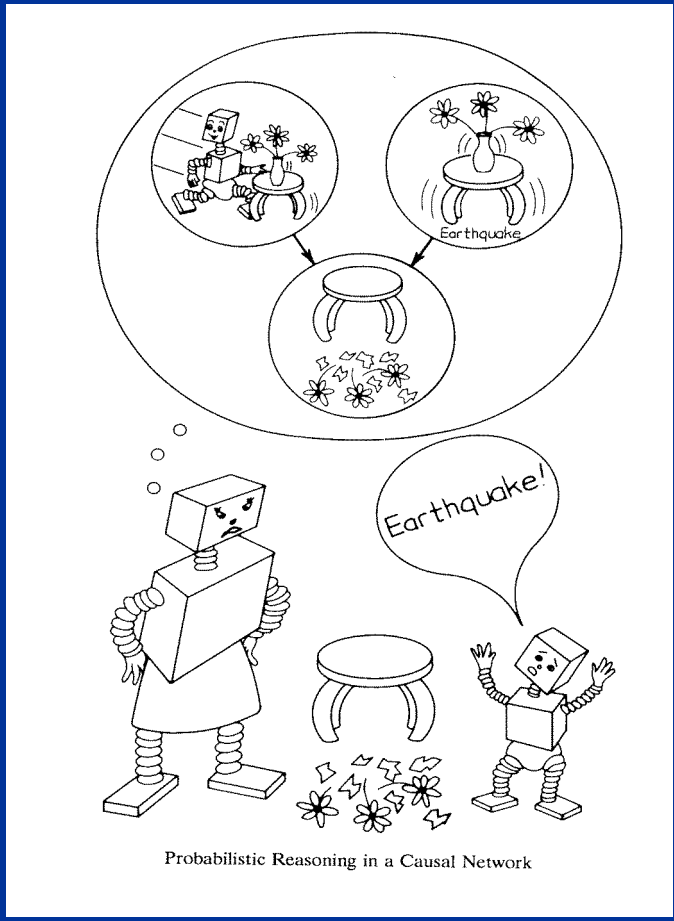
Modelos Gráficos Probabilistas

L. Enrique Sucar
INAOE

Sesión 10: Redes Bayesianas – Inferencia

1era parte



Probabilistic Reasoning in a Causal Network

[Neapolitan 90]

Inferencia en Redes Bayesianas
1era Parte

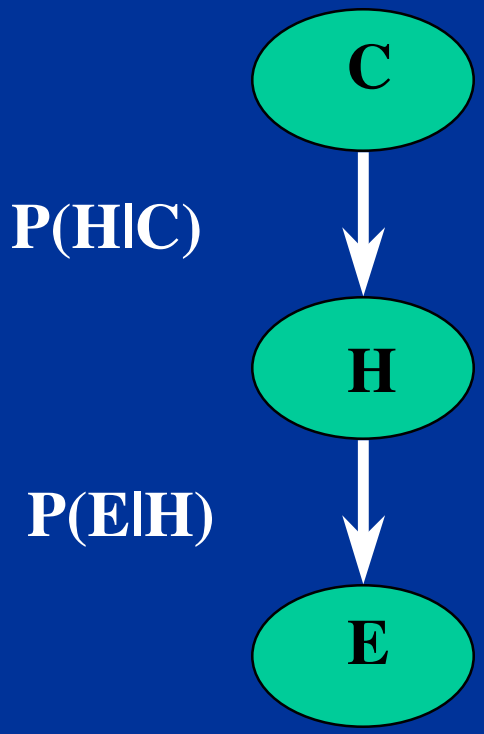
- Introducción
- Clases de algoritmos
- Propagación en árboles
- Propagación en poli-árboles
- Extensión del algoritmo de árboles a redes multi-conectadas (Loopy)
- Abducción

Inferencia probabilística

- En RB, la inferencia probabilística consiste en:

  "dadas ciertas variables conocidas (evidencia), calcular la probabilidad posterior de las demás variables (desconocidas)"
- Es decir, calcular: P(Xi | **E**), donde:
  - **E** es un subconjunto de variables de la RB (posiblemente vació)
  - Xi es cualquier variable en la RB, no en **E**

Inferencia bayesiana



***Causal*:**

C → H

***Evidencial*:**

E → H

***Mixta*:**

C, E → H

Tipos de Técnicas

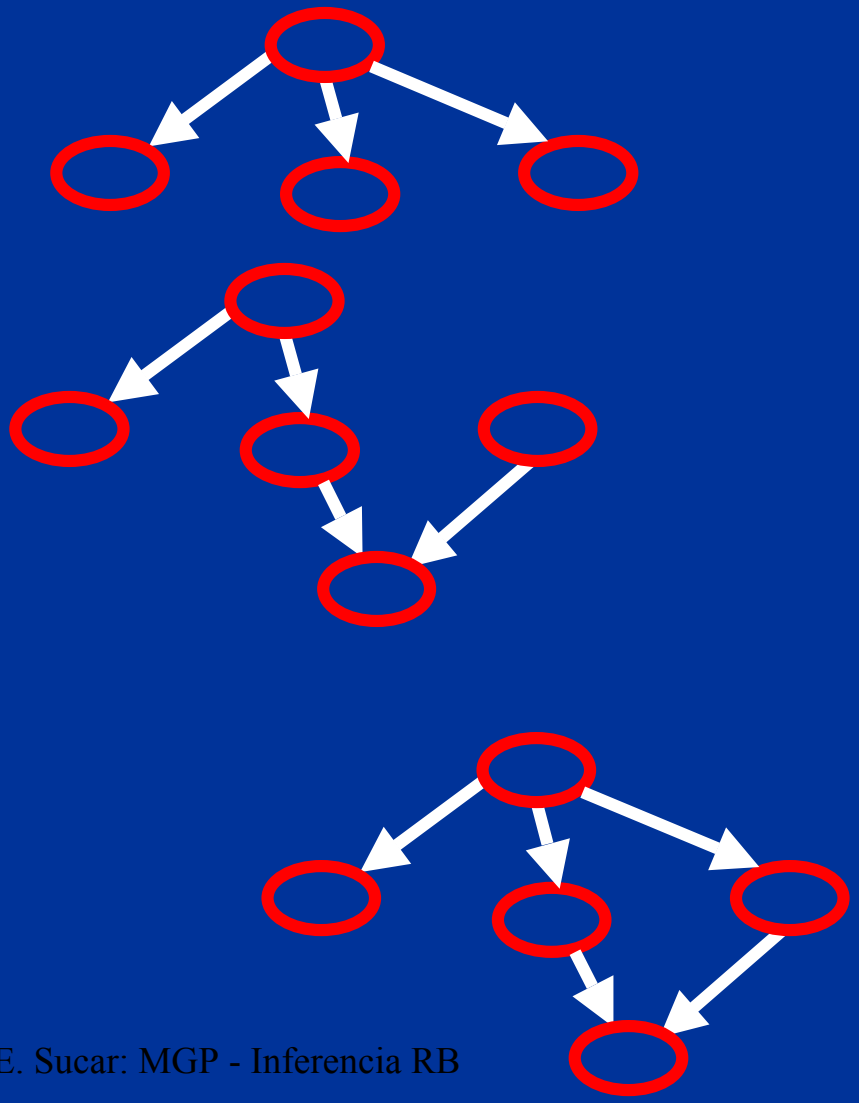
- Calcular probabilidades posteriores:
  - Una variable, cualquier estructura: algoritmo de eliminación (*variable elimination*)
  - Todas las variable, estructuras sencillamente conectadas (árboles, poliárboles): propagación
  - Todas las variables, cualquier estructura:
    - Agrupamiento (*junction tree*)
    - Simulación estocástica
    - Condicionamiento

Tipos de Técnicas

- Obtener variable(s) de mayor probabilidad dada cierta evidencia – abducción:
  - Abducción total
  - Abducción parcial

Tipos de estructuras

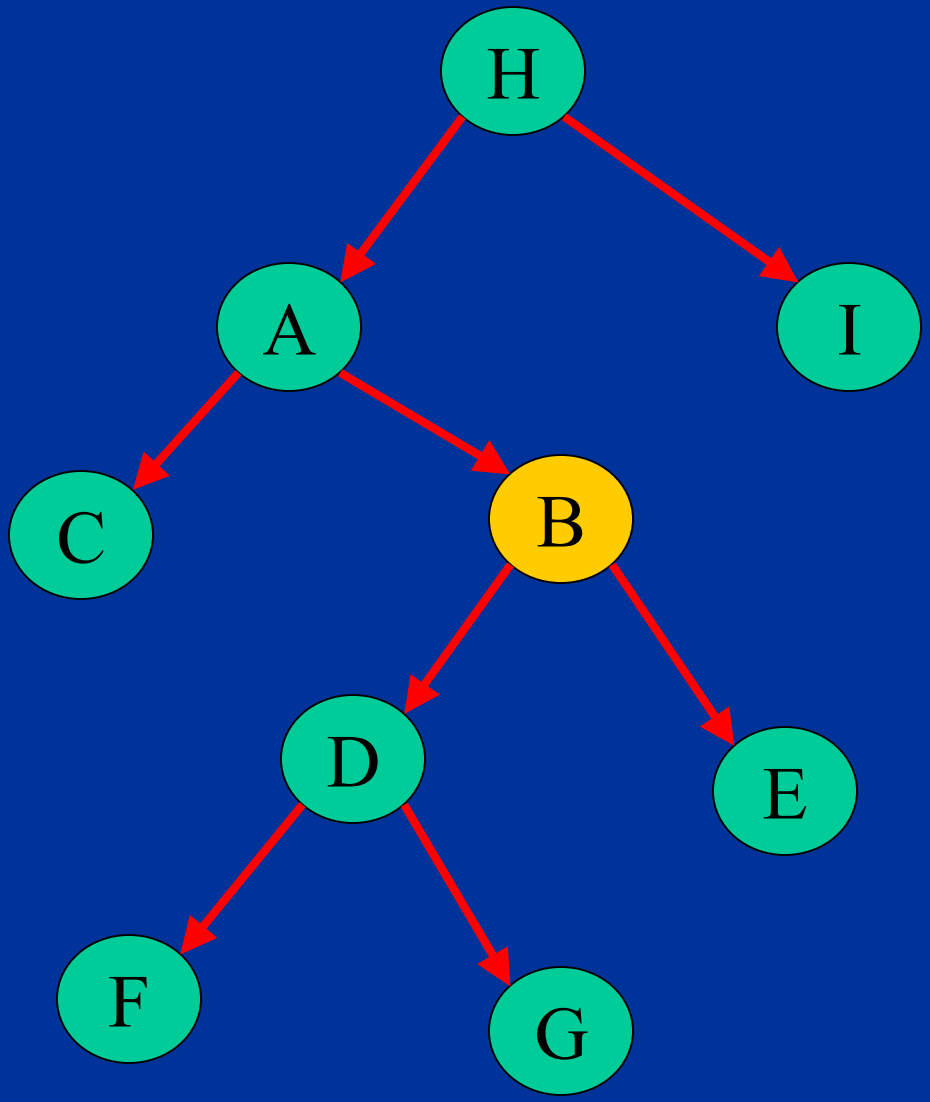
- Sencillamente conectadas
  - Árboles
  - Poliárboles
- Multiconectadas



Propagación en Árboles

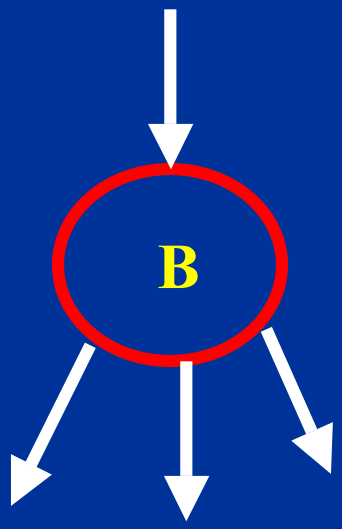
Cada nodo corresponde a una variable discreta, B ($B_1, B_2, \ldots, B_m$) con su respectiva matriz de probabilidad condicional, $P(B|A)=P(B_j| A_i)$

Propagación en Árboles

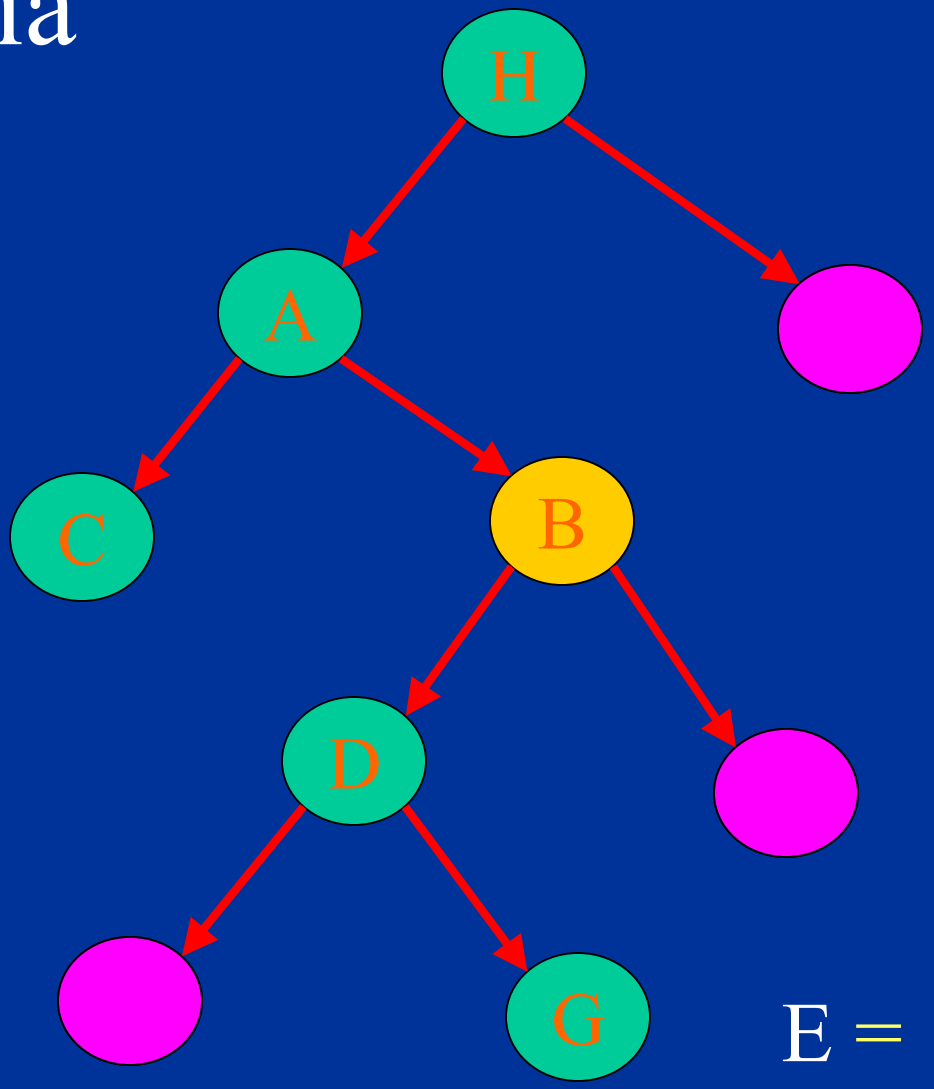


Dada cierta evidencia *E* -representada por la instanciación de ciertas variables- la probabilidad posterior de cualquier variable *B*, por el teorema de Bayes:

$$P(B_i \mid E) = P(B_i)\, P(E \mid B_i) / P(E)$$



Evidencia



E = {I,F,E}

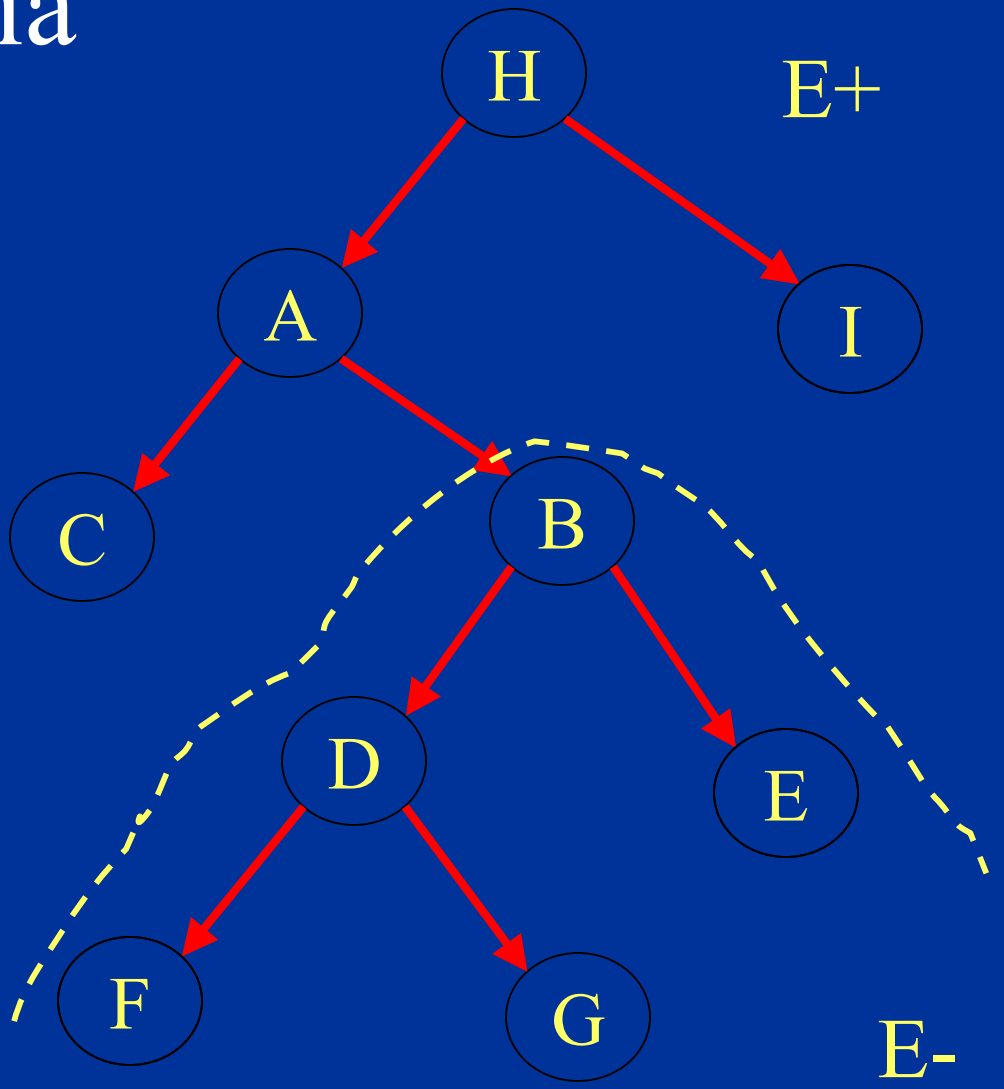
Evidencia

Ya que la estructura de la red es un árbol, el Nodo *B* la separa en dos subárboles, por lo que podemos dividir la evidencia en dos grupos:

E-: Datos en el árbol que cuya raíz es *B*

E+: Datos en el resto del árbol

Evidencia



Entonces:

$$P(B_i \mid E) = P(B_i)\, P(E^-, E^+ \mid B_i) / P(E)$$

Pero dado que ambos son independientes y aplicando nuevamente Bayes:

$$P(B_i \mid E) = \alpha\, P(B_i \mid E^+)\, P(E^- \mid B_i)$$

Donde α es una constante de normalización

Definiciones:

Si definimos los siguientes términos:

$$\lambda (B_i) = P (E^- \mid B_i)$$

$$\pi (B_i) = P (B_i \mid E^+)$$

Entonces:

$$P(B_i \mid E) = \alpha \pi (B_i) \lambda (B_i)$$

Desarrollo

- En base a la ecuación anterior, se puede integrar un algoritmo distribuido para obtener la probabilidad de un nodo dada cierta evidencia
- Para ello se descompone el cálculo de cada parte:
  - Evidencia de los hijos (λ)
  - Evidencia de los demás nodos (π)

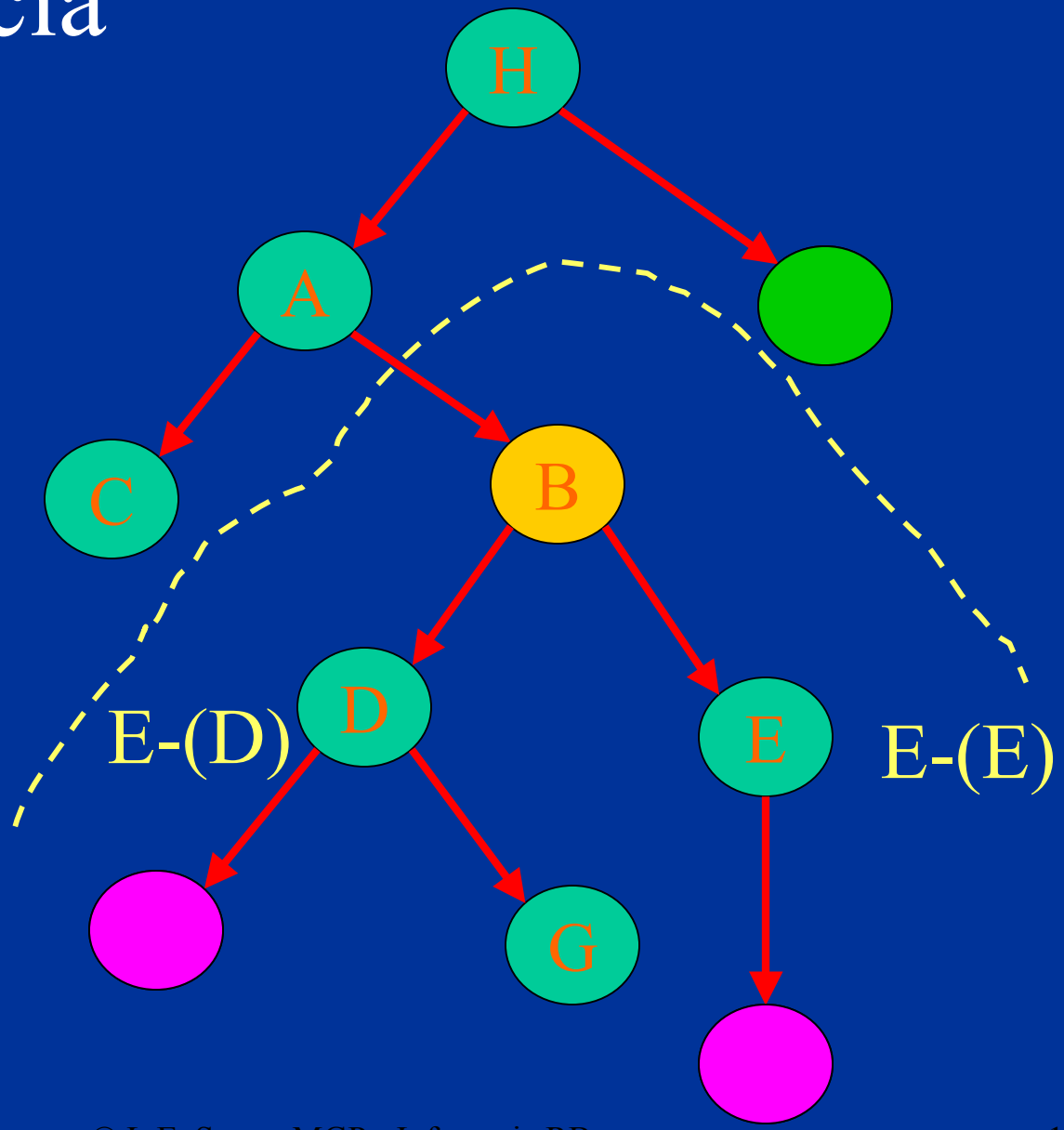
Evidencia de los hijos (λ)

- Dado que los hijos son condicionalmente independientes dado el padre:

$$\lambda(B_i) = P(E^- \mid B_i) = \prod_k P(E_k^- \mid B_i)$$

- Donde E_k^- corresponde a la evidencia del subárbol del hijo k

Evidencia hijos



Evidencia de los hijos (λ)

- Condicionando respecto a los posibles valores de los hijos de B:

$$\lambda(B_i) = \prod_k \left[\sum_j P(E_k^- \mid B_i, S_j^k) P(S_j^k \mid B_i) \right]$$

- Donde S^k es el hijo k de B, y la sumatoria es sobre los valores de dicho nodo (teorema de probabilidad total)

Evidencia de los hijos (λ)

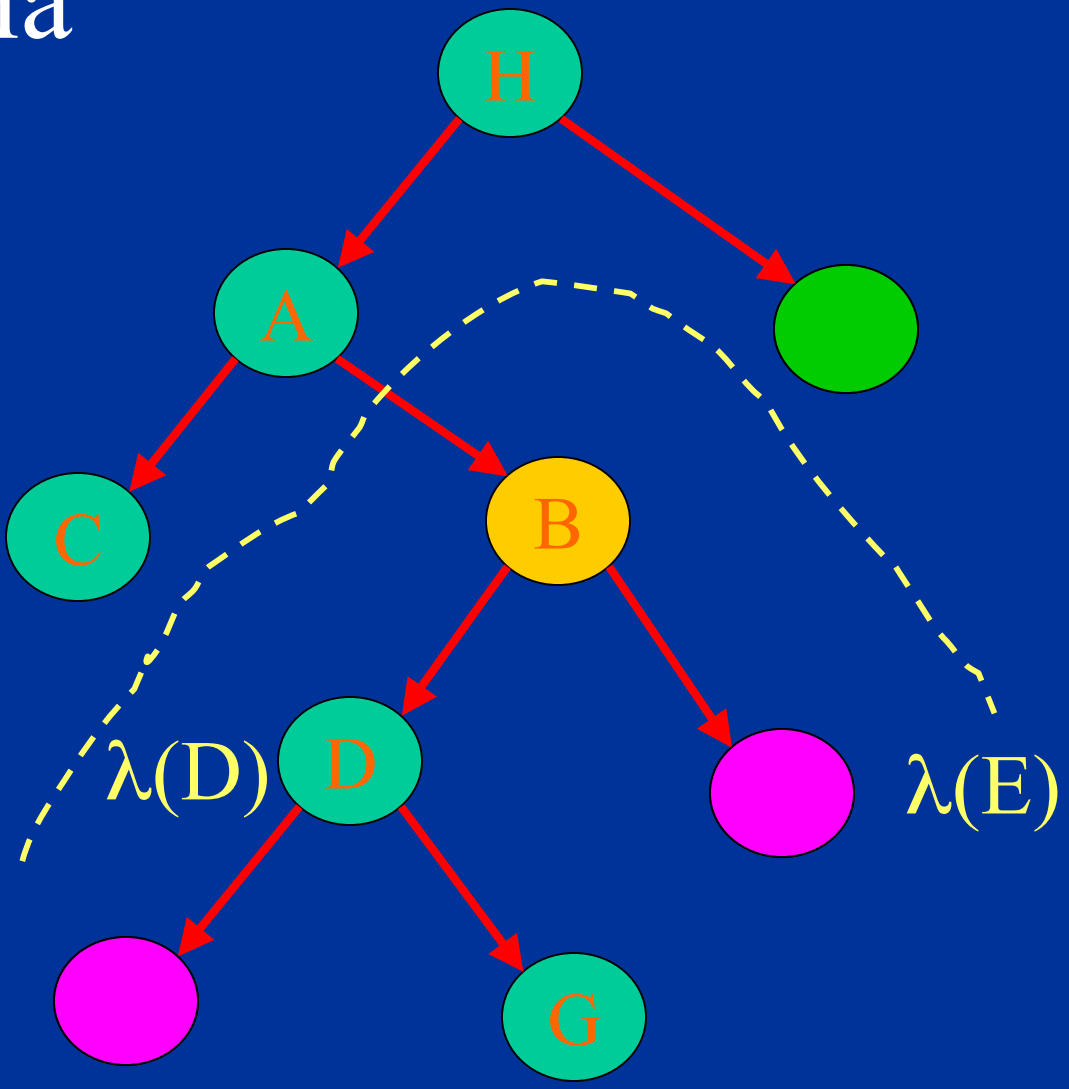
- Dado que B es condicionalmente independiente de la evidencia dados sus hijos:

$$\lambda(B_i) = \prod_k \left[\sum_j P(E_k^- \mid S_j^k) P(S_j^k \mid B_i) \right]$$

- Substituyendo la defínción de λ:

$$\lambda(B_i) = \prod_k \left[\sum_j P(S_j^k \mid B_i) \lambda(S_j^k) \right]$$

Evidencia hijos



Evidencia de los hijos (λ)

- Recordando que λ es un vector (un valor por cada posible valor de B), lo podemos ver en forma matricial:

$$\lambda = \lambda \quad P(S \mid B)$$

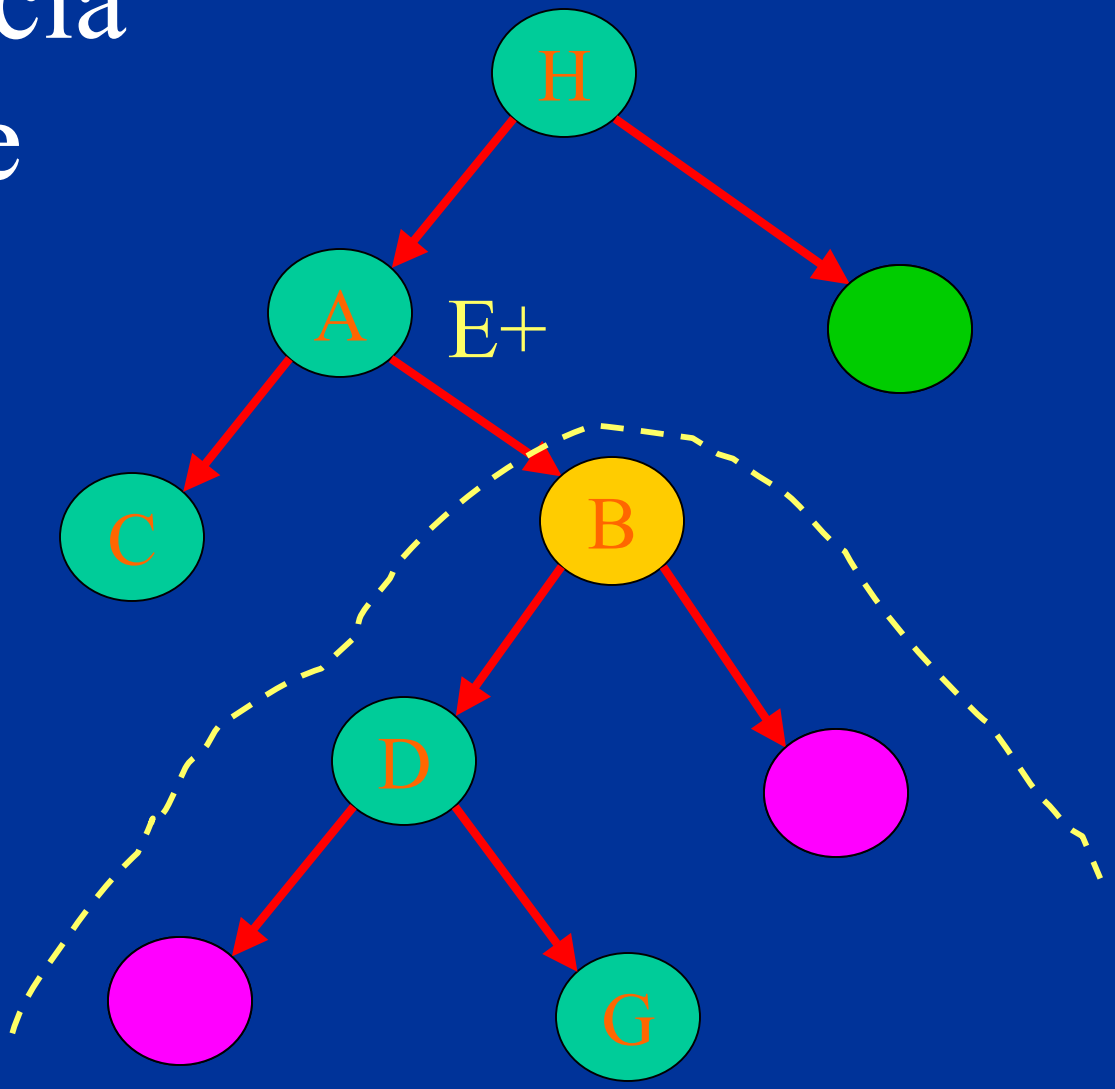
Evidencia de los demás nodos (π)

- Condicionando sobre los diferentes valores del nodo padre (A):

$$\pi(B_i) = P(B_i \mid E^+) = \sum_j P(B_i \mid E^+, A_j)\, P(A_j \mid E^+)$$

- Donde A_j corresponde a los diferentes valores del nodo padre de B

Evidencia padre



Evidencia de los demás nodos (π)

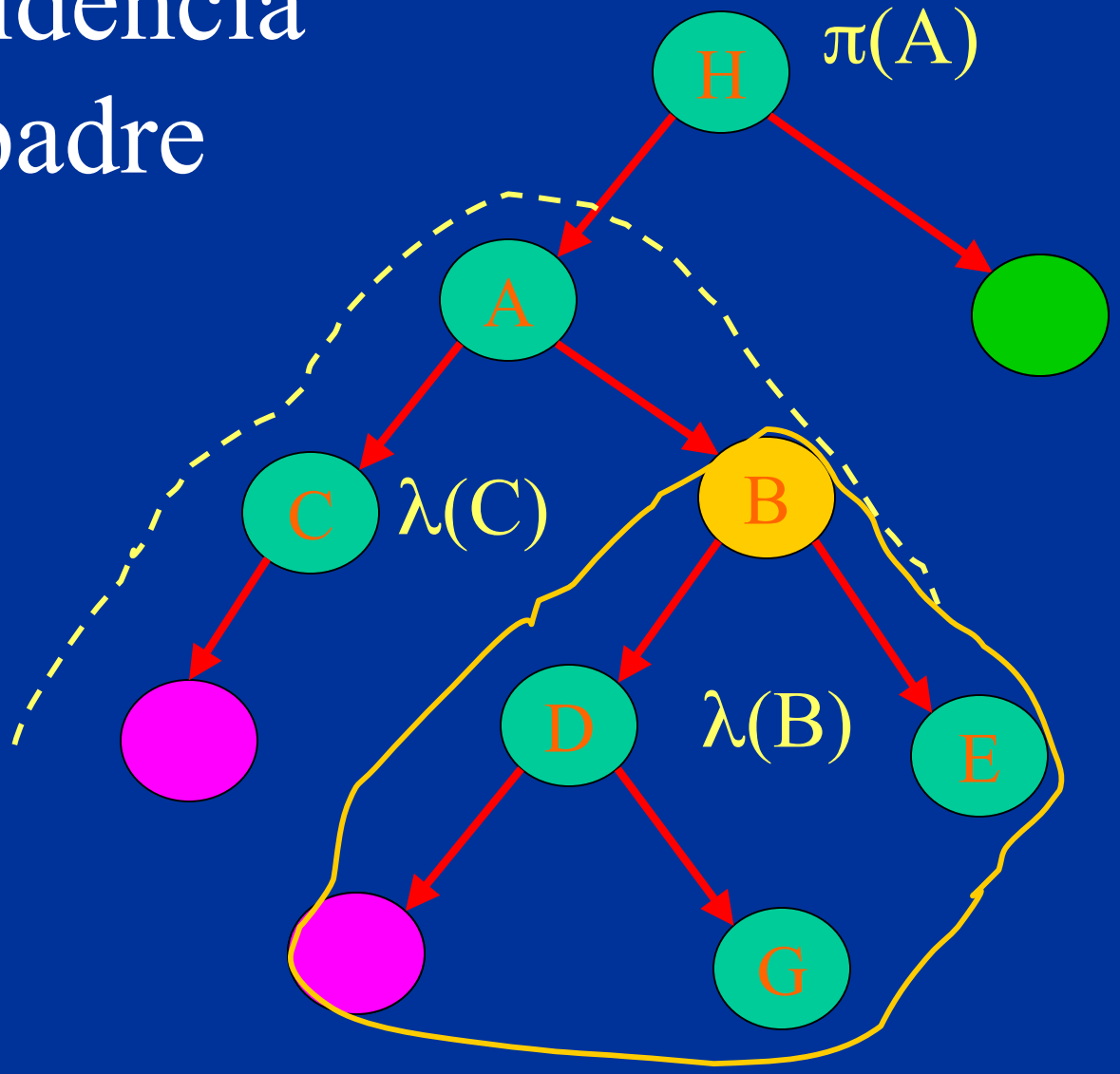
- Dado que B es independiente de la evidencia "arriba" de A, dado A:

$$\pi(B_i) = \sum_j P(B_i \mid A_j)\, P(A_j \mid E^+)$$

- La $P(A_j \mid E^+)$ corresponde a la P posterior de A dada toda la evidencia excepto B y sus hijos, por lo que se puede escribir como:

$$P(A_j \mid E^+) = \alpha\, \pi(A_i) \prod_{k \cong B} \lambda_k(A_i)$$

Evidencia padre



Evidencia de los demás nodos (π)

- Substituyendo $P(A_j \mid E^+)$ en la ecuación de π :

$$\pi(B_i) = \sum_j P(B_i \mid A_j) \left[\alpha \, \pi(A_i) \prod_{k \cong B} \lambda_k(A_i) \right]$$

- De forma que se obtiene combinando la π de del nodo padre con la λ de los demás hijos

Evidencia de los demás nodos (π)

- Dado que también π es un vector, lo podemos ver en forma matricial (donde P_A es el producto de la evidencia de padre y otros hijos):

$$p = P(B \mid A) \; P_A$$

Algoritmo

- Mediante estas ecuaciones se integra un algoritmo de propagación de probabilidades en árboles.
- Cada nodo guarda los valores de los vectores π y λ, así como su matriz de probabilidad condicional (CPT), P.
- La propagación se hace por un mecanismo de paso de mensajes, en donde cada nodo envía los mensajes correspondientes a su padre e hijos

Mensaje al padre (hacia arriba) – nodo B a su padre A:

$$\lambda_B(A_i) = \sum_j P(B_j|A_i)\lambda(B_j)$$

Mensaje a los hijos (hacia abajo) - nodo B a su hijo S_k :

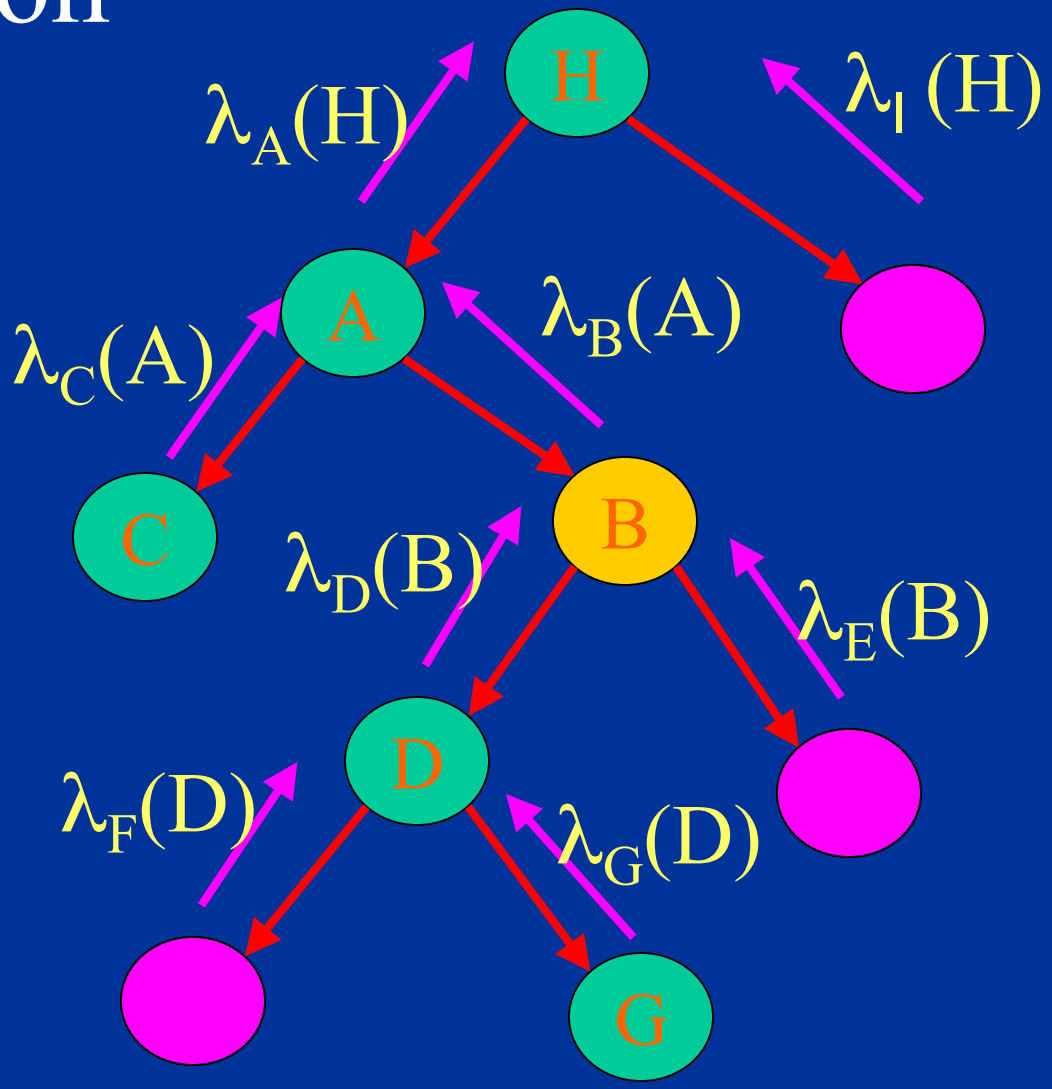
$$\pi_k(B_i) = \alpha\pi(B_j)\prod_{I\neq k}\lambda_I(B_j)$$

Algoritmo

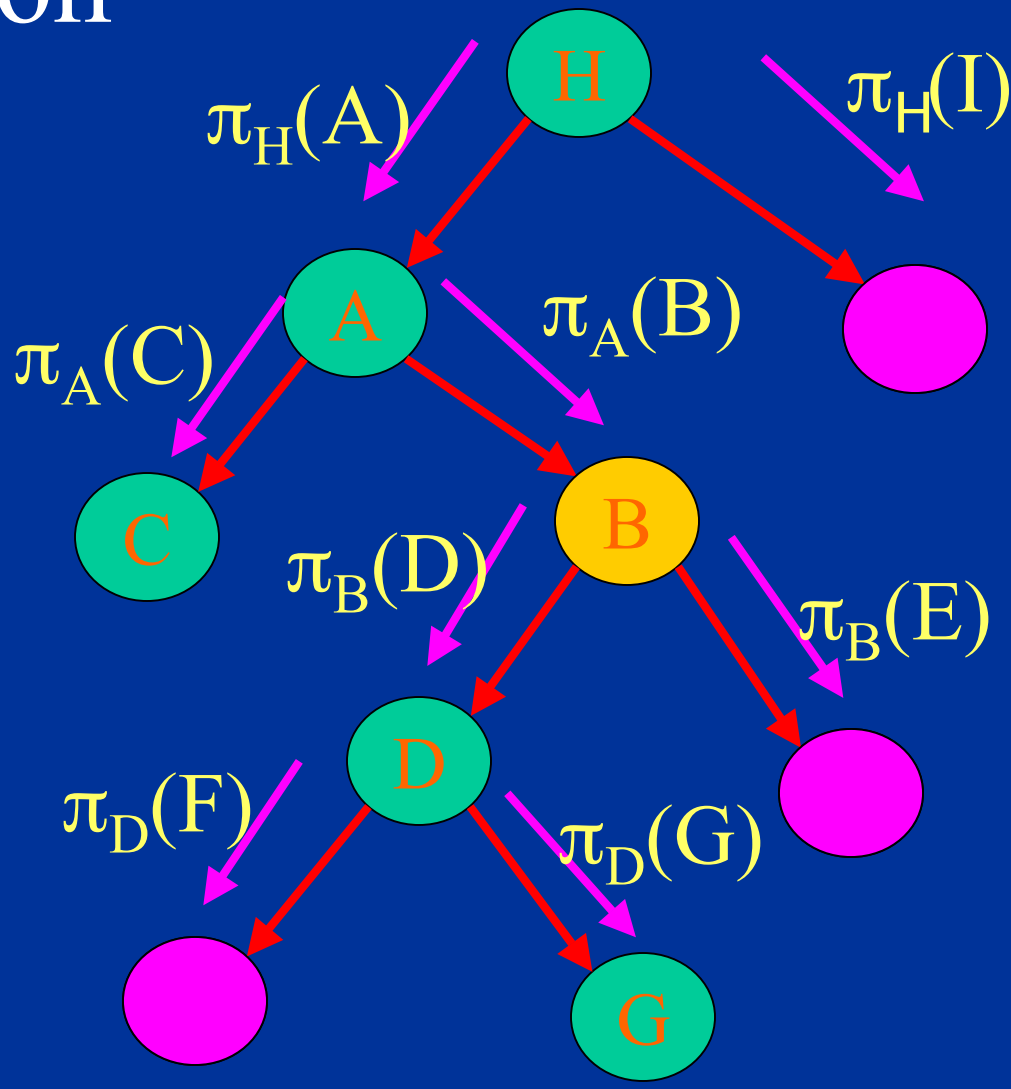
- Al instanciarse ciertos nodos, éstos envían mensajes a sus padres e hijos, y se propagan hasta a llegar a la raíz u hojas, o hasta encontrar un nodo instanciado.

- Así que la propagación se hace en un solo paso, en un tiempo proporcional al diámetro de la red.

Propagación λ



Propagación π



Condiciones Iniciales

- Nodos hoja no conocidos:

  $\lambda (B_i) = [1,1, \ldots]$

- Nodos asignados (conocidos):

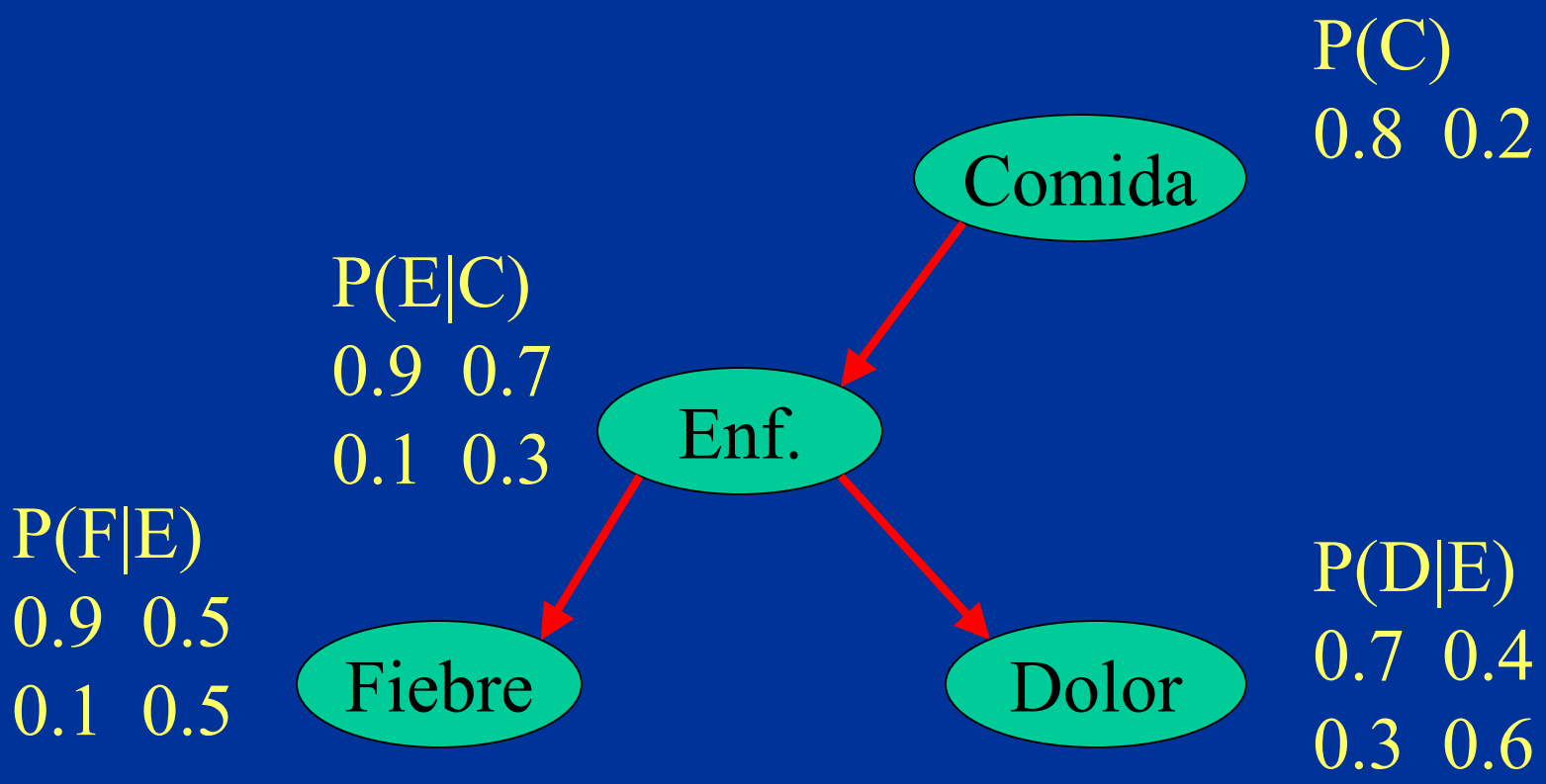
  $\lambda (B_i) = [0,0, ..1, 0, \ldots, 0]$ (1 para valor asignado)

  $\pi (B_i) = [0,0, ..1, 0, \ldots, 0]$ (1 para valor asignado)

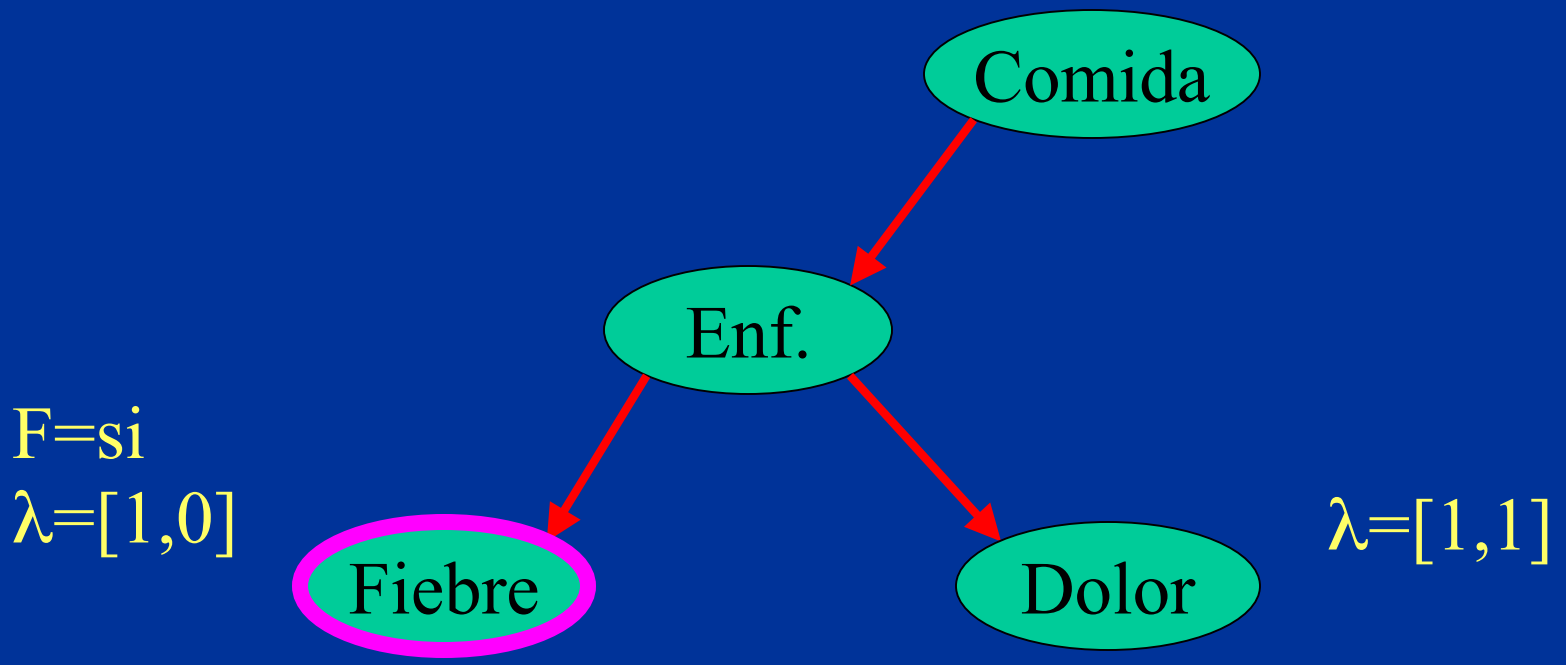
- Nodo raíz no conocido:

  $\pi (A) = P(A)$, (probabilidad marginal inicial)

Ejemplo

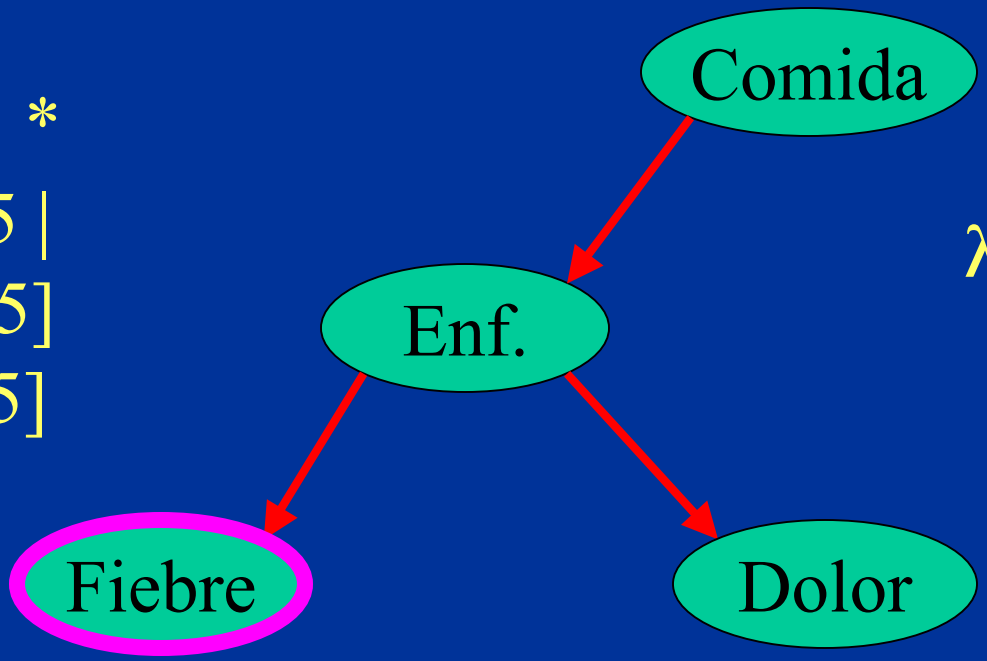

P(C)
0.8 0.2
Comida
P(E|C)
0.9 0.7
0.1 0.3
Enf.
P(F|E)
0.9 0.5
0.1 0.5
Fiebre
Dolor
P(D|E)
0.7 0.4
0.3 0.6

Ejemplo



Ejemplo

λ_F= [1,0] *
[.9 .5 |
.1 .5]
= [.9 .5]



λ_D= [1,1] *
[.7 .4 |
.3 .6]
= [1 1]

P(F|E)
0.9 0.5
0.1 0.5

P(D|E)
0.7 0.4
0.3 0.6

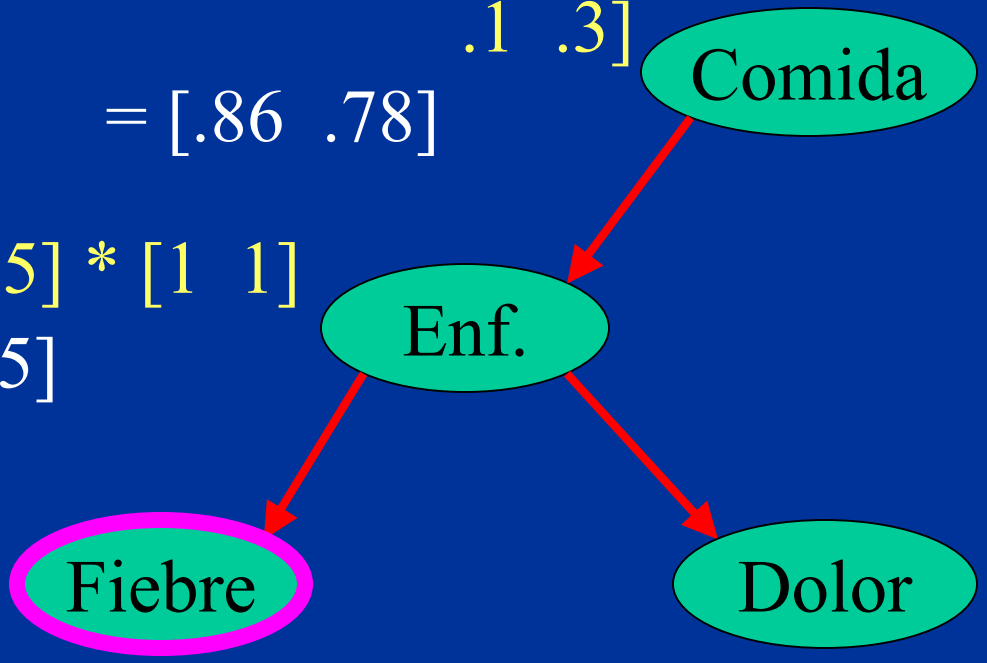
Ejemplo

$\lambda(C) = [.9 \ .5] * \begin{bmatrix} .9 & .7 \\ .1 & .3 \end{bmatrix}$

$= [.86 \ .78]$

$\lambda(E) = [.9 \ .5] * [1 \ 1]$

$= [.9 \ .5]$



P(E|C)

0.9	0.7
0.1	0.3

P(F|E)

0.9	0.5
0.1	0.5

P(D|E)

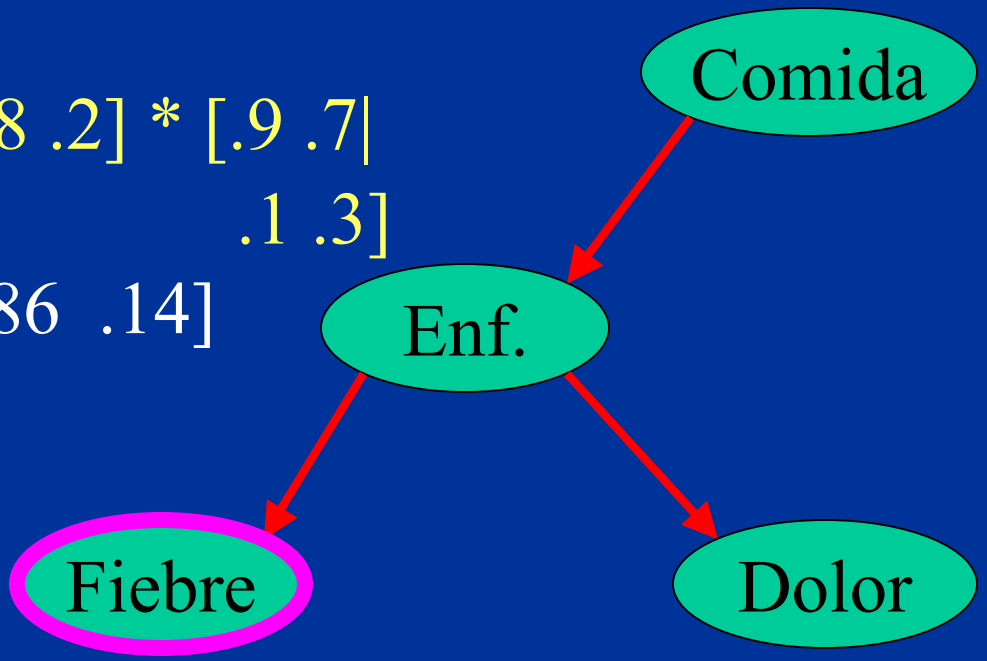
0.7	0.4
0.3	0.6

Ejemplo

$\pi(C) = [.8 \quad .2]$

$\pi(E) = [.8 \ .2] * [.9 \ .7 | .1 \ .3]$

$= [.86 \quad .14]$



P(E|C)

0.9	0.7
0.1	0.3

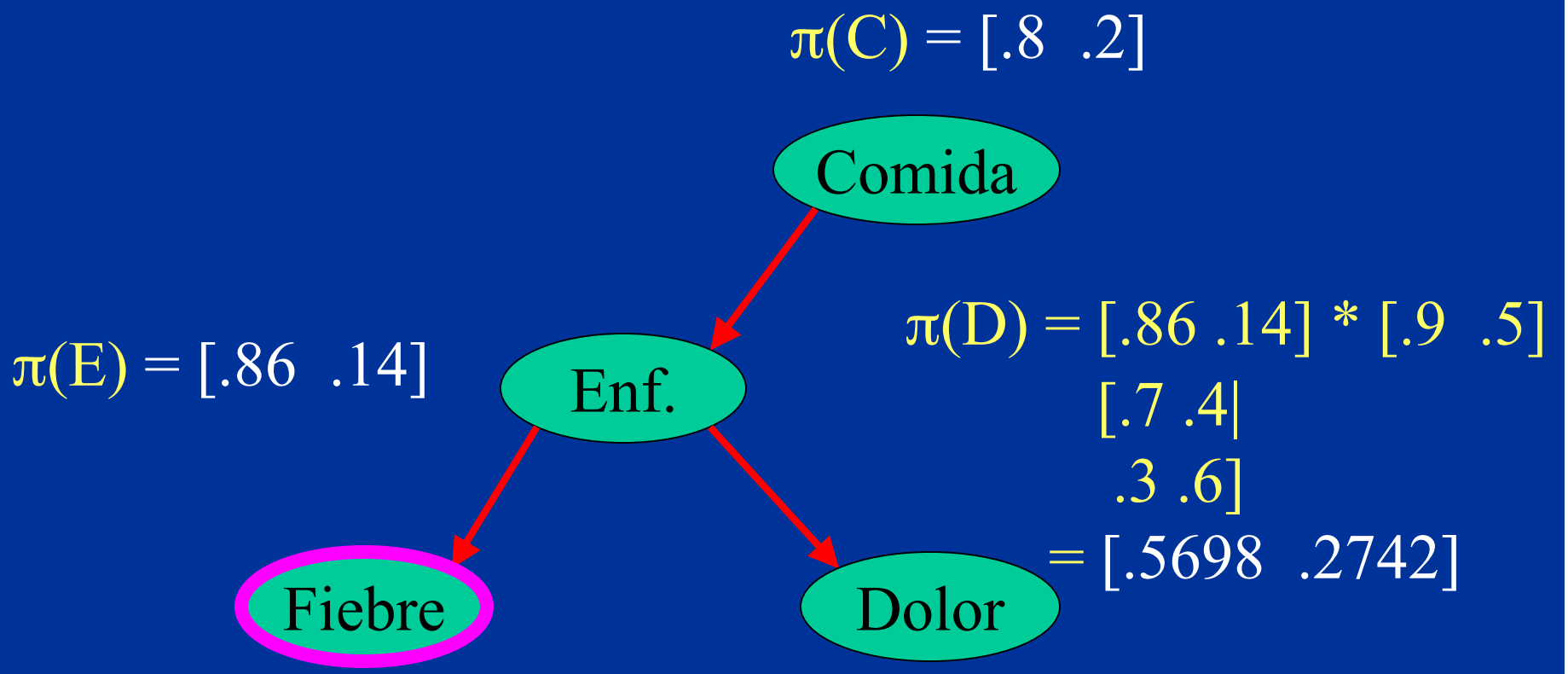
P(F|E)

0.9	0.5
0.1	0.5

P(D|E)

0.7	0.4
0.3	0.6

Ejemplo

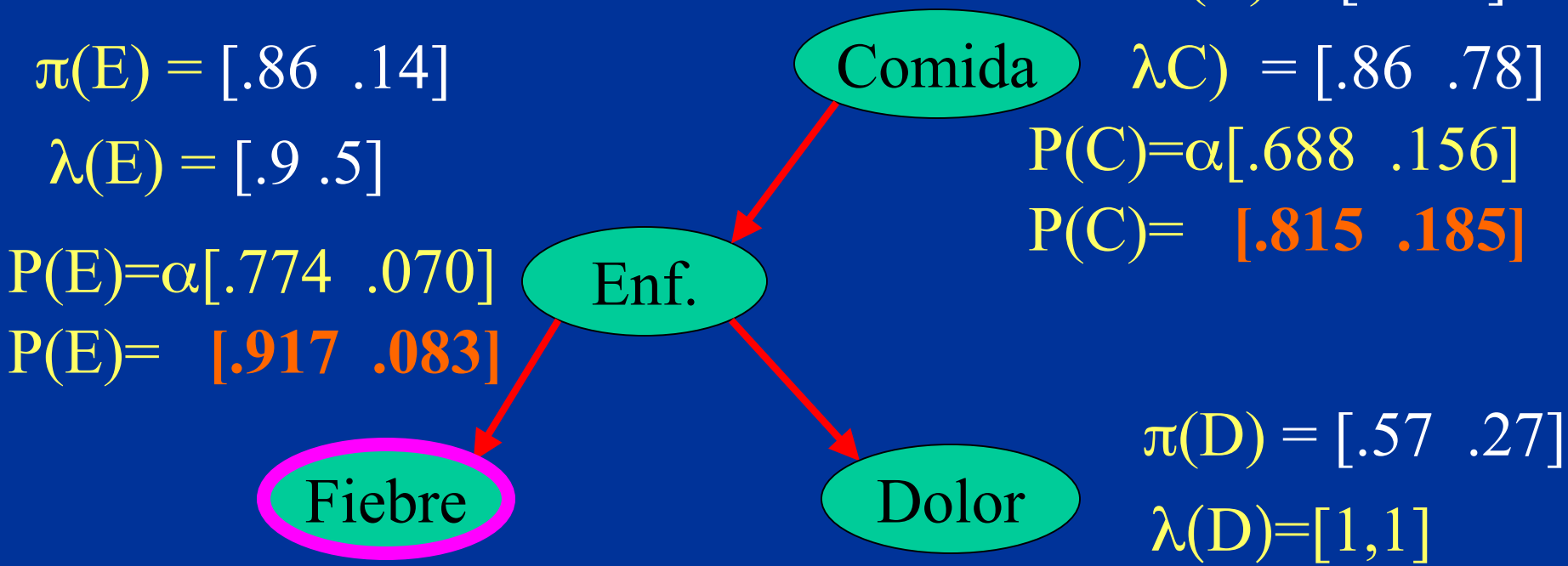


P(D|E)

0.7 0.4

0.3 0.6

Ejemplo


π(C) = [.8 .2]
λC) = [.86 .78]
P(C)=α[.688 .156]
P(C)= [.815 .185]
π(E) = [.86 .14]
λ(E) = [.9 .5]
P(E)=α[.774 .070]
P(E)= [.917 .083]
Comida
Enf.
Fiebre
Dolor
π(D) = [.57 .27]
λ(D)=[1,1]
P(D)=α[.57 .27]
P(D)= [.67 .33]

Demo 1

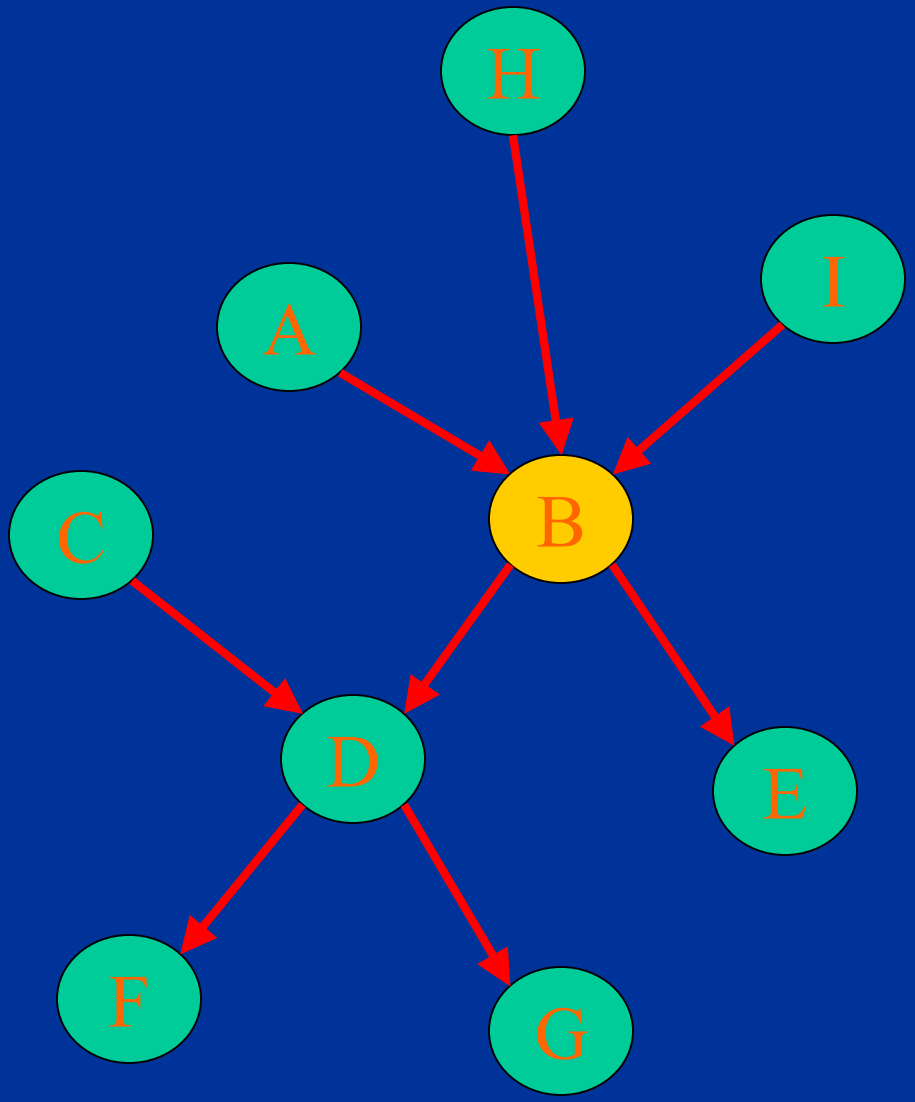
- Ejemplo en HUGIN

Propagación en poliárboles

- Un poliárbol es una red conectada en forma sencilla, pero en la que un nodo puede tener varios padres:

$$P(B \mid A1, A2, \ldots, An)$$

Propagación en Poliárboles



Algoritmo

- El método es muy similar al de árboles, con algunas consideraciones adicionales:
  - Considerar la probabilidad condicional del nodo dados todos sus padres para el cálculo de π y λ
  - Enviar los mensajes λ a cada uno de los padres de un nodo

Propagación en redes multiconectadas

- Una red multiconectada es un grafo no conectado en forma sencilla, es decir, en el que hay múltiples trayectorias entre nodos.
- Para este tipo de redes existen varios tipos de técnicas de inferencia:
  - **Propagación "Loopy"**
  - **Condicionamiento**
  - **Simulación estocástica**
  - **Agrupamiento**

Propagación “Loopy”

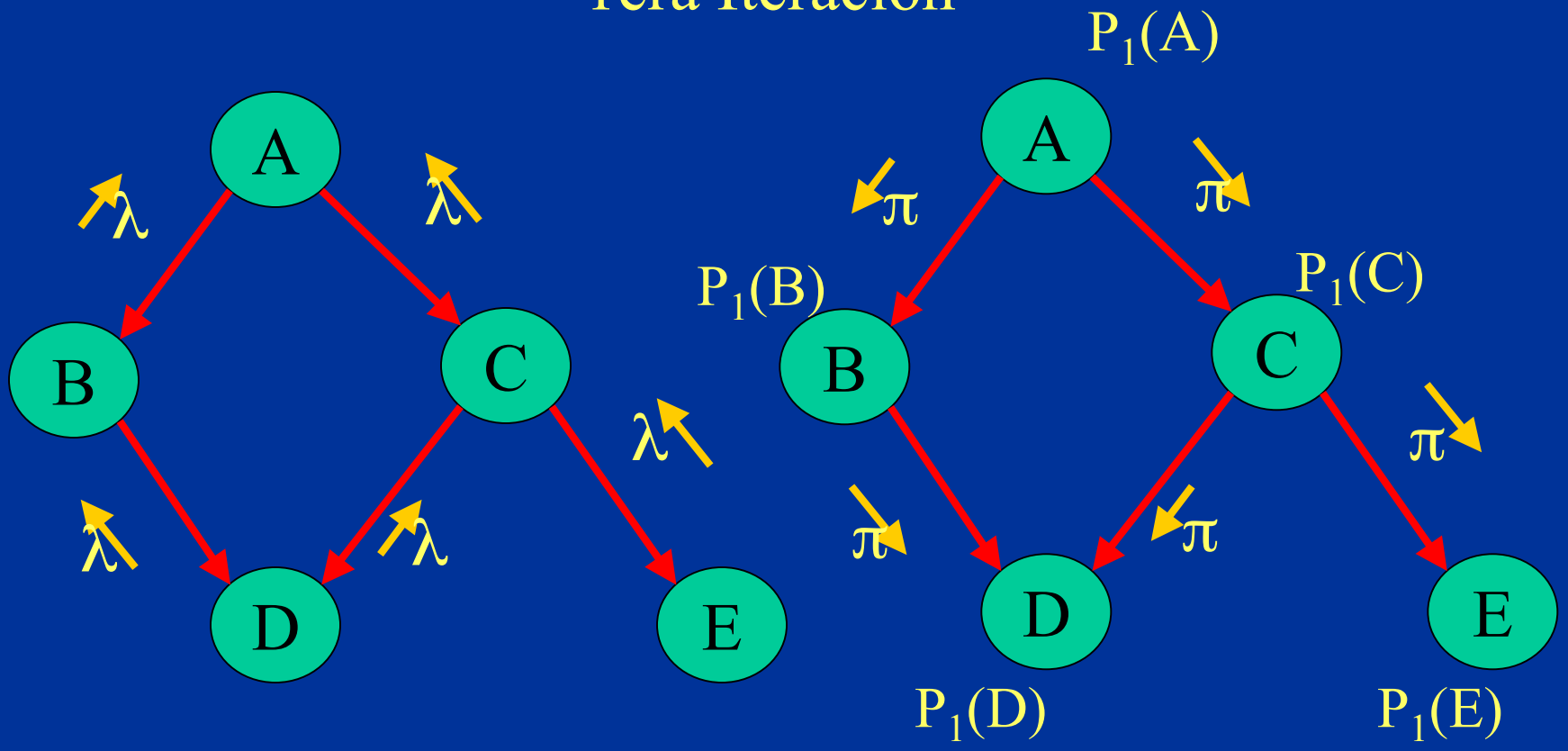
- Este tipo de inferencia es simplemente la aplicación de la técnica de propagación en árboles a redes multiconectadas (con ciclos)
- En este caso ya no hay garantía de obtener una solución exacta, pero en muchos casos se obtiene una “buena” solución aproximada

Propagación "Loopy"

- Algoritmo:
  1. Inicializar π y λ en todos los nodos en forma aleatoria
  2. Repetir hasta que converja o un máximo número de iteraciones:
     a. Propagar de acuerdo al algoritmo de propagación en árboles
     b. Obtener la probabilidad marginal en cada nodo y comparar con la anterior

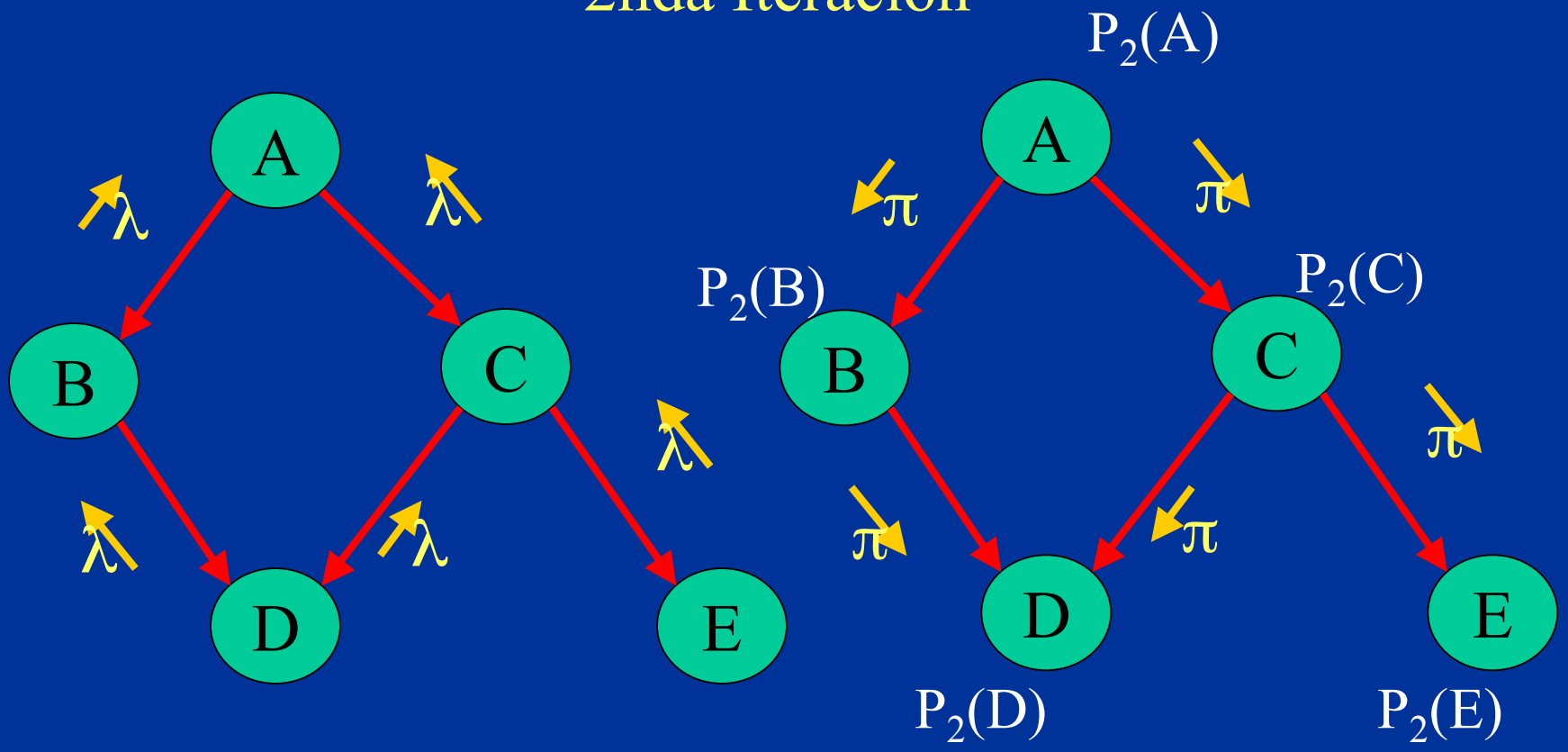
Propagación "Loopy"

– 1era Iteración



Propagación "Loopy"

– 2nda Iteración



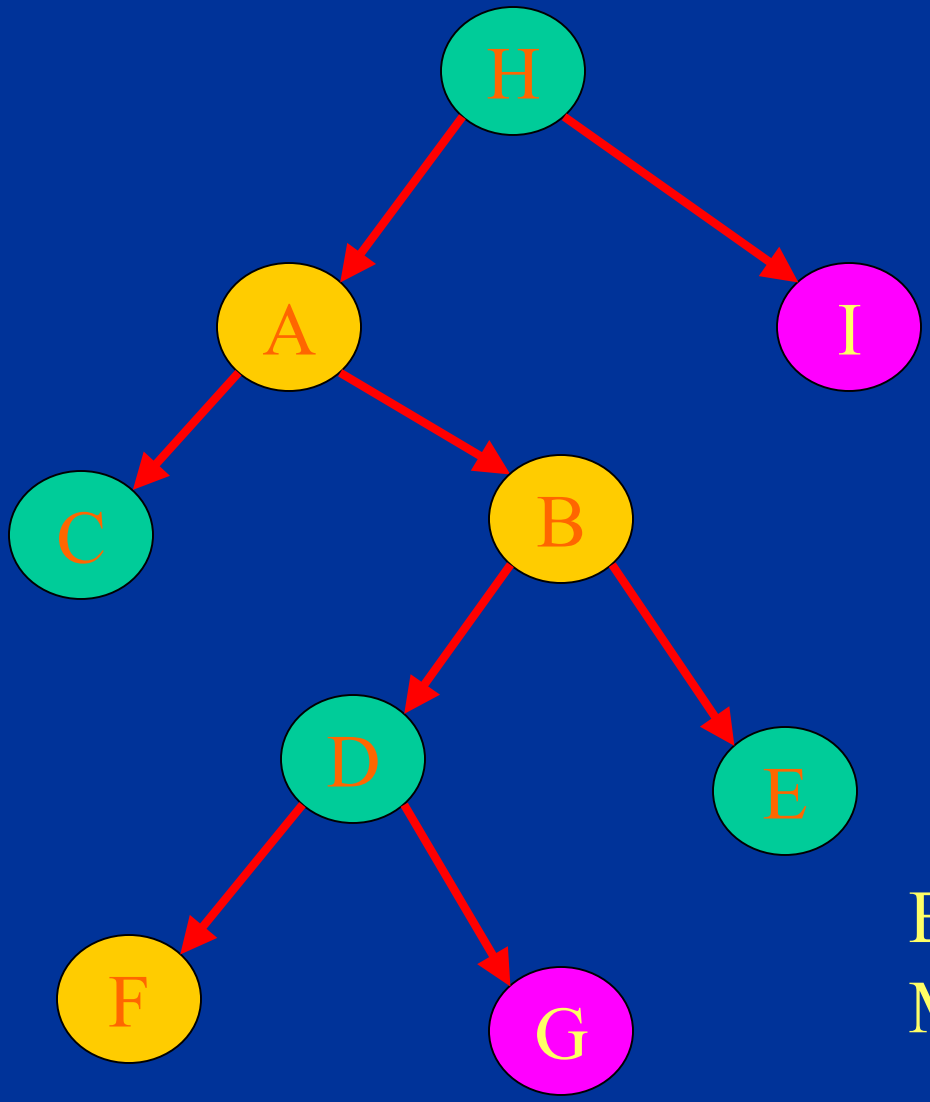
Propagación “Loopy”

- Para ciertas estructuras el algoritmo converge a una buena aproximación de la solución exacta
- Pero en algunas estructuras no converge!
- La aplicación más impactante de este esquema es en códigos de corrección de errores (“Turbo Codes”)

Abducción

- La “abducción” se define como encontrar la mejor “explicación” (valores de un cierto conjunto de variables) dada cierta evidencia
- Normalmente se buscan los valores del conjunto “explicación” que tiene mayor probabilidad
- En general, el conjunto de mayor probabilidad NO es igual a los valores individuales de mayor probabilidad

Abducción



Ejemplo:
Max P(A,B,F|G,I)

Referencias

- Pearl 88 – Cap. 4,5
- Neapolitan 90 – Cap. 6,7,8
- Sucar, Morales, Hoey - Cap. 2
- Koller & Friedman – Cap. 9, 10
- K. Murphy, Y. Weiss, M. Jordan, “Loopy Belief Propagation for Approximate Inference: An Empirical Study”, UAI’99

Actvidades

- Leer sobre inferencia en redes bayesianas (capítulo en la página, referencias)