $C, 1-p$

Axiomas de Utilidad

4. Substitución – si el agente es indiferente entre dos loterías A y B, entonces es indiferente entre dos loterías más complejas que son iguales excepto en que A es substituida por B en una de ellas
5. Monotonicidad – si hay dos loterías con los mismos resultados, A y B, y el agente prefiere A, entonces debe preferir la lotería en que A tiene mayor probabilidad
6. Descomposición – loterías compuestas se pueden reducir a loterías más simples usando las leyes de probabilidad

Principio de Utilidad

- Se prefiere la acción (decisión) que de la mayor utilidad esperada:

$$U(A) > U(B) \rightarrow A > B \text{ (A es mejor que B)}$$

- Si la utilidad es la misma se es indiferente:

$$U(A) = U(B) \rightarrow A \sim B \text{ (indiferencia)}$$

- Normalmente se mide la utilidad en términos monetarios, aunque la relación de utilidad y \$ no es lineal!

Utilidad del Dinero

- Ejemplo:

- “En un concurso ya tienes \$1,000,000. Tienes la oportunidad de quedarte con esto o lanzar una moneda – si cae águila ganas \$3,000,000, si no pierdes lo que tenías”

- ¿Qué escogerías?

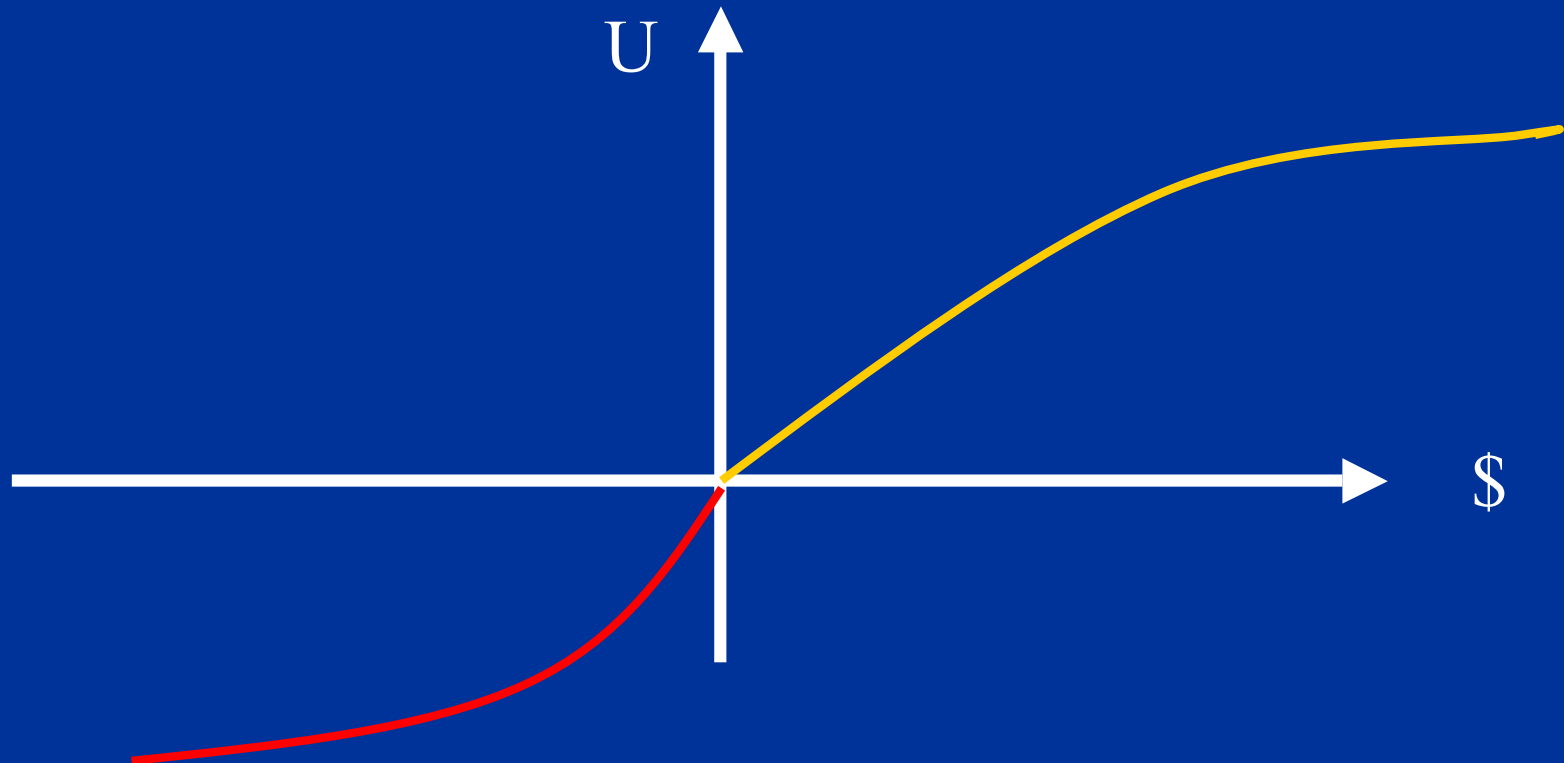
- Valor monetario esperado:

- Quedarse – $VME = \$1,000,000$

- Apostar – $VME = 0.5 \times 0 + 0.5 \times \$3,000,000 = \$1,500,000$

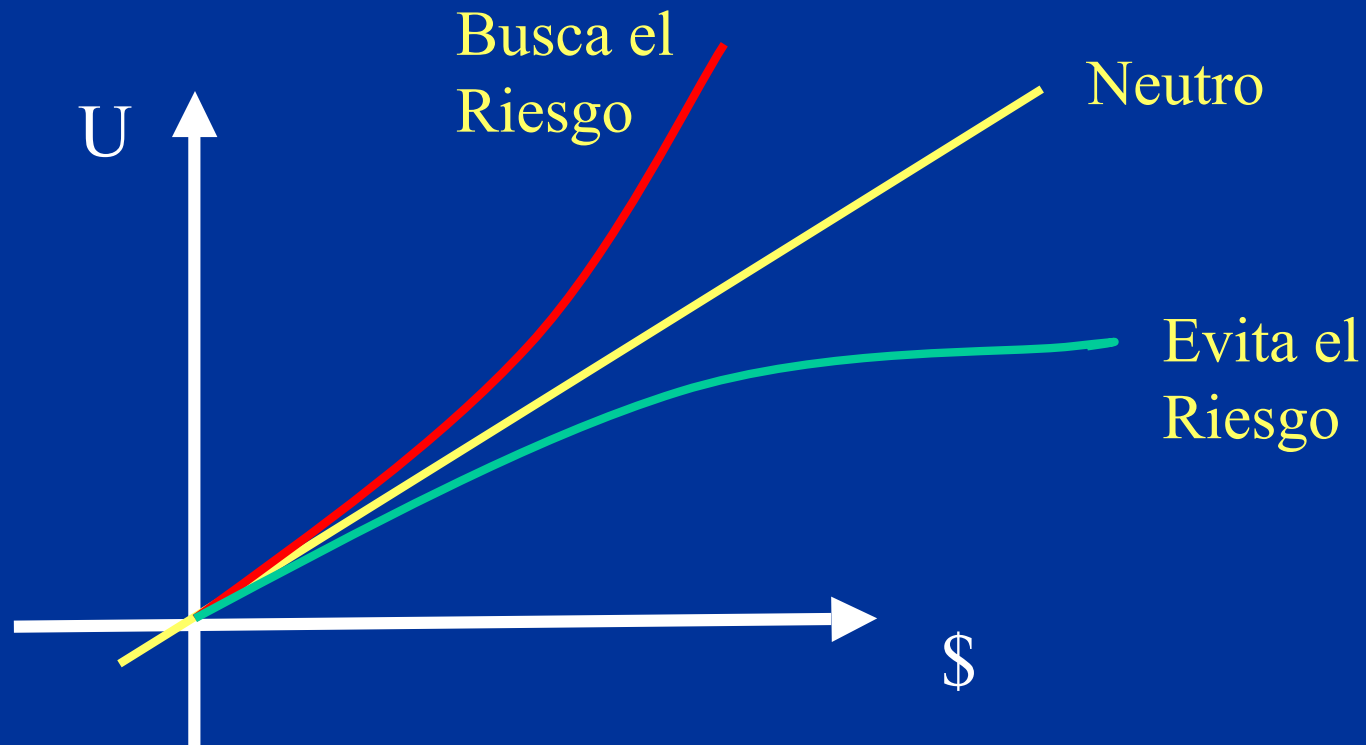
Utilidad del Dinero

- Se ha encontrado empíricamente para la mayor parte de las personas hay existe una relación logarítmica entre VME y la utilidad.



Utilidad del Dinero

- Sin embargo, para diferentes personas (empresas) puede haber diferentes relaciones entre U y VME dependiendo de la situación y el contexto



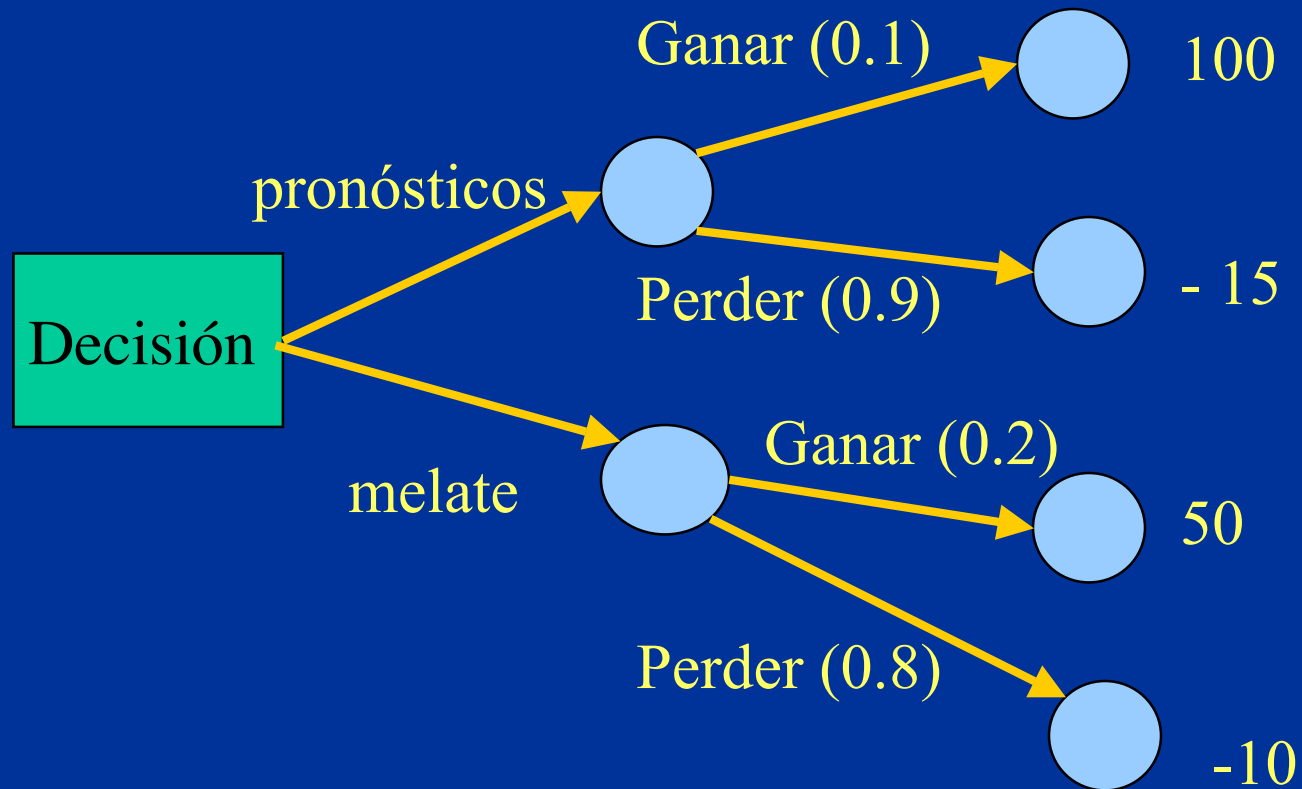
Árboles de Decisión

- Un árbol de decisión es una representación gráfica de las alternativas disponibles para el agente y los aspectos que son inciertos
- Un árbol de decisión tiene dos tipos de nodos:
 - Nodos de decisión (cuadrados) - alternativas del agente
 - Nodos aleatorios (círculos) - posibles resultados de un evento incierto

Árboles de Decisión

- El árbol de decisión se puede ver como una “guía” para el tomador de decisiones:
 - Al encontrar un nodo de decisión debe seleccionar una de las alternativas
 - Al encontrar un nodo aleatorio no tiene control, la trayectoria esta determinada por las probabilidades
- Cada alternativa en un nodo aleatorio tiene asociada una probabilidad
- Los nodos terminales (hojas) del árbol tienen un costo o utilidad (normalmente en unidades monetarias)

Ejemplo de Árbol de Decisión



Evaluación

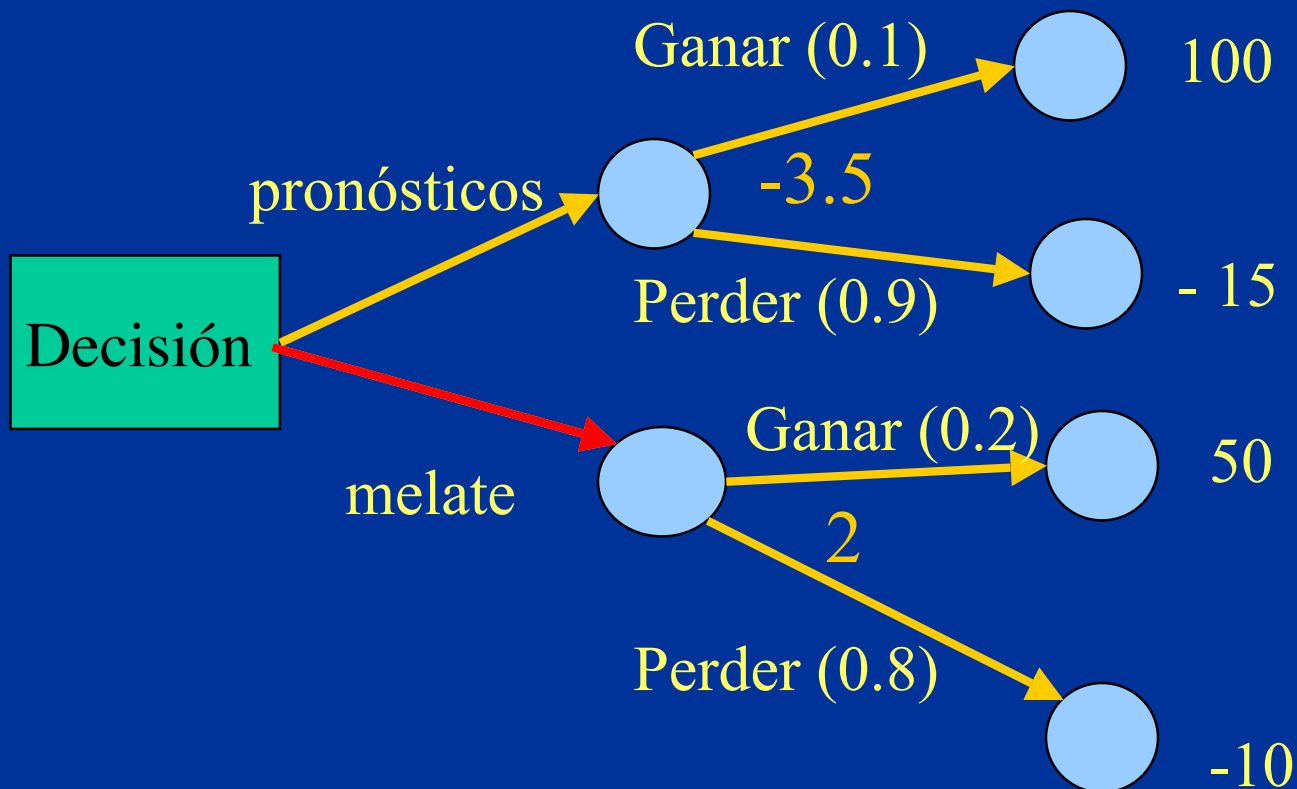
- A partir de los nodos terminales (de las hojas hacia la raíz):
 - Para los nodos aleatorios, E , se calcula la utilidad (costo) esperado en función de los costos de cada alternativa y sus probabilidades asociadas

$$V(E) = \sum P(\text{resultado}(E)) V(\text{resultado}(E))$$

- Para los nodos de decisión, D , se selecciona la alternativa de mayor utilidad (menor costo) esperado:

$$V(D) = \max V(\text{resultado}(D))$$

Ejemplo de Evaluación



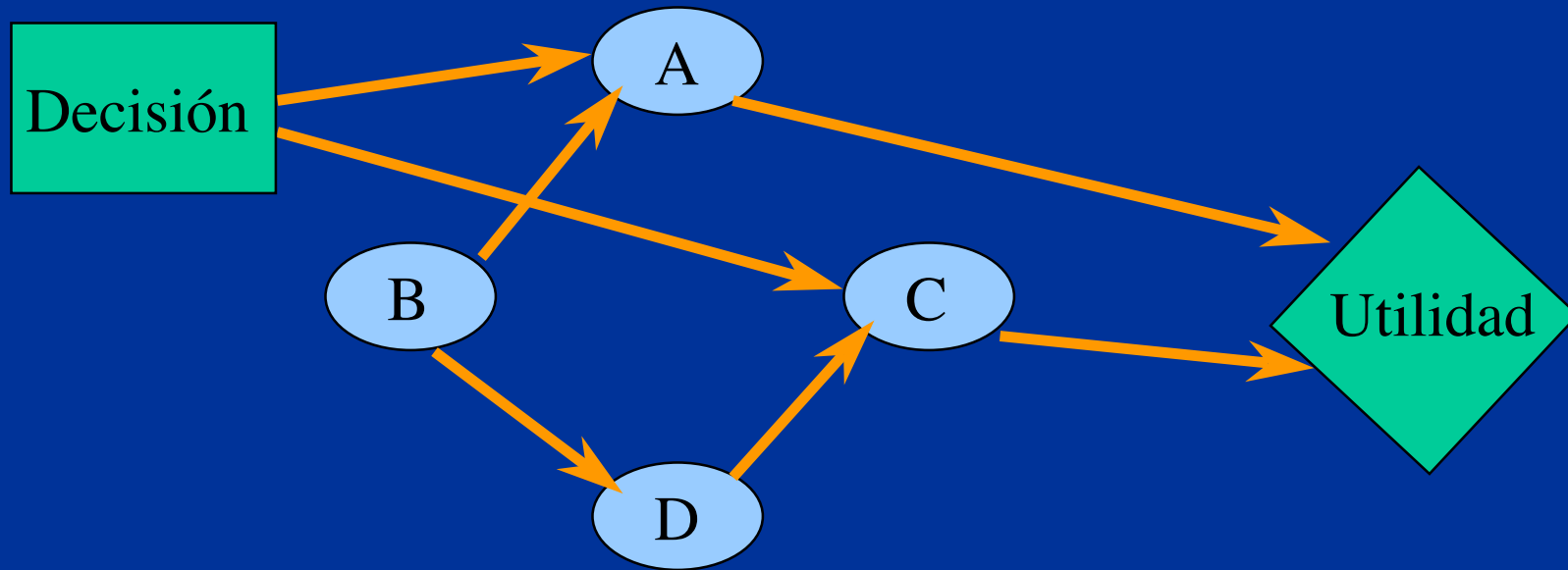
Diagramas de Influencia

- Alternativa a los árboles de decisión que es más expresiva y a la vez permite construir modelos más compactos basados en modelos gráficos
- Se pueden ver como una extensión a las redes bayesianas, incorporando nodos de decisión y nodos de utilidad

Tipos de Nodos

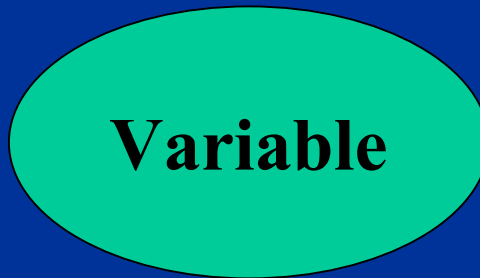
- Nodos Aleatorios – (óvalos)
- Nodos de Decisión – (rectángulos)
- Nodos de Utilidad – (rombos)

Ejemplo



Nodos Aleatorios

- Representan variables aleatorias como en redes bayesianas
- Pueden ser observadas o estimadas



Nodo de Decisión

- Representan los puntos de decisión del agente
- Tiene un conjunto de valores que corresponden a las opciones en ese punto
- Los arcos hacia nodos de decisión son de *información*, indican precedencia en el tiempo
- Pueden tener arcos (influenciar) a los nodos aleatorios o a los nodos de utilidad
- Puede haber varios nodos de decisión en una red de decisión



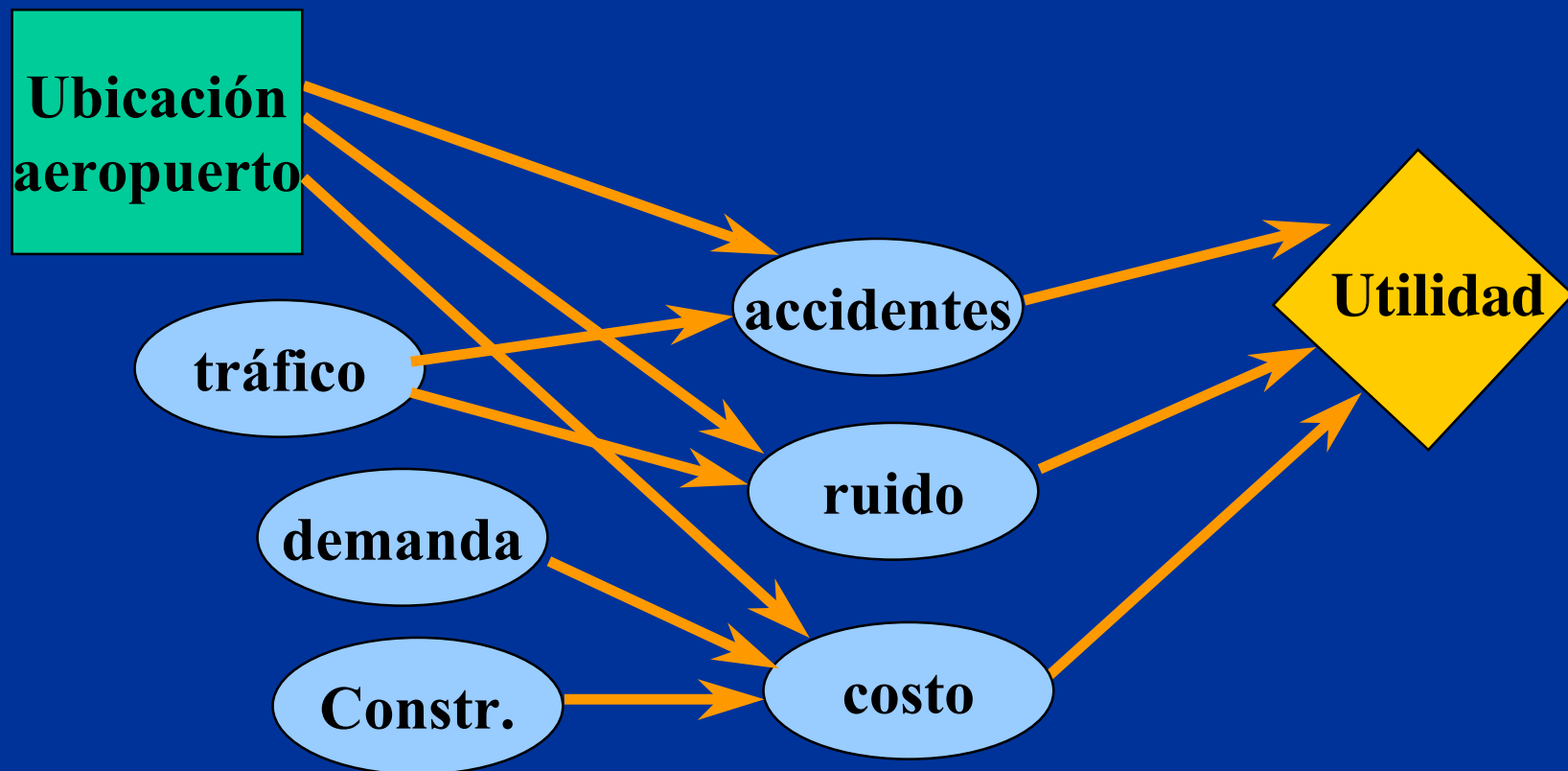
Decisión

Nodo de Utilidad

- Representan la función de utilidad del agente
- Tienen como padres los nodos aleatorios y de decisión que afectan directamente la utilidad
- La utilidad se puede definir como:
 - Una matriz con un valor por cada combinación de los padres
 - Una función matemática
- En los modelos básicos hay un nodo de utilidad, pero puede haber más. Generalmente se asume que la utilidad es la suma (pesada) de los nodos de utilidad



Ejemplo – modelo para decidir la ubicación de un Aeropuerto



Evaluación (DI simple: un nodo de decisión y de utilidad)

1. Asignar valores a todos los nodos aleatorios conocidos (evidencia)
2. Para cada posible decisión:
 - Asignar dicho valor al nodo de decisión
 - Propagar las probabilidades
 - Calcular la utilidad
3. Seleccionar la alternativa de mayor utilidad

Técnica de Evaluación

- En general existen 3 tipos de técnicas para resolver diagramas de influencia:
 - Conversión a un árbol de decisión
 - Eliminación de variables - aplicando una serie de transformaciones a la red
 - Conversión a una red bayesiana

Eliminación de Variables

- Si hay varios nodos de decisión se van evaluando uno por uno en “orden”
- Para ello se requiere hacer un ordenamiento mediante una transformación de la red
- El algoritmo de evaluación se basa en una serie de transformaciones del grafo – remover nodos e invertir arcos, tal que no modifican la política óptima

Red de decisión regular

- Una red de decisión es regular si:
 1. Es un grafo acíclico dirigido
 2. El nodo de utilidad no tiene sucesores
 3. Hay una trayectoria dirigida que contiene a todos los nodos de decisión
- La tercera condición implica un ordenamiento total de todas las decisiones
- Una representación alternativa que no impone estas restricciones son los *LIMIDs* (*L*imited *M*emory *I*nfluence *D*iagramas)

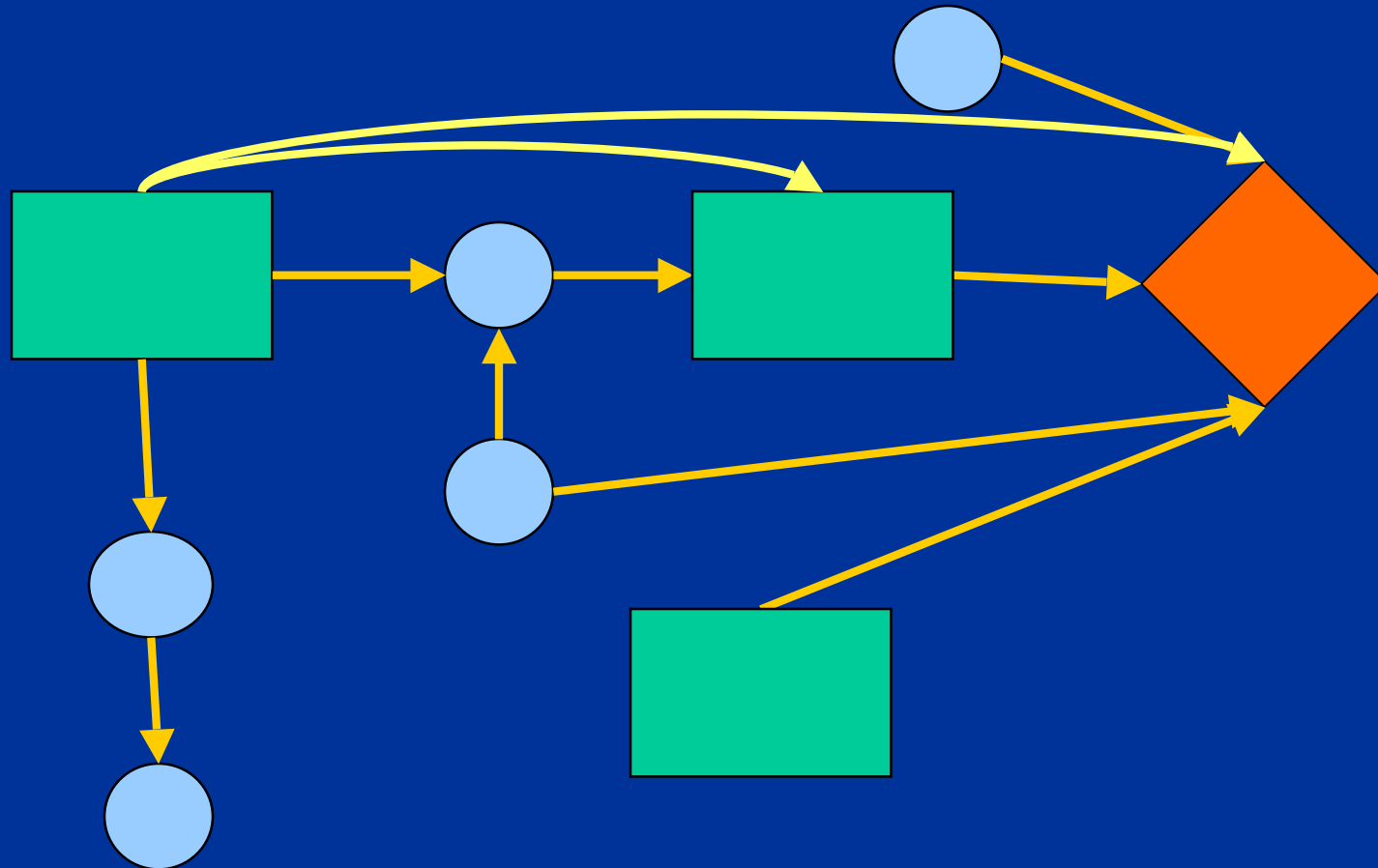
Transformaciones

- Eliminar nodos aleatorios o de decisión que sean nodos hoja (*barren nodes*)- no afectan las decisiones
- Eliminar nodos aleatorios que son padres del nodo de utilidad y no tienen otros hijos – se recalcula el nodo de utilidad en base a los padres del nodo eliminado
- Eliminar nodos de decisión que sean padres del nodo de utilidad y que sus padres también sean padres del nodo de utilidad – tomar la decisión de mayor utilidad y guardarla en el nodo de utilidad

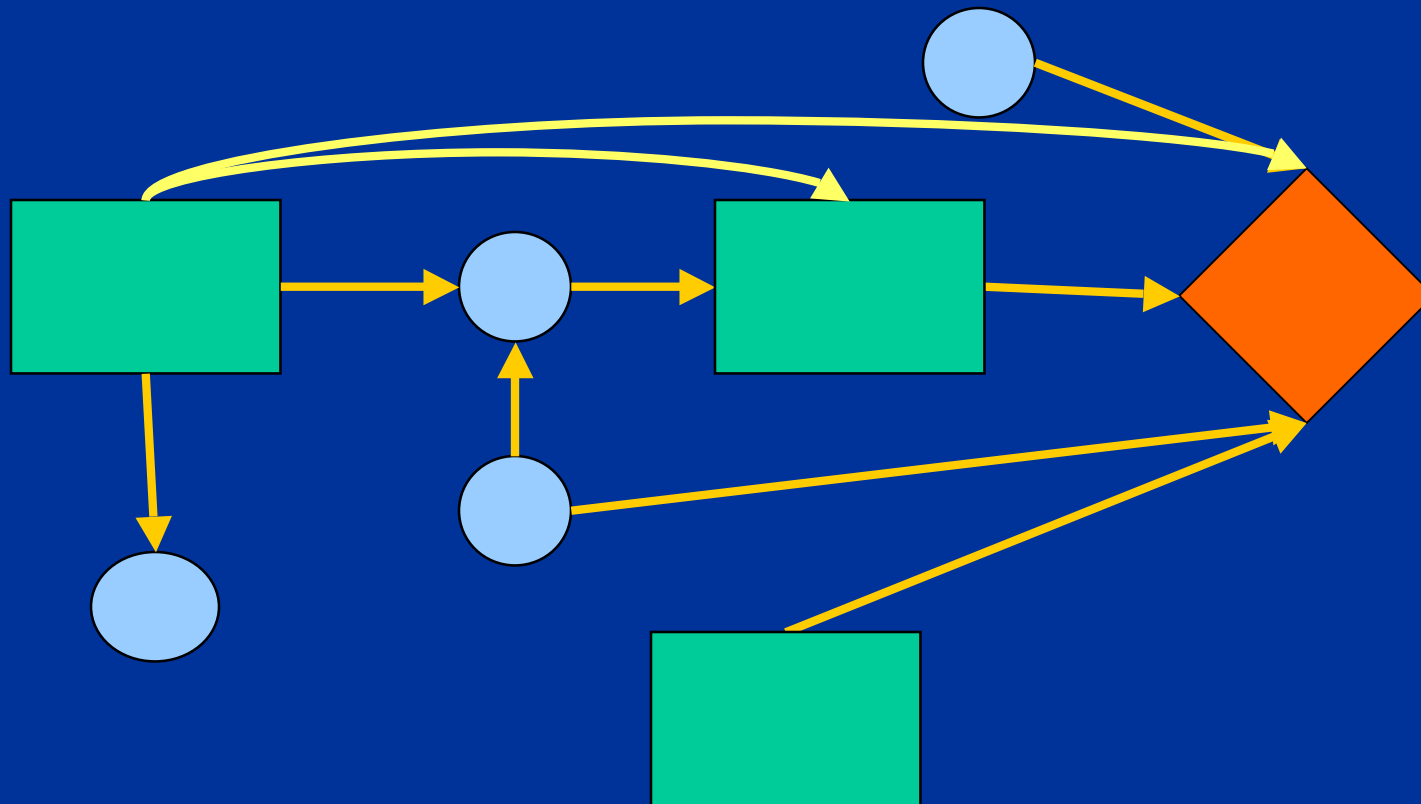
Transformaciones

- Inversión de arcos: se puede invertir el arco entre los nodos aleatorios $i \rightarrow j$ si no hay otra trayectoria entre $i - j$
 - se invierte el arco $j \rightarrow i$ y cada nodo hereda los padres del otro

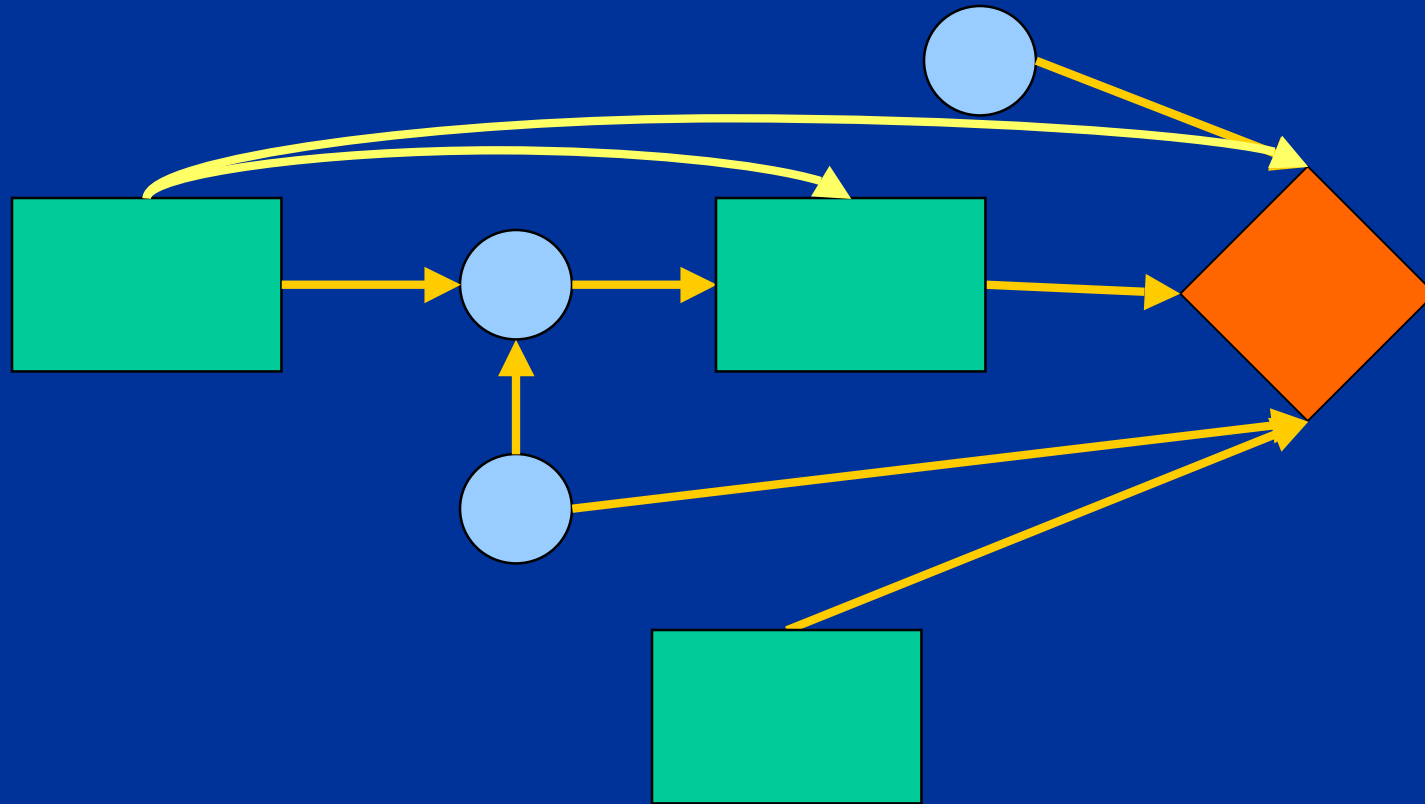
Ejemplo de transformación



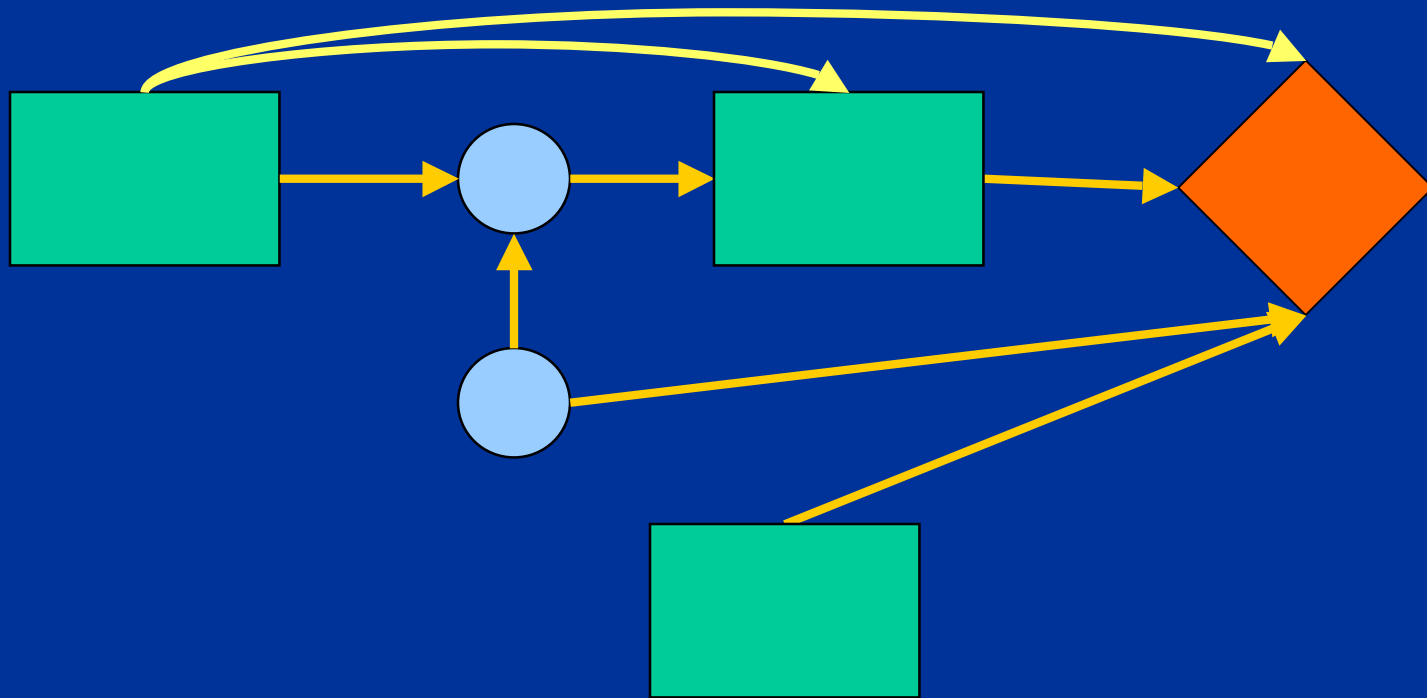
Ejemplo de transformación



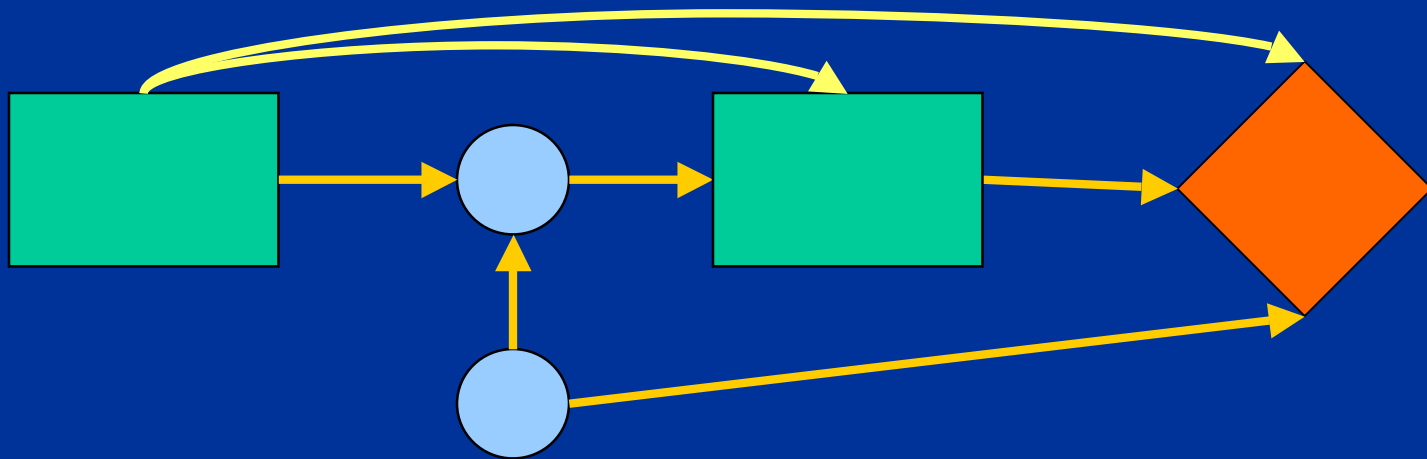
Ejemplo de transformación



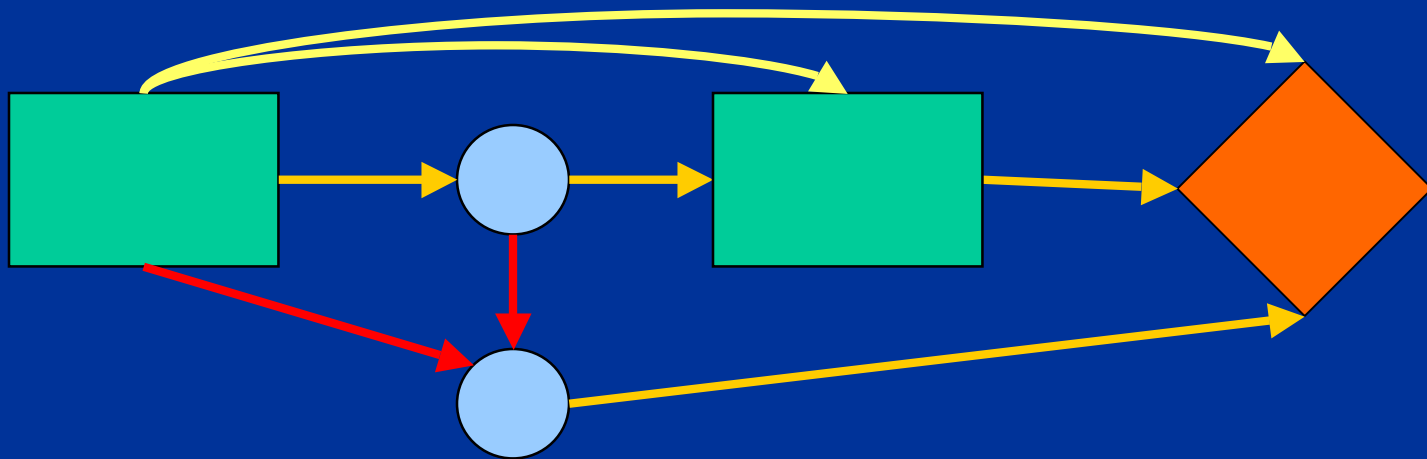
Ejemplo de transformación



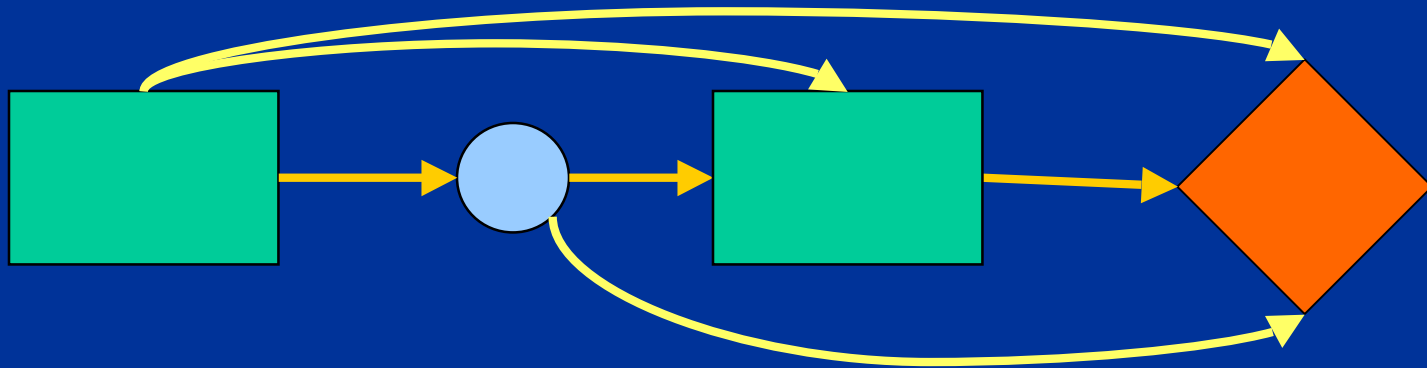
Ejemplo de transformación



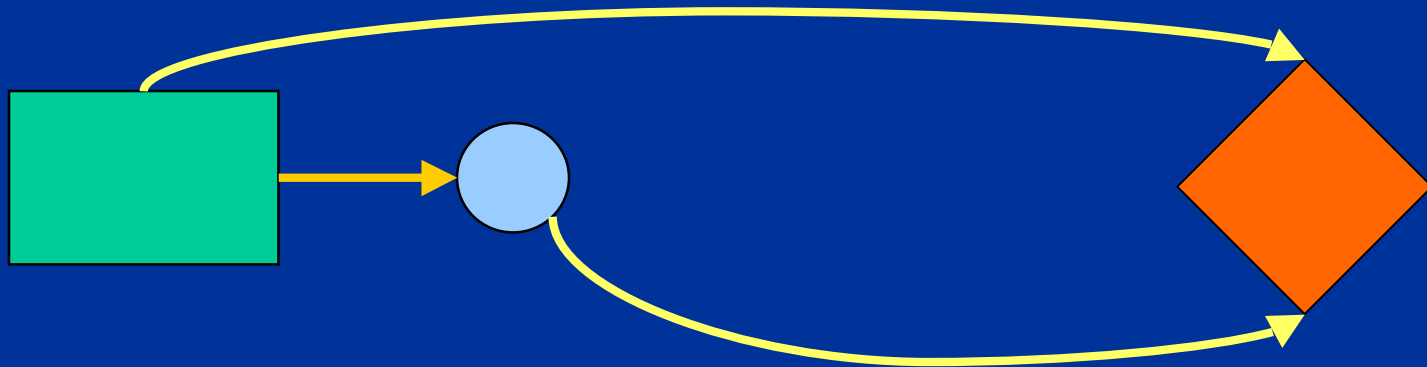
Ejemplo de transformación



Ejemplo de transformación



Ejemplo de transformación



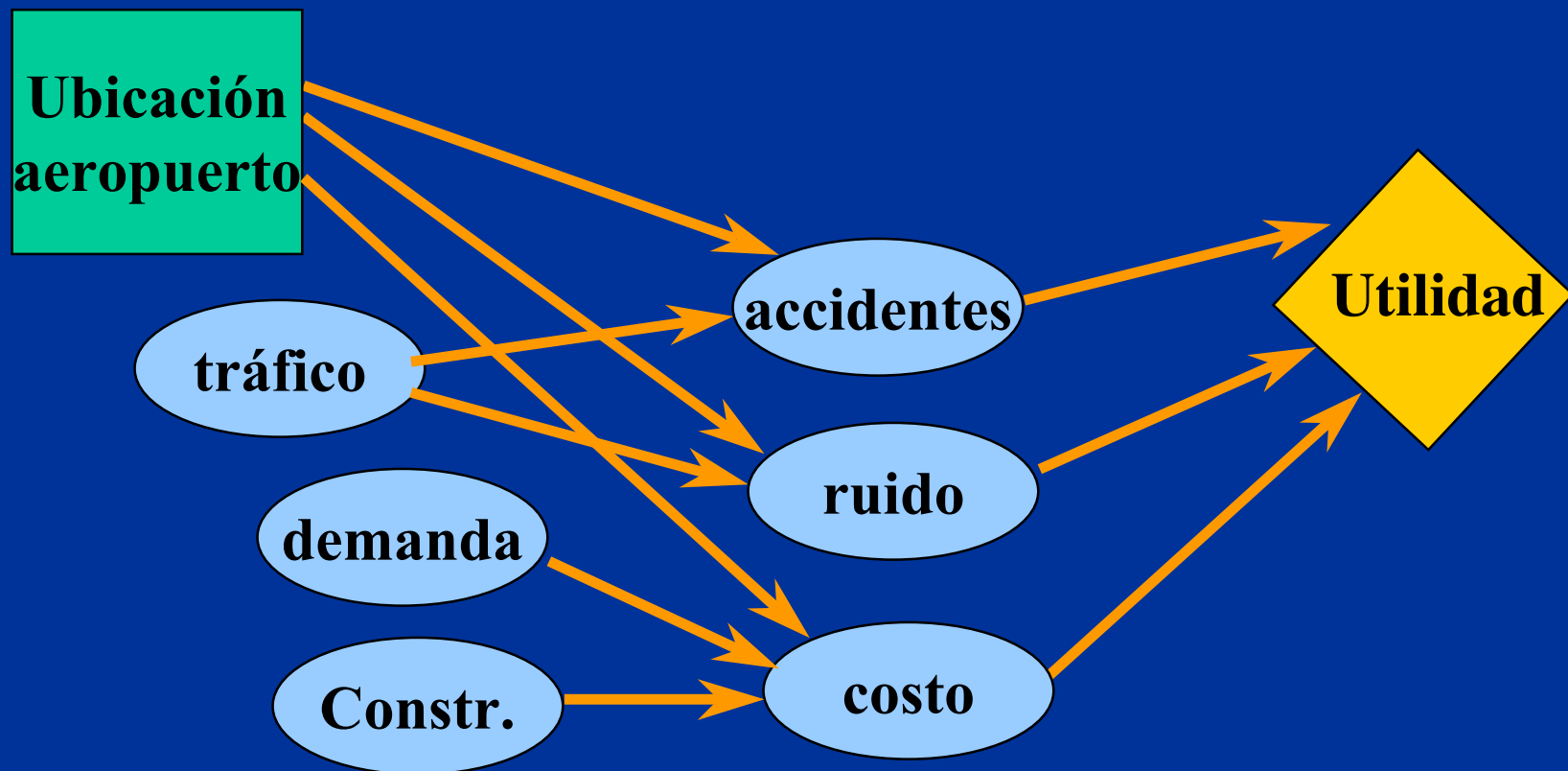
Ejemplo de transformación



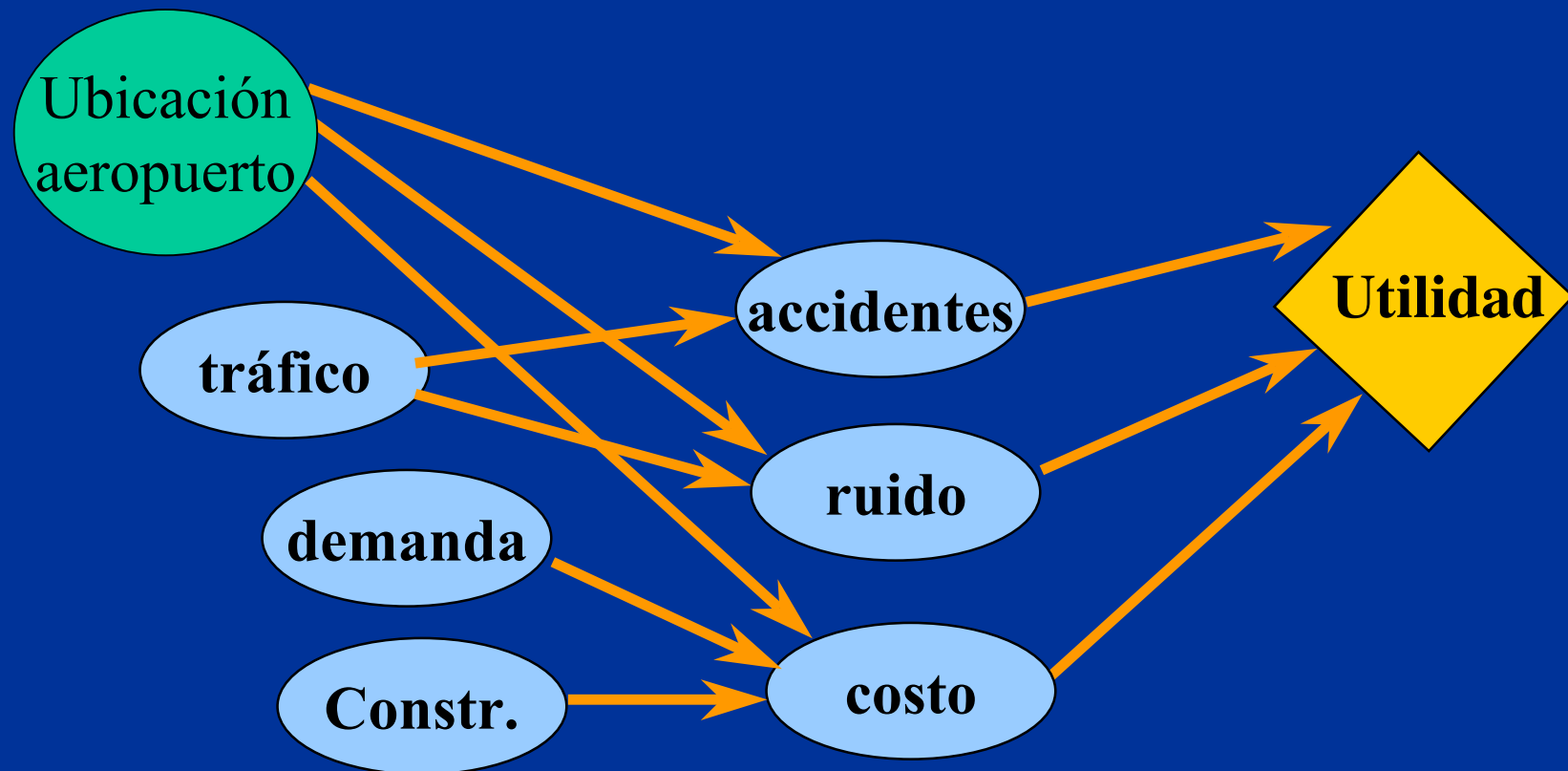
Conversión a una red bayesiana

- Otra forma de resolver una red de decisión es transformarla a una red bayesiana:
 - Los nodos de decisión se convierten a nodos aleatorios con una distribución uniforme
 - Los nodos de utilidad se convierten a nodos aleatorios binarios, para los que su probabilidad es proporcional a la utilidad
- Entonces el problema se reduce a propagar en la red bayesiana para todas las combinaciones de los nodos de decisión, de forma que se maximice la probabilidad del nodo(s) de utilidad

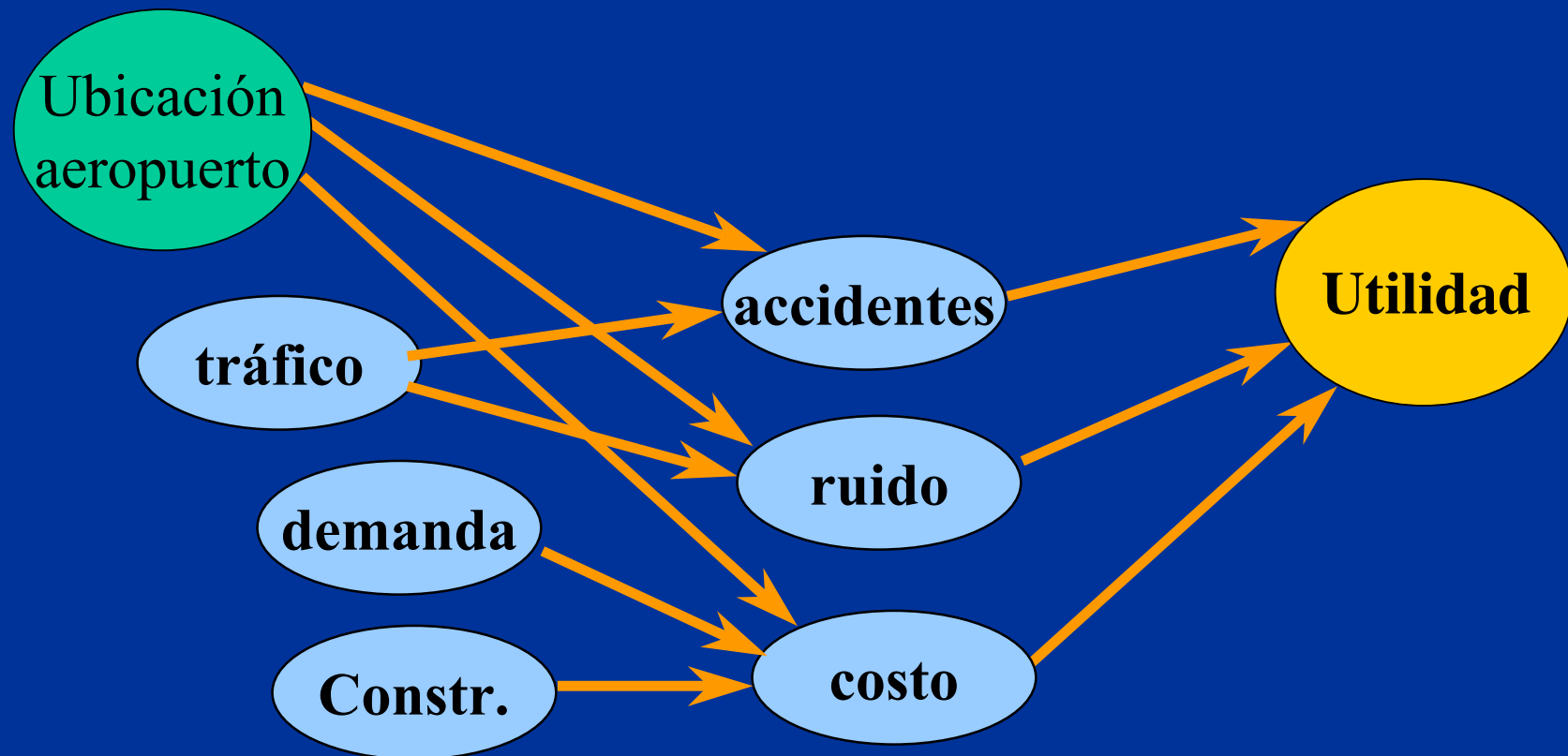
Ejemplo de Transformación



Ejemplo de Transformación



Ejemplo de Transformación



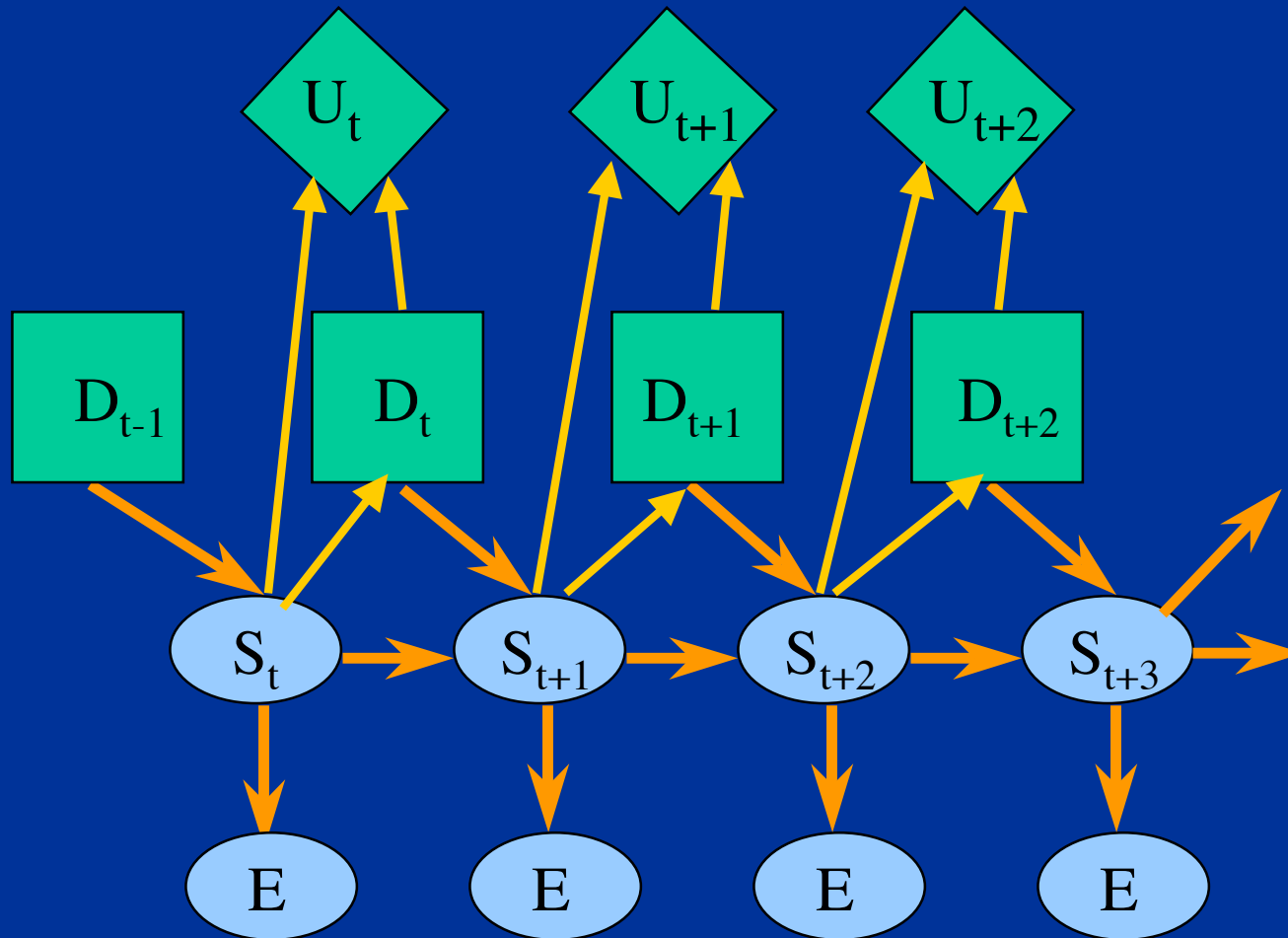
Ejemplo en Hugin: ¿Llevar paraguas?

- Nodos aleatorios:
 - predicción del clima
 - clima
- Nodos de decisión:
 - escuchar el pronóstico
 - llevar paraguas
- Nodo de utilidad:
 - considera el compromiso entre el costo de llevar el paraguas vs. el costo de mojarse

Redes de decisión dinámicas

- Este concepto se puede extender a la toma de decisiones en el tiempo – redes de decisión dinámicas
- Incorporan nodos de decisión y de utilidad a las redes bayesianas dinámicas
- Normalmente se tienen una serie de decisiones en el tiempo y una cierta utilidad en el futuro

Redes de Decisión Dinámicas



Procesos de Decisión de Markov

- Una red de decisión dinámica es equivalente a un MDP – proceso de decisión de Markov o a un POMDP – proceso de decisión de Markov parcialmente observable
- Sin embargo, en un MDP puede haber un número infinito de decisiones o etapas temporales
- Estos modelos son el tema de la siguiente sesión

Referencias

- [Russell & Norvig] – Cap. 16
- [Sucar, Morales, Hoey] - Caps. 1, 2
- Borrás, Análisis de incertidumbre y riesgo para la toma de decisiones, Comunidad Morelos, 2001.
- Hiller & Lieberman, Introduction to Operations Research, Holden-Day – Cap. 15
- Warner, A tutorial introduction to decision theory, en Readings on Uncertain Reasoning, Morgan-Kaufmann
- Shachter, Evaluating influence diagrams, Operations Research 34, 1986
- Crawley, Evaluating influence diagrams, 2004.