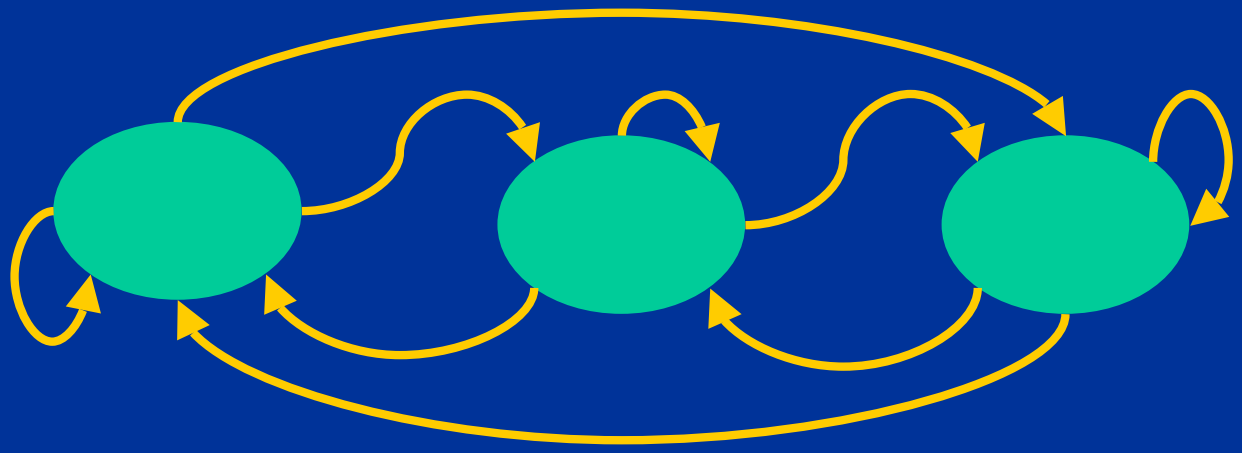
Modelos Gráficos Probabilistas

L. Enrique Sucar

INAOE

Sesión 7:
Modelos Ocultos de Markov



Modelos Ocultos de Markov

- Cadenas de Markov
  - Preguntas básicas
  - Aplicación: orden en Google
- Modelos Ocultos de Markov
- Problemas básicos
  - Evaluación
  - Secuencia óptima
  - Aprendizaje
- Aplicaciones
  - Reconocimiento de voz
  - Reconocimiento de gestos

Máquina de estados

- Es un modelo para procesamiento de información especificado por:
  - Un conjunto de estados, S
  - Un estado inicial, S_0
  - Un conjunto finito de entradas, I
  - Un conjunto finito de salidas, S
  - Una función de transición de S_i -> S_j
  - Una función de salida de S_i -> O

Cadena de Markov (CM)

- Máquina de estados finitos en la que:
  - Las transiciones de un estado a otro no son deterministas
  - La probabilidad de transición de un estado a otro sólo depende del estado actual (y no de los anteriores) – propiedad de Markov

Ejemplo

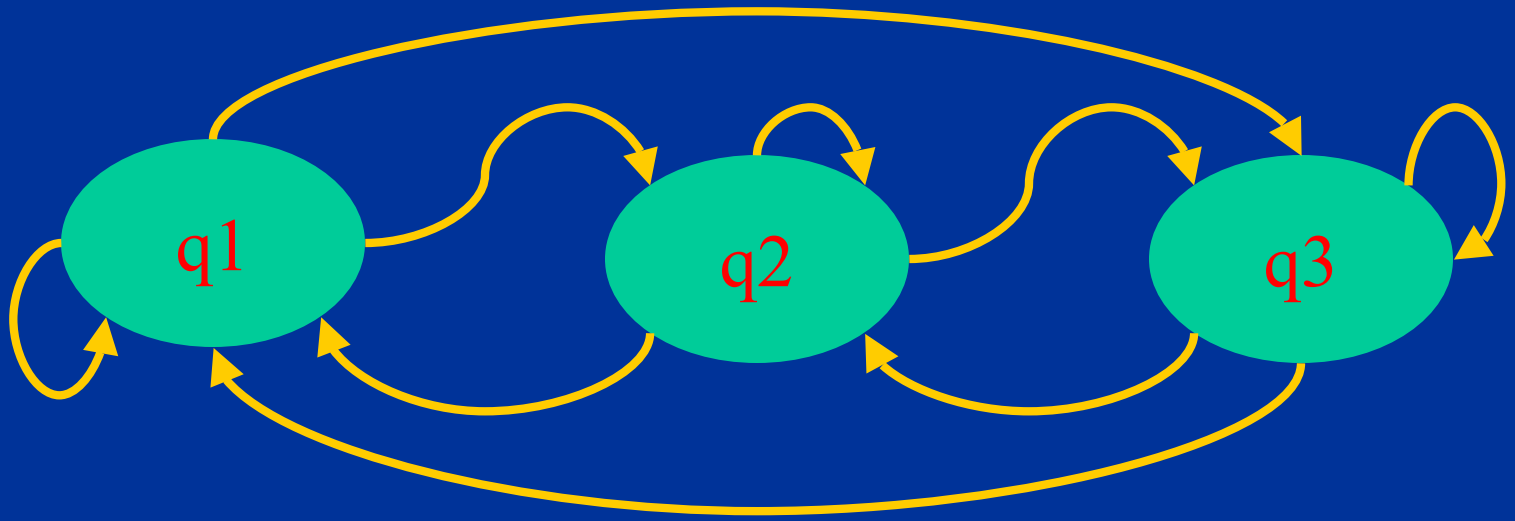
- Estados del clima:
  - Lluvioso (q1)
  - Nublado (q2)
  - Soleado (q3)
- Probabilidades de transición:

	Ll	Nub	Sol
Ll	0.4	0.3	0.3
Nub	0.2	0.6	0.2
Sol	0.1	0.1	0.8

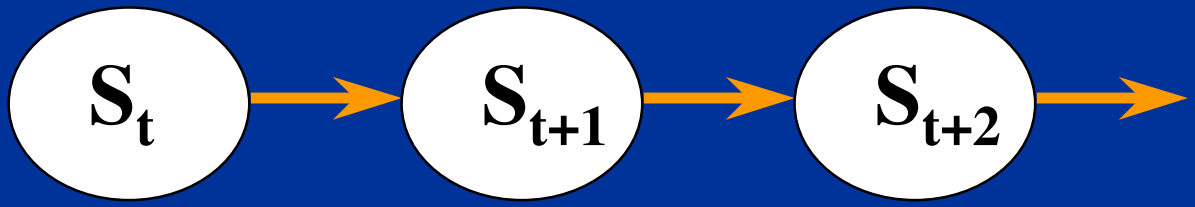
- Probabilidades iniciales:

Ll	Nub	Sol
0.3	0.5	0.2

Ejemplo – diagrama de estados



CM – modelo gráfico



Especificación de una CM

- Conjunto de estados $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$
- Una vector de probabilidades iniciales, $\Pi = \{\pi_1 \ldots \pi_n\}$, $\pi_i = P(S_0 = q_i)$
- Un matriz de probabilidades de transición, $A = \{a_{ij}\}$, donde $a_{ij} = P(S_t = q_j \mid S_{t-1} = q_i)$
- En forma compacta:

  $\lambda = \{A, \Pi\}$

Propiedades

1. Axiomas de probabilidad:

   $\Sigma_j a_{ij} = 1$

2. Markoviano:

   $P(S_t=q_j \mid S_{t-1}=q_i, S_{t-2}=q_k, \ldots)$
   $= P(S_t=q_j \mid S_{t-1}=q_i)$

Salidas

- A cada estado le corresponde una salida, O_i
- Una secuencia de observaciones de t = 1 a t = T se denota por:

$$O = \{o_1 \ldots o_T\}$$

Preguntas básicas

- Probabilidad de pertenencia: probabilidad de cierta secuencia de estados
- Probabilidad de permanencia: probabilidad de que permanezca en cierto estado por cierto tiempo
- Permanencia promedio: tiempo esperado de permanencia en un estado

Preguntas

- Probabilidad de pertenencia:

$$P(q_j\, q_k\, q_l \ldots) = a_{0j}\, a_{jk}\, a_{kl} \ldots$$

- Probabilidad de permanencia:

$$P(d_i) = a_{ii}^{\,d-1} (1 - a_{ii})$$

- Permanencia promedio:

$$E\{d\} = \Sigma\, d_i\, P(d_i)$$

$$E\{d\} = \Sigma\, d_i\, a_{ii}^{\,d-1} (1 - a_{ii}) = 1/(1 - a_{ii})$$

Ejemplos de Preguntas

Dado el modelo del clima -

- Probabilidad de pertenencia:
  - Dado que el tiempo inicial es soleado, cual es la P de que sea sol, sol, lluv, lluv, sol, nub, sol?
- Probabilidad de permanencia:
  - Probabilidad de que este nublado por 3 días seguidos?
- Permanencia promedio:
  - Tiempo esperado que permanezca nublado?

Estimación de parámetros

- Dada una secuencia de observaciones, se pueden determinar los parámetros (A, Π) del modelo:
  - Probabilidades iniciales: $\pi_i \sim \gamma_{0i} / N$
  - Probabilidades de transición: $a_{ij} \sim \gamma_{ij} / \gamma_i$
- Donde:
  - γ_{0i} = número de veces que el estado *i* es el inicial
  - γ_i = número de veces que pasa por el estado *i*
  - γ_{ij} = número de transiciones del estado *i* al *j*
  - N = número de secuencias

Ejemplo de estimación

- Obtener los parámetros del modelo dadas las secuencias:

  q2q2q3q3q3q3q1
  q1q3q2q3q3q3q3
  q3q3q2q2
  q2q1q2q2q1q1q3

Convergencia

- Otra pregunta interesante es: ¿Si se "transita" la cadena un gran número de veces, a la larga cuál es la probabilidad de cada estado (en el límite)?
- Dada una probabilidad inicial, π, la probabilidad después de *N* iteraciones se obtiene multiplicando π por A x A x A …:

$$p = \pi A^N$$

- Después de un cierto número, normalmente el valor de *p* ya prácticamente no cambia

Convergencia

Ejemplo:

A = 0 1.0000 0

0 0.1000 0.9000

0.6000 0.4000 0

π = 0.5000 0.2000 0.3000

Si multiplicamos π * A:

1. 0.1800 0.6400 0.1800
2. 0.1080 0.3160 0.5760

….

10. 0.2358 0.4190 0.3452

En el límite:

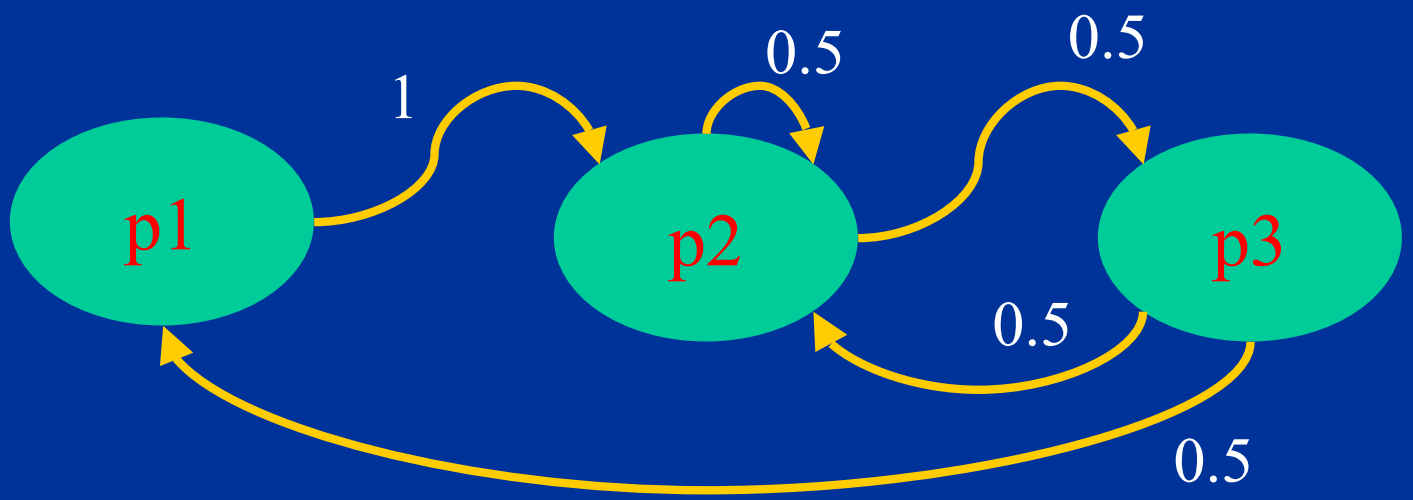
p = 0.2 0.4 0.4

Teorema de Perron-Frobenius

- Dadas ciertas condiciones, la cadena converge a un distribución invariante p, tal que: $p\,A = p$
- Condiciones:
  1. Irreducible: de cualquier estado hay cierta probabilidad de visitar los demás estados
  2. Aperiódica: la cadena no cae en *ciclos*
- La rapidez de convergencia está determinada por el *segundo eigen-valor* de A

Aplicación: orden (*rank*) de Google

- Podemos representar la Web como una CM, donde cada estado es un página y los arcos representan las ligas que apuntan a cada página
- Las probabilidades se "reparten" en función de las ligas salientes de cada página



Aplicación: orden (rank) de Google

- La probabilidad a la que converge la cadena provee una estimación de que tan probable es que una persona visite una página en cierto momento
- Google basa el orden (importancia) de las páginas que encuentra (para cierta búsqueda) en éstas probabilidades

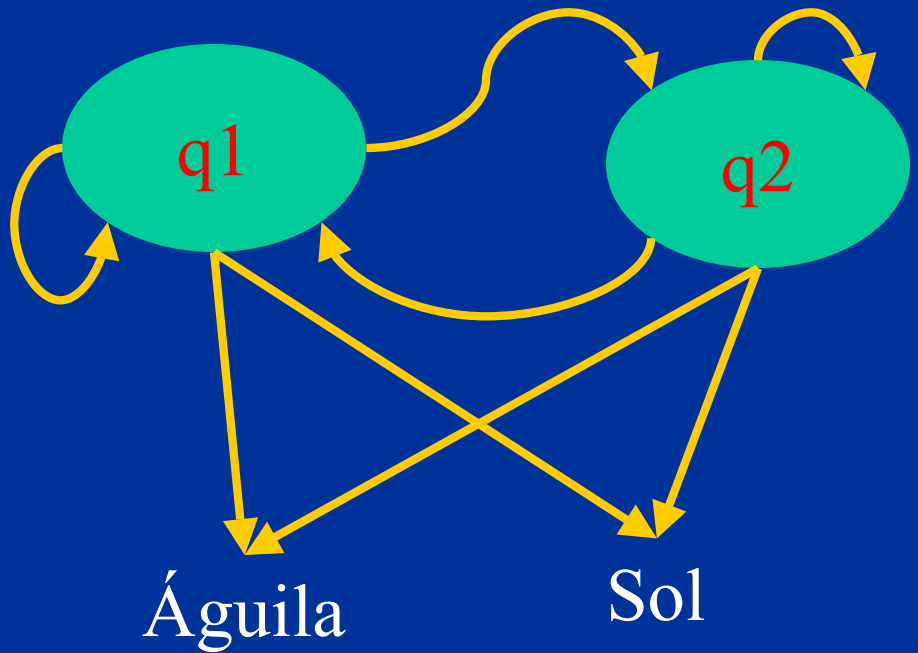
Modelos Ocultos de Markov (HMM)

- Es un modelo de Markov en que los estados no son directamente observables
- Se puede ver como un doble proceso estocástico:
  - Un proceso estocástico “escondido” que es no observable
  - Otro proceso estocástico que produce la secuencia de observaciones

Ejemplo

- Se tienen dos monedas (M1 y M2) que se seleccionan en forma aleatoria
- Cada moneda esta cargada:
  - M1 – P=0.8 de águila
  - M2 – P=0.8 de sol
- Se tiran en secuencia las moneda (*N* veces) y sólo se observa la salida (A o S)

Ejemplo



Especificación de un HMM

- Conjunto de estados $Q = \{q_1 \ldots q_n\}$ y de posibles observaciones O $\{o_1 \ldots o_m\}$
- Una vector de probabilidades iniciales,

$$\Pi = \{\pi_1 \ldots \pi_n\},\ \pi_i = P(S_0 = q_i)$$

- Un matriz de probabilidades de transición,

$$A = \{a_{ij}\},\ \text{donde}\ a_{ij} = P(S_t = q_j \mid S_{t-1} = q_i)$$

- Un vector de probabilidades de salida por cada estado (matriz),

$$B = \{b_{ik}\},\ \text{donde}\ b_{ik} = P(O_t = o_k \mid S_t = q_i)$$

- En forma compacta:

$$\lambda = \{A, B, \Pi\}$$

Ejemplo - especificación

- Π:

  0.5 0.5

- A:

  0.5 0.5

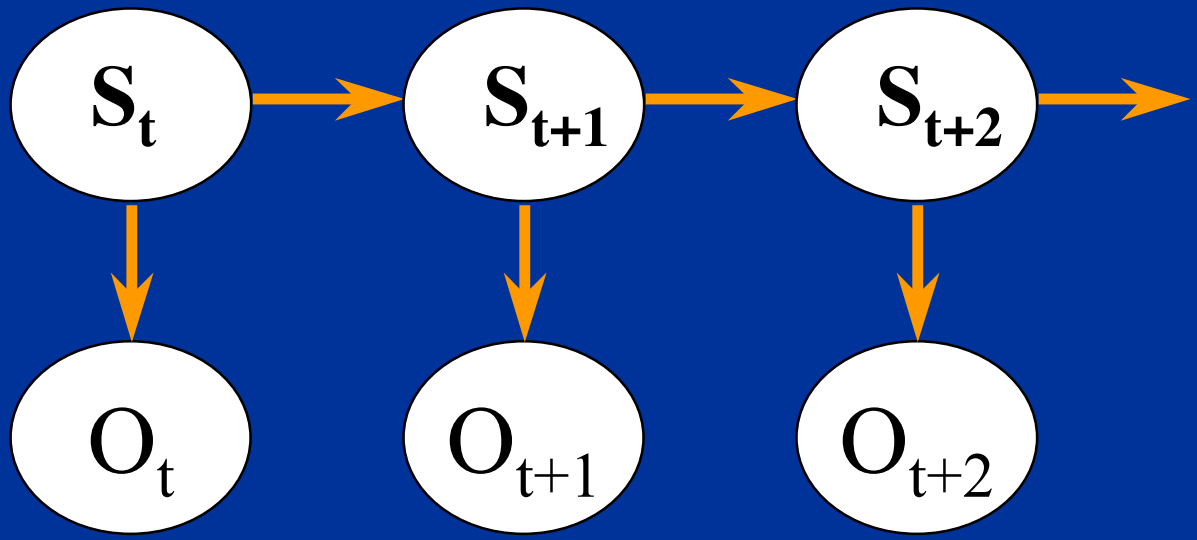
  0.5 0.5

- B:

  0.8 0.2

  0.2 0.8

HMM – modelo gráfico



Consideraciones

- Proceso markoviano: el estado actual sólo depende del estado anterior
- Estacionario: las probabilidades de transición y observación no cambian con el tiempo
- Independencia observaciones: las observaciones sólo dependen del estado actual

Preguntas básicas

- Dado el modelo, calcular la probabilidad de una secuencia de observaciones (evaluación)
- Dado el modelo, obtener la secuencia de estados más probable correspondiente a una secuencia de observaciones (secuencia óptima)
- Dada una secuencia de observaciones, ajustar los parámetros del modelo (aprendizaje)

Evaluación – método directo

- Dada la secuencia de observaciones:

  $O_1\ O_2\ O_3\ O_4\ \ldots$
- Pueden ser generados por diferentes secuencias de estados, considerando una:

  $S_1\ S_2\ S_3\ S_4\ \ldots$
- Entonces la probabilidad de las observaciones y dicha secuencia de estado es:

$$P(O, Qi) = \pi_{q1}\, b_{q1}\,(O_1)\, a_{q12}\, b_{q2}\,(O_2) \ldots a_{q(T-1)T}\, b_{qt}\,(O_T)$$

Evaluación – método directo

- Considerando todas las secuencias:

$$P(O) = \Sigma_Q P(O, Q_i)$$

- Que es lo mismo que:

$$P(O) = \Sigma_Q [\pi_{q1} b_{q1} (O_1) a_{q12} b_{q2} (O_2) \ldots a_{q(T-1)T} b_{qt} (O_T)]$$

Evaluación – método directo

- Número de operaciones
  - Para cada término:

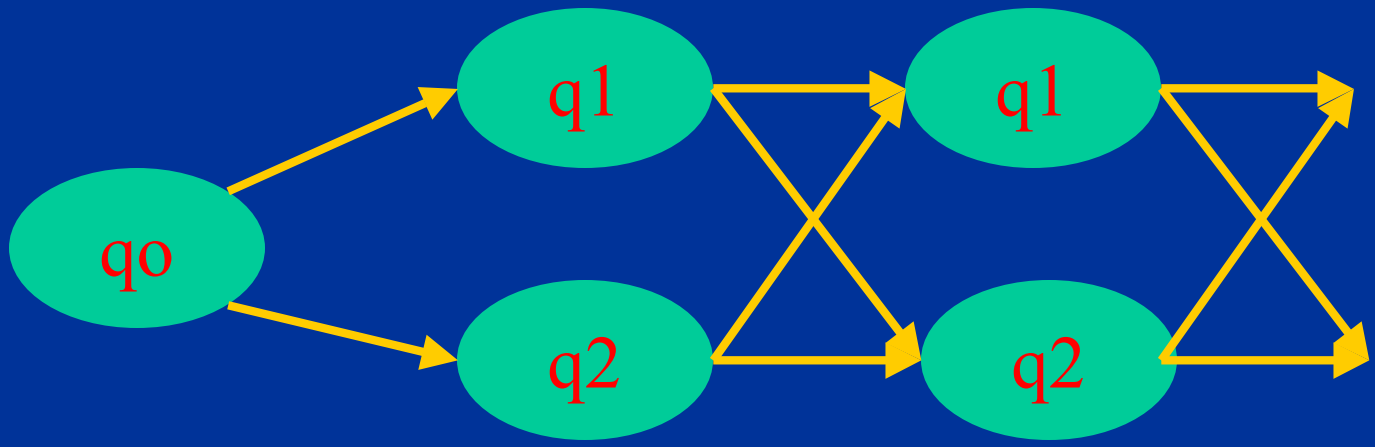
    $2T$
  - Número de posibles secuencias (sumatoria)

    N^T
  - Total:

    $2T \times N^T$
- Por ejemplo, N=5 y T=100 → 10^{72} operaciones!
- Se requiere de un método más eficiente!

Evaluación – método iterativo

- Se basa en la idea de ir evaluando en paralelo la probabilidad de estados/observaciones para cada tiempo



Evaluación – método iterativo

- Se define la variable "forward":

  $\alpha_t(i) = P(O_1\ O_2\ O_3\ O_4\ \ldots\ O_t\ ,\ S_t = q_i)$

- Es decir, la probabilidad de una secuencia parcial de observaciones y que llegue a cierto estado

Algoritmo

1. Inicialización

$$\alpha_1(i) = P(O_1, S_1 = q_i) = \pi_i \, b_i(O_1)$$

2. Inducción

$$\alpha_{t+1}(j) = [\, \Sigma_i \, \alpha_t(i) \, a_{ij} \,] \, b_j(O_{t+1})$$

3. Terminación

$$P(O) = \Sigma_i \, \alpha_T(i)$$

Complejidad

- En cada iteración se tiene del orden de N multiplicaciones y N sumas
- Para las T iteraciones:

$$N^2 \times T$$

- Para N=5 y T=100 -> 2,500 operaciones

Secuencia óptima

- Encontrar la secuencia de estados *óptima* dada la secuencia de observaciones
- Óptimo se puede definir de diferentes maneras:
  - Estados más probables
  - Secuencia total más probable

Definiciones

- Variable "*backward*":

$$\beta_t(i) = P\,(O_{t+1}\, O_{t+2} \ldots O_T\,,\, S_t = q_i)$$

- En forma iterativa:

$$\beta_t(i) = \sum_j \beta_{t+1}(j)\, a_{ij}\; b_j\,(O_{t+1})$$

- Definiendo:

$$\beta_T(j) = 1$$

Definiciones

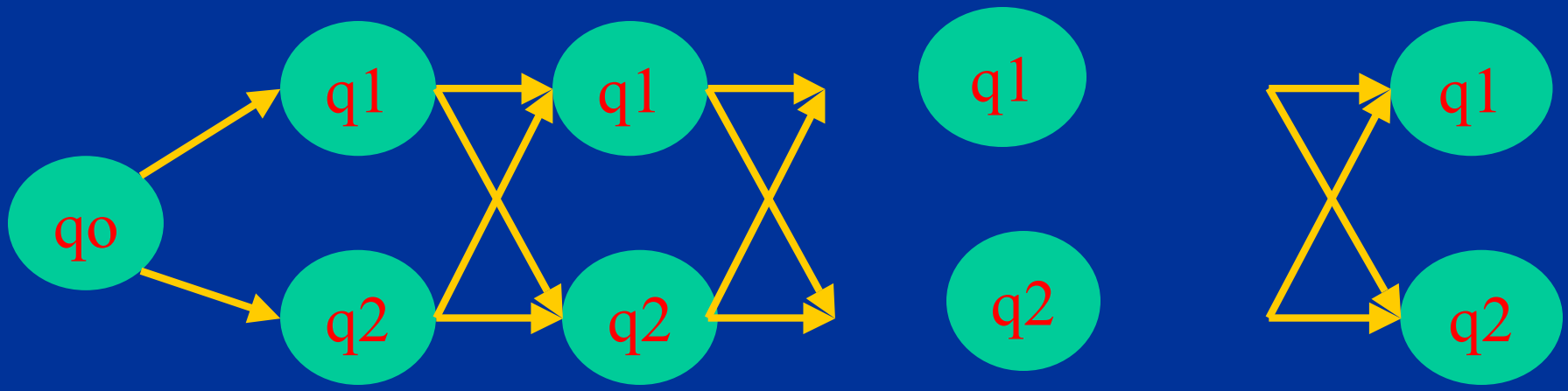
- Por lo tanto, combinando ambas definiciones:

$$P(O, S_t = q_i) = \alpha_t(i)\, \beta_t(i)$$

- Y entonces:

$$P(O) = \Sigma_i\, \alpha_t(i)\, \beta_t(i)$$

Cálculo iterativo



Más definiciones

- Probabilidad condicional:

$$\gamma_t(i) = P(S_t = q_i \mid O) = P(S_t = q_i , O) / P(O)$$

- En términos de α y β:

$$\gamma_t(i) = \alpha_t(i)\, \beta_t(i) / P(O)$$

$$\gamma_t(i) = \alpha_t(i)\, \beta_t(i) / \Sigma_i\, \alpha_t(i)\, \beta_t(i)$$

Estados más probable

- El estado individual más probable para el tiempo *t* es:

$$\text{ARG MAX}_{i}\ \gamma_t(i)$$

- El problema es que la concatenación de los estados más probables no necesariamente corresponde a la secuencia más probable

Secuencia más probable

- Secuencia total más probable es:

$$\text{MAX } P(Q \mid O)$$

- Dado que $P(Q|O) = P(Q,O) / P(O)$, entonces es equivalente a:

$$\text{MAX } P(Q , O)$$

Algoritmo de Viterbi

- Antes de ver el algoritmo es necesario definir otra variable
- La subsecuencia de estados óptimos hasta el tiempo t:

$$\delta_t(i) = \text{MAX } P(S_1\, S_2 \ \ldots S_t = q_i, O_1\, O_2 \ldots O_t)$$

- En forma iterativa:

$$\delta_{t+1}(i) = [\ \text{MAX}_i\ \delta_t(i)\ a_{ij}\ ]\ b_j\ (O_{t+1})$$

Algoritmo

1. Inicialización:

$\delta_1(i) = \pi_i \, b_i \, (O_1)$

$\psi_1(i) = 0$

2. Recursión

$\delta_t(j) = MAX_i \, [\delta_{t-1}(i) \, a_{ij} \,] \, b_j \, (O_t)$

$\psi_t(j) = ARGMAX_i \, [\delta_{t-1}(i) \, a_{ij}]$

3. Terminación

$P^* = MAX_i \, [\delta_T(i)]$

$q_T^* = ARGMAX_i \, [\delta_T(i)]$

4. Backtracking

$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^* \,)$

Aprendizaje

- Consiste en determinar los parámetros del modelo, $\lambda = \{A, B, \Pi\}$, dada una secuencia de observaciones
- Para ello, se buscan los parámetros que maximicen $P(O \mid \lambda)$ – no se pueden obtener con precisión
- Número de parámetros (N estados, M obs.):

$$N + N^2 + N \times M$$

Algoritmo de Baum-Welch

- Otra variable auxiliar – probabilidad de estar en el estado i en t y pasar a j en t+1 dada la secuencia de observaciones:

$$\xi_t(i,j) = P(S_t = q_i , S_{t+1} = q_j \mid O) =$$

$$P(S_t = q_i , S_{t+1} = q_j , O) / P(O)$$

- En términos de a y b:

$$\xi_t(i,j) = \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j) / P(O)$$

$$\xi_t(i,j) = \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j) / \sum_i \sum_j \alpha_t(i)\, a_{ij}\, b_j(O_{t+1})\, \beta_{t+1}(j)$$

Algoritmo de Baum-Welch

- La variable $\gamma_t(i)$ se puede calcular como:

$$\gamma_t(i) = \sum_j \xi_t(i,j)$$

- Esta variable sumada sobre todos los tiempos da una estimación del número de veces que se pasa por el estado "i"

$$\sum_t \gamma_t(i)$$

- Mientras que la suma sobre t de $\xi_t(i,j)$ da una estimación del número de transiciones de "i -> j":

$$\sum_t \xi_t(i,j)$$

Re-estimación de los parámetros

1. Probabilidades iniciales – número de veces en el estado "i" en t=1:

   $\pi_i = \gamma_1(i)$

2. Probabilidades de transición – número de transiciones de "i -> j" entre el número de veces en "i"

   $$a_{ij} = \Sigma_t \xi_t(i,j) / \Sigma_t \gamma_t(i)$$

3. Probabilidades de salidas – número de veces en estado "j" y observar "k" entre el número de veces en dicho estado:

   $$b_{jk} = \Sigma_{t,O=k} \gamma_t(i) / \Sigma_t \gamma_t(i)$$

Re-estimación de los parámetros

- Se inicia con ciertos valores (al azar) y se van mejorando iterativamente (se repite el proceso varias veces)
- Se obtiene un estimador de *máxima verosimilitud*
- No se garantiza el óptimo global
- Este algoritmo pertenece a la familia de métodos EM (maximización de la expectación)

Aplicaciones

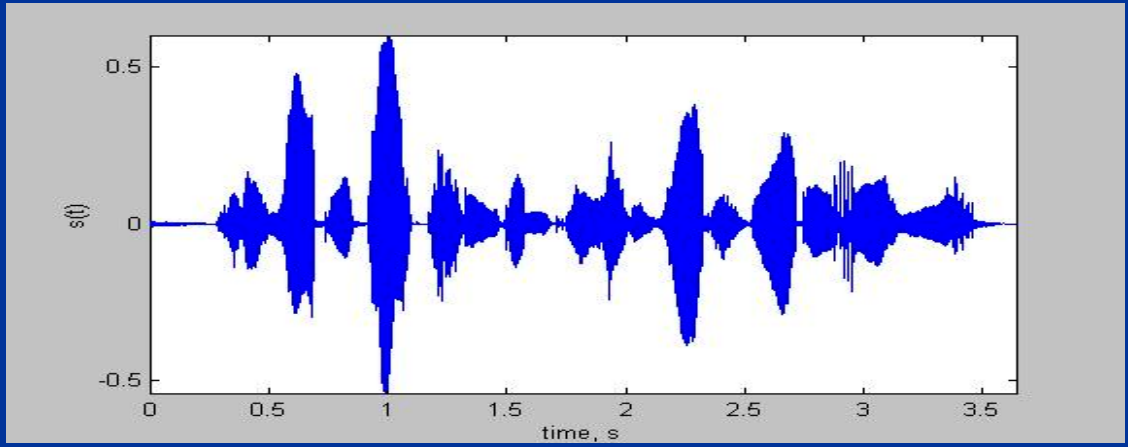
- Modelado de procesos dinámicos, como:
  - Reconocimiento de voz
  - Reconocimiento de gestos

Reconocimiento de voz

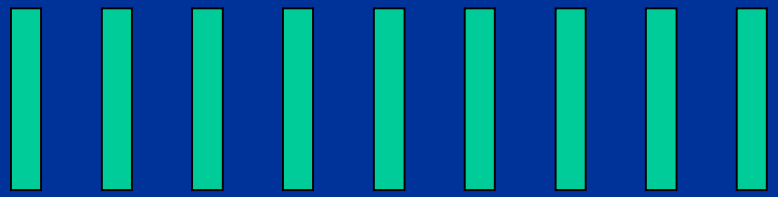
- Se modela a nivel palabra o fonema utilizando HMMs
- Las observaciones consisten de vectores de características obtenidas del procesamiento de la señal de voz
- Se utilizan secuencias de voz para el entrenamiento y, posteriormente durante reconocimiento, se obtiene la probabilidad de cada modelo (palabra o fonema), seleccionando la de mayor probabilidad

Rec. de Voz

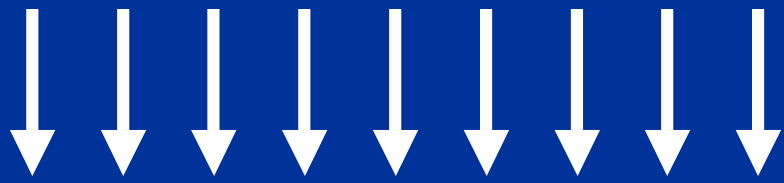
Señal de voz



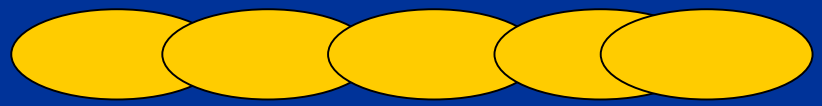
Vector de características espectrales



Estimación de probabilidades fonemas

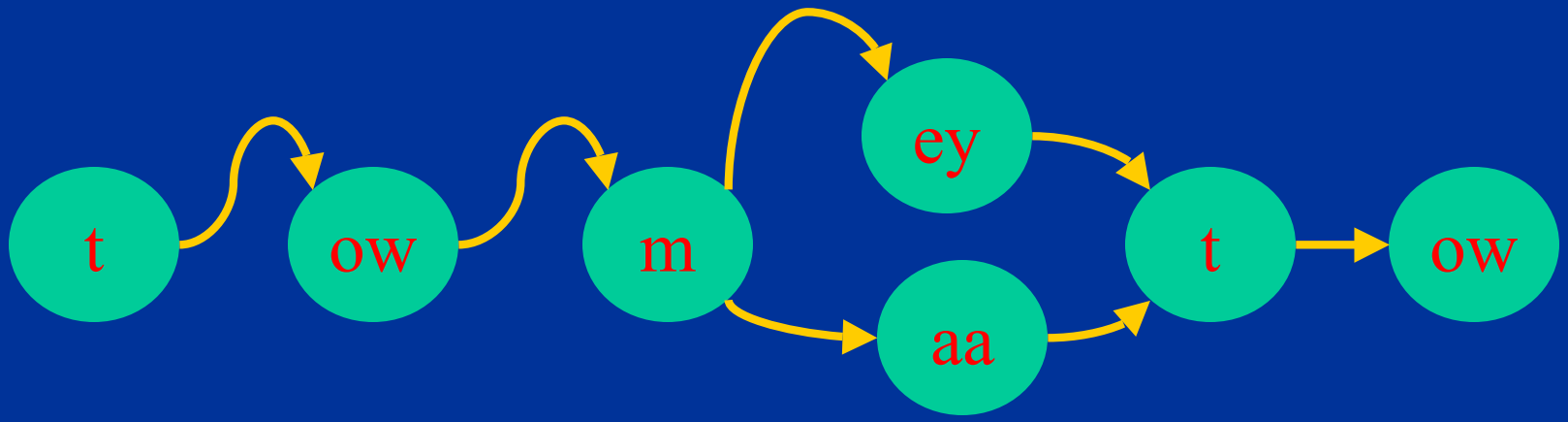


HMMs

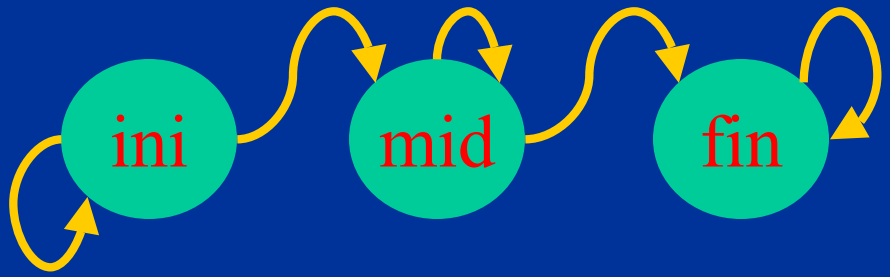


Reconocimiento de voz

Palabra: “tomato”

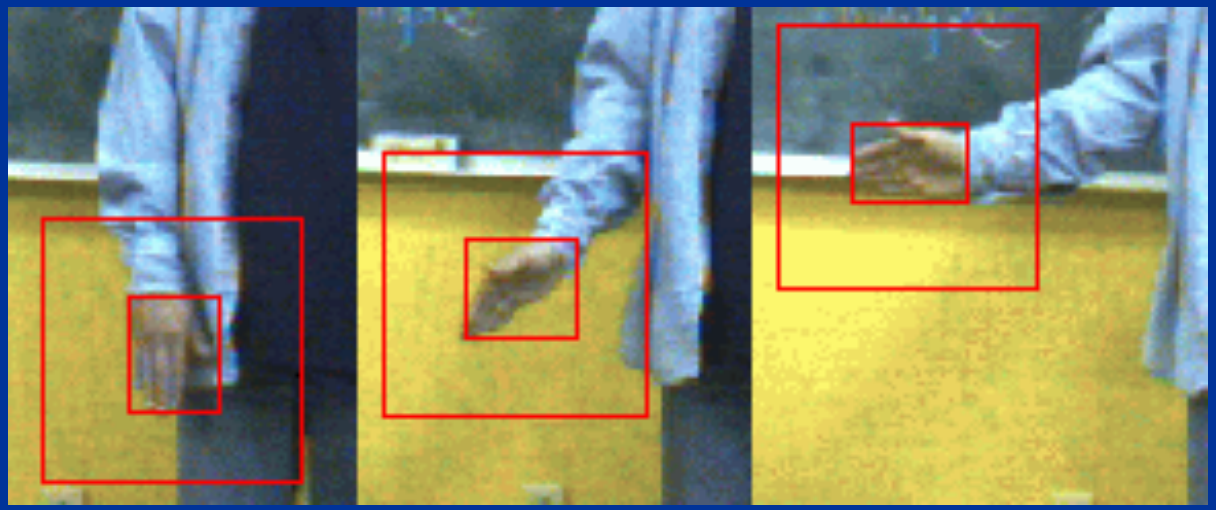


Fonema



Reconoci-miento de Gestos dinámicos

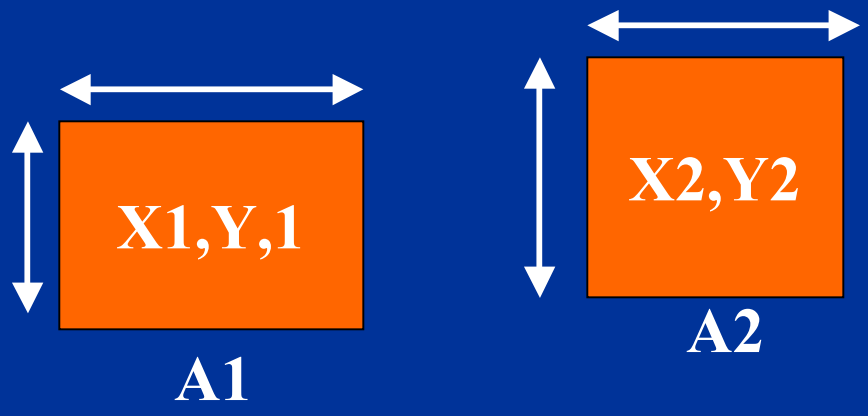
Reconocimiento de gestos



Seguimiento de la mano en una secuencia imágenes

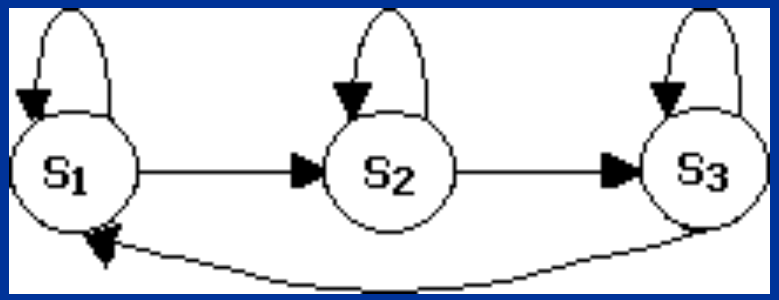
Características

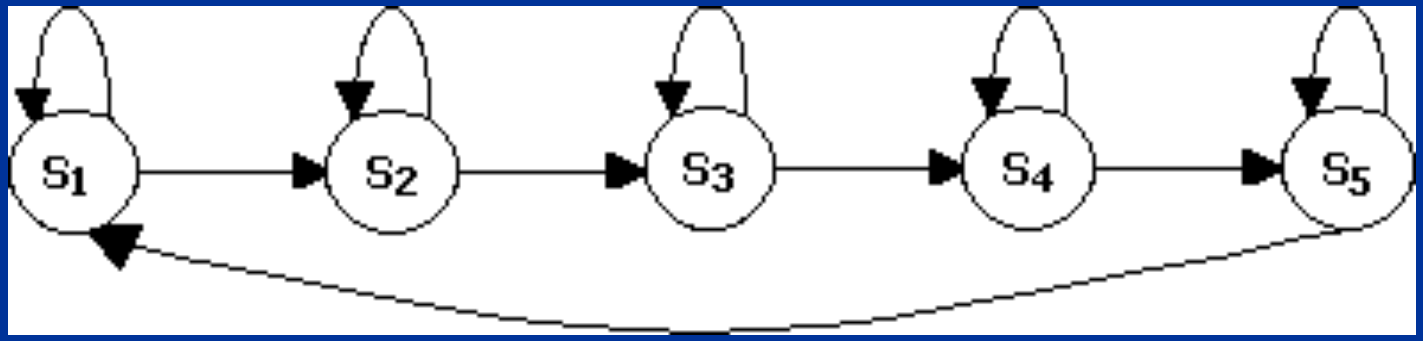
- Observaciones:
  - cambio en X (**ΔX**)
  - cambio en Y (**ΔY**)
  - cambio en área (**ΔA**)
  - cambio en razón X-Y (**ΔR**)
- Cada una se codifica en 3 valores: **(+, 0, -)**, lo que da un total de 81 posibles observaciones



HMM

- Se utiliza un HMM para cada gesto (5 gestos):
  - 3 estados: gestos *simples*
  - 5 estados: gestos *complejos*

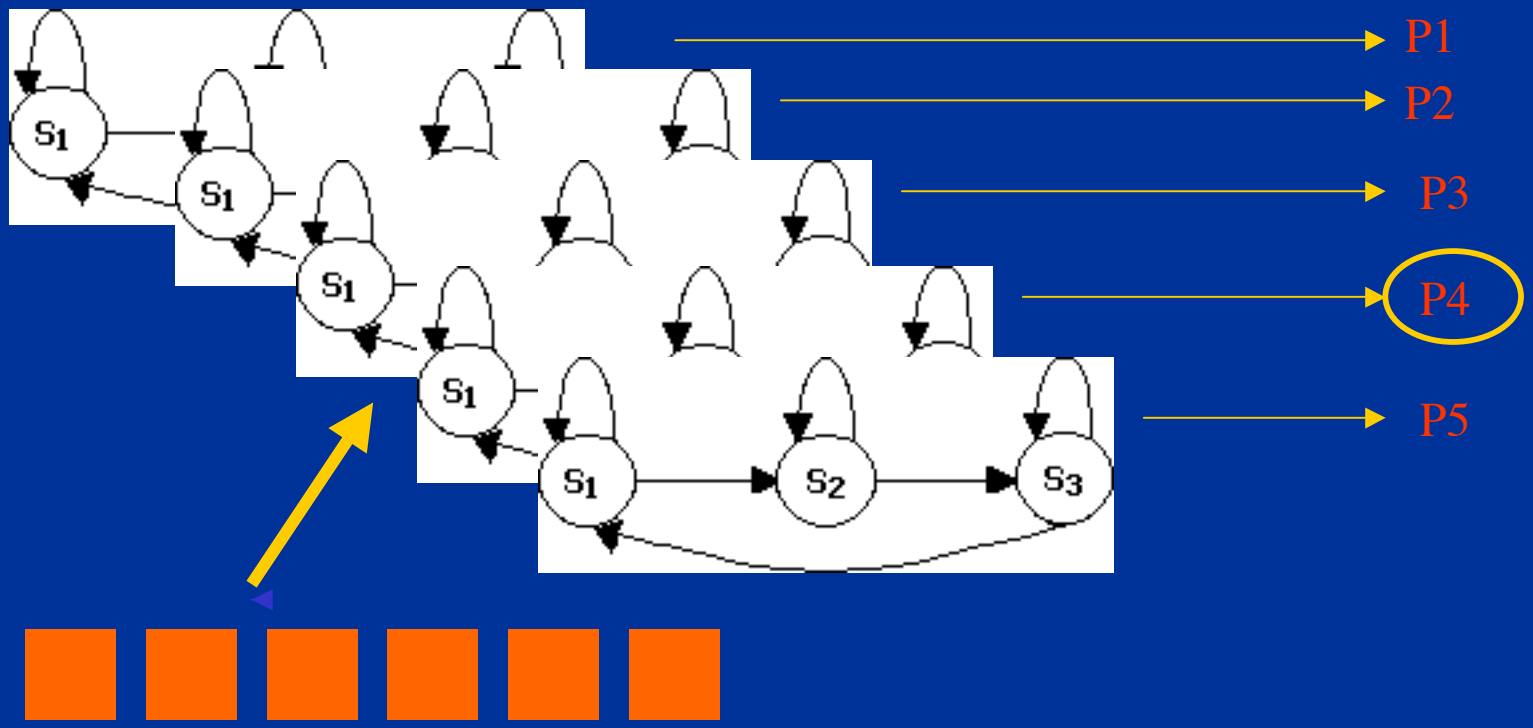




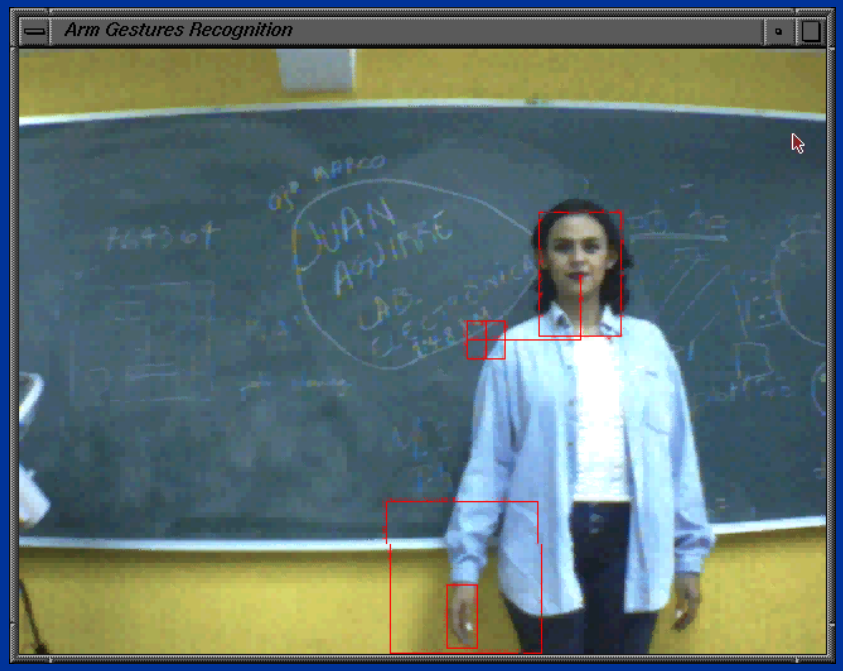
Entrenamiento y Reconocimiento

- Se tiene un HMM por gesto que se entrena (*algoritmo de Baum-Welch*) con ejemplos de secuencias del gesto
- Para reconocer gestos, se obtiene la probabilidad de cada modelo dadas las observaciones (*algoritmo Forward*) y se selecciona el modelo con mayor probabilidad

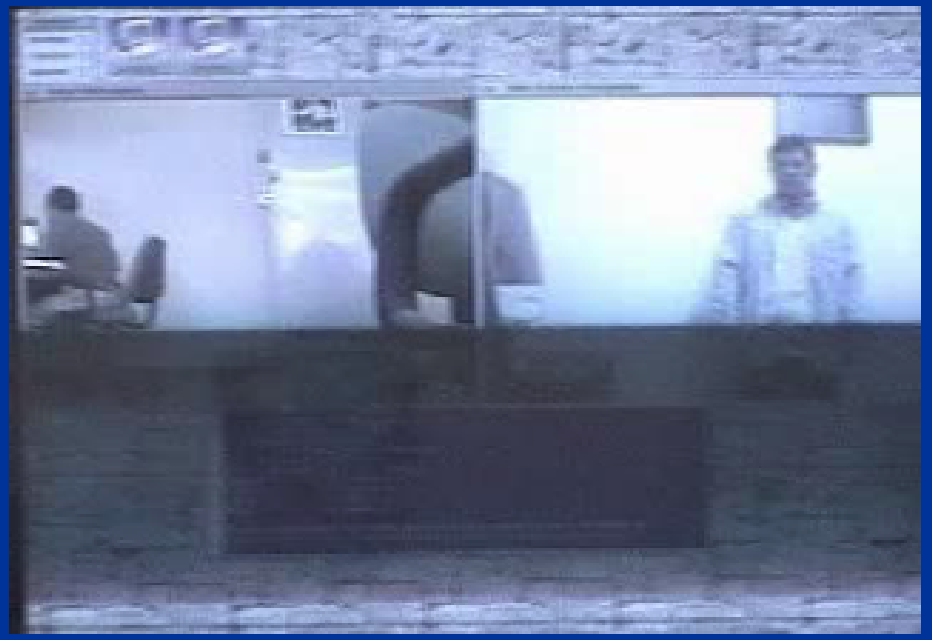
Reconocimiento



Ejemplos



Seguimiento de la mano



Control con gestos

Referencias

- L. R. Rabiner, B. H. Juang, “An introduction to hidden Markov models”, IEEE ASSP, Enero 1986.
- L. R. Rabiner, “A tutorial on hidden Markov Models and selected applications in speech recognition”, Readings in speech recognition, pp. 267-296, 1990.
- J. K. Kemeny, J. L. Snell, “Finite Markov Chains”, Van Nostrand, 1965.
- D. Jurafsky, J. Martin, “Speech and language processing”, Prentice-Hall, 2000 – Capítulo 7

Referencias

- [Koller & Friedman] Cap. 6
- L. Page et al., “The PageRank citation ranking: Bringing order to the Web”, Stanford Digital Libraries Working Paper, 1998.
- H. Avilés, L. E. Sucar, “Visual recognition of similar gestures”, ICPR’06
- A. Montero, L.E. Sucar, “A decision theoretic video conference system based on gesture recognition”, F&G’06

Actividades

- Hacer ejercicios de HMM
- Leer artículo HMMs de Rabiner
- Leer artículo de PageRank