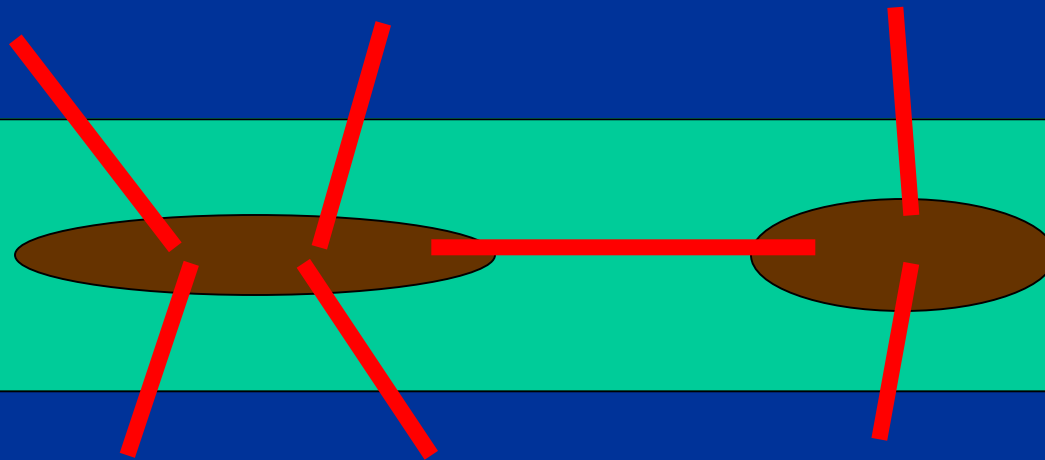


Modelos Gráficos Probabilistas

L. Enrique Sucar

INAOE

Sesión 4: Teoría de Grafos



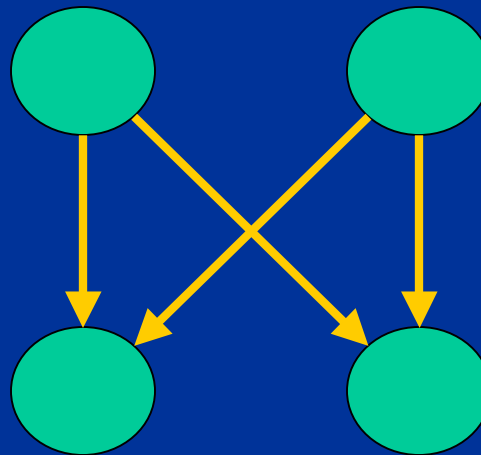
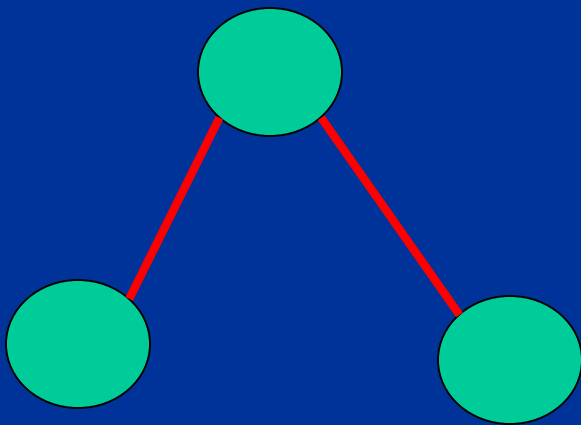
Problema de los puentes de Königsberg [Euler]

Teoría de Grafos

- Definición y terminología
- Tipos de grafos
- Trayectorias y circuitos
- Isomorfismo
- Árboles
- *Cliques*
- Grafos triangulados – llenado
- Búsqueda de máxima cardinalidad

Definición

- Un grafo es una representación gráfica de objetos y relaciones binarias entre éstos



Definición

- Grafo no-dirigido: es un par ordenado (V, E) , donde V es un conjunto de nodos y E es un conjunto de orillas (arcos)
- Grafo dirigido: es un par ordenado (V, E) , donde V es un conjunto de nodos y E es una relación binaria en V

$$G = (V, E)$$

$$E_i = (V_j, V_k)$$

Definiciones

$$E_i = (V_j, V_k)$$

- V_j es adyacente a V_k
- El grado de un nodo V es el número de orillas incidentes en V
- Teorema: el número de vértices de grado impar en un grafo es par

Definiciones

- Dos orillas asociadas al mismo par de vértices son orillas paralelas
- Un orilla incidente en un solo vértice es un ciclo
- Un vértice que no es incidente en ninguna orilla es un vértice aislado

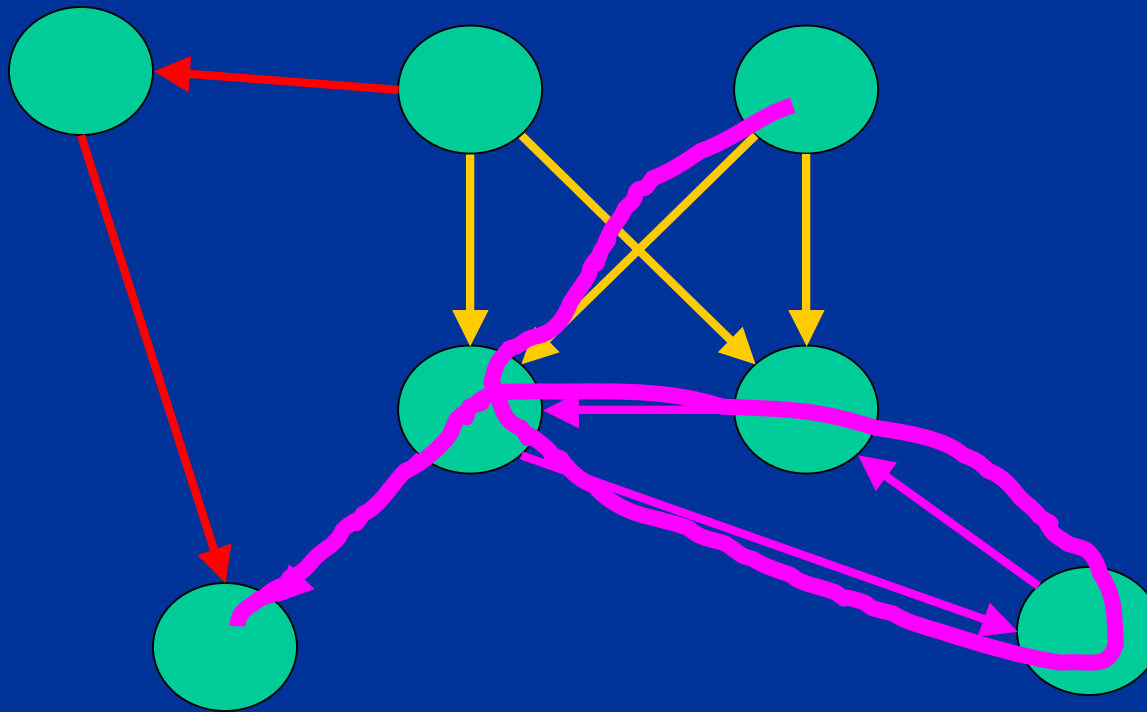
Tipos de Grafos

- Grafos no-dirigidos
- Grafos dirigidos
- Grafos de cadenas (*chain graphs*) – dirigido y no dirigido
- Grafo simple – no tiene ciclos ni arcos paralelos
- Multi-grafo – varios grafos desconectados
- Grafo completo – arcos entre cada par de nodos
- Grafo bipartita – dos subconjuntos de nodos
- Grafo pesado – pesos asociados
- Grafo acíclico dirigido (DAG) – no hay circuitos dirigidos

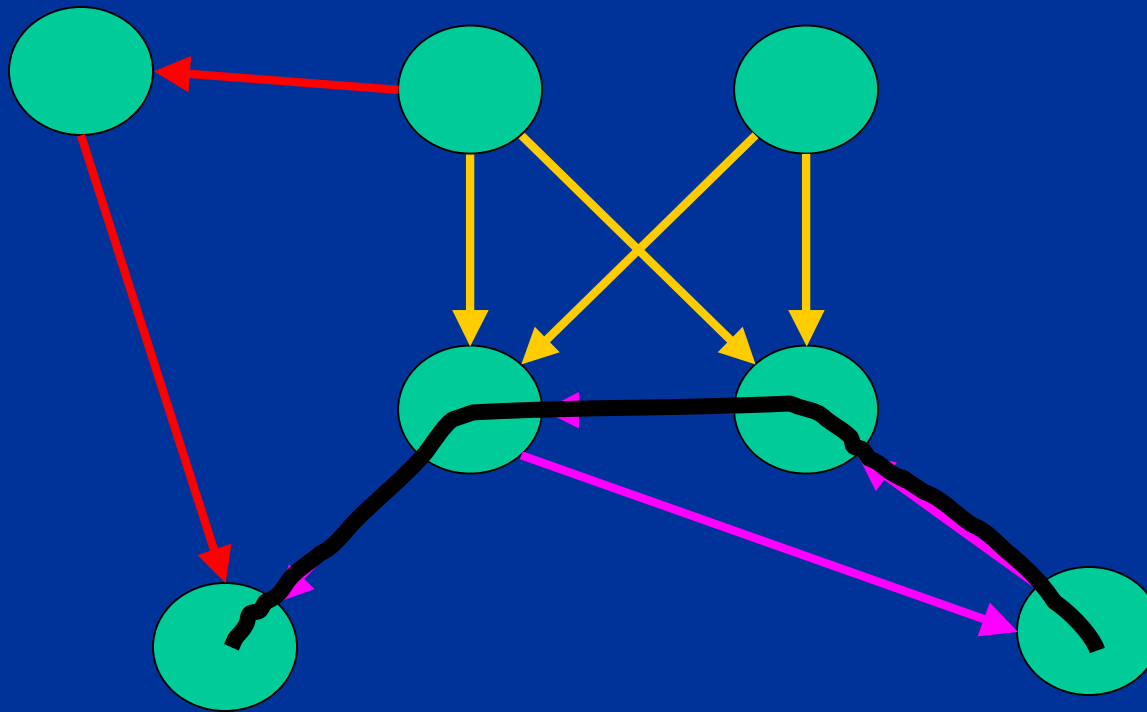
Trayectorias

- En un grafo dirigido, una trayectoria es una secuencia de orillas, tal que el vértice inicial de cada orilla coincide con el vértice inicial de la siguiente
- Simple: no incluye la misma orilla 2 veces
- Elemental: no incide en el mismo vértice 2 veces

Trayectorias



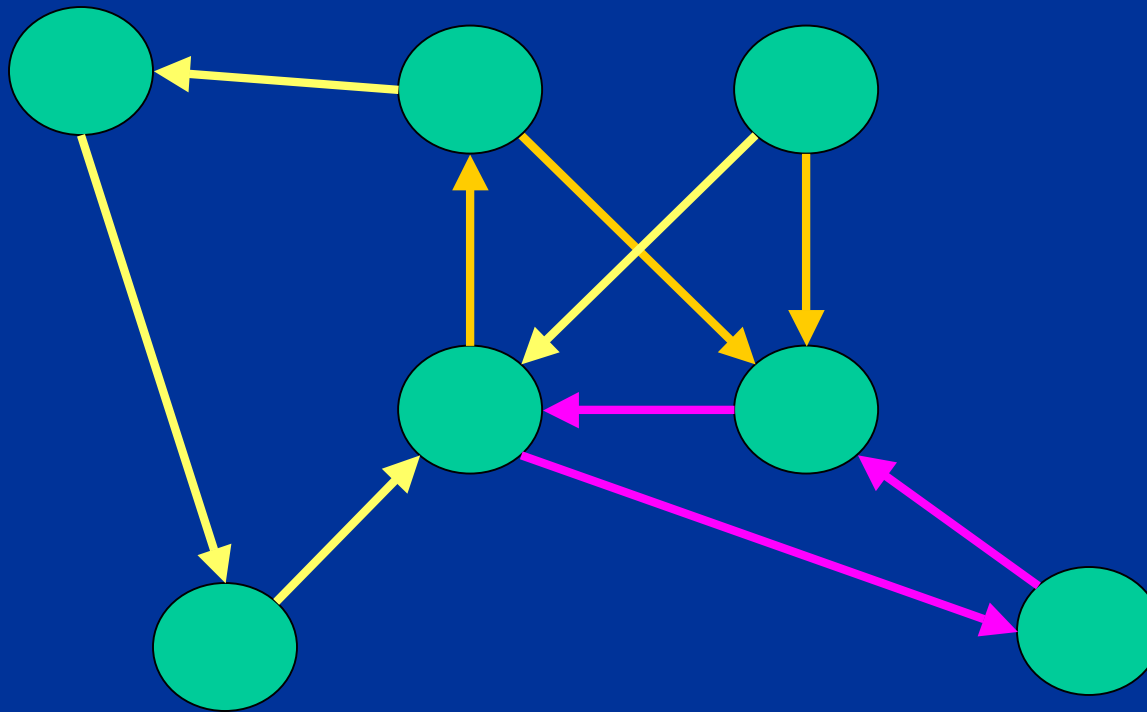
Trayectorias



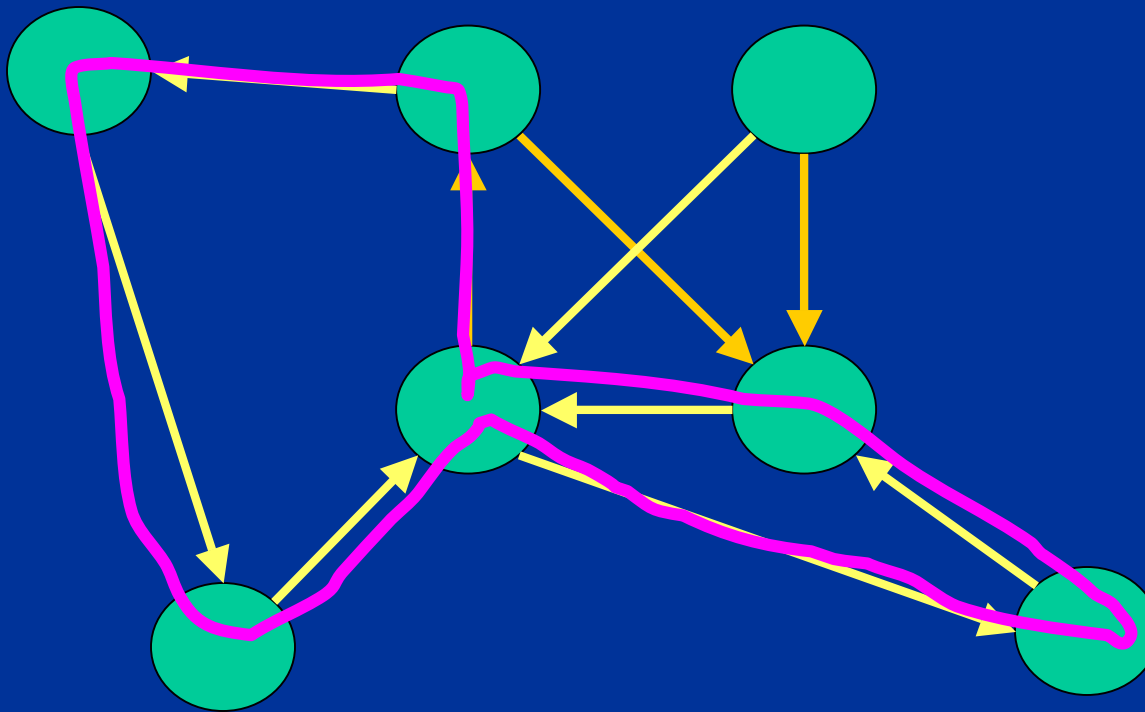
Circuitos

- Un circuito es una trayectoria en que el vértice inicial coincide con el final
- Circuitos simples
- Circuitos elementales

Circuitos



Circuitos



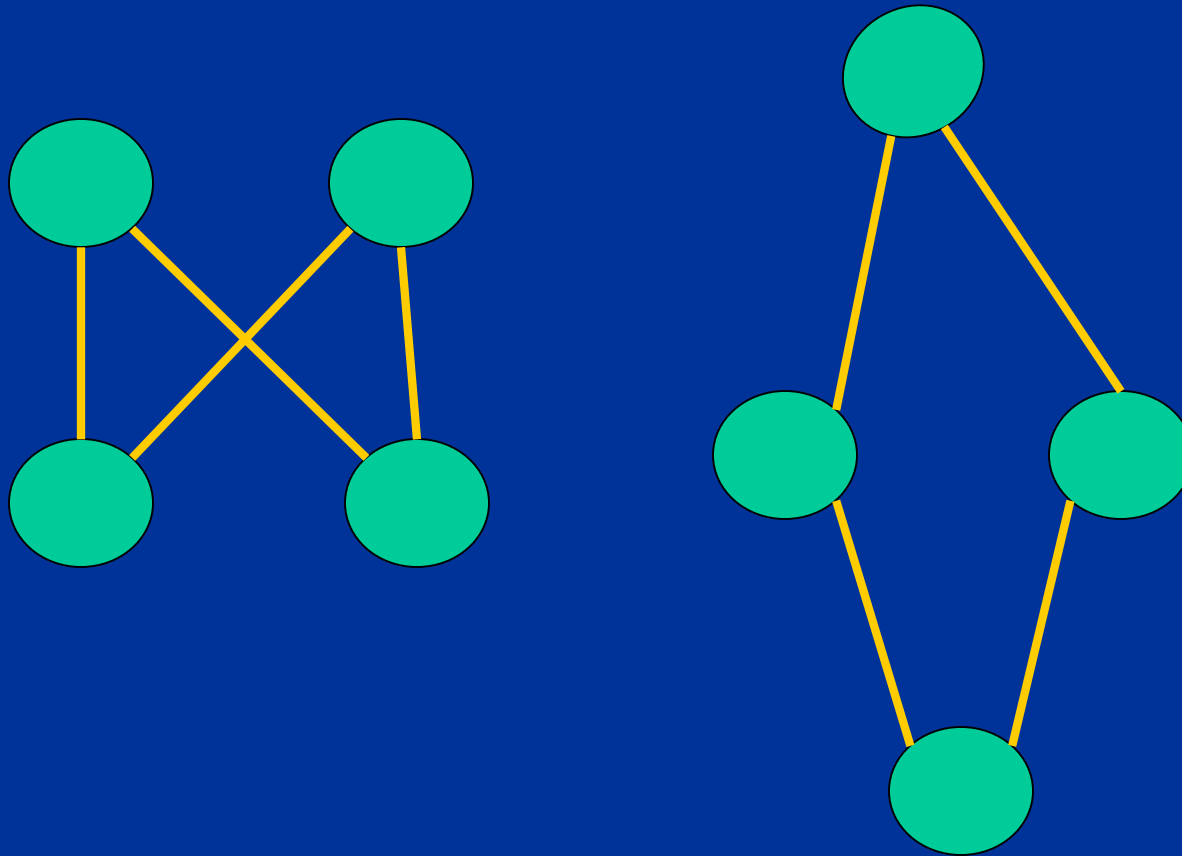
Problemas de Trayectorias y Circuitos

- Encontrar si existe una trayectoria
- Encontrar la trayectoria más corta
- Encontrar trayectoria / circuitos que pasen por cada orilla una vez (Euler)
- Encontrar trayectoria / circuito que pase por cada vértice una vez (Hamilton)
- Agente Viajero

Isomorfismo entre Grafos

- Dos grafos son isomorfos si existe una correspondencia 1:1 entre nodos y orillas de forma que se mantengan las incidencias
- Isomorfismo de subgrafos: un grafo es isomorfo a un subgrafo (subconjunto de nodos y orillas) de otro grafo

Isomorfismo entre Grafos



Tipos de isomorfismos

- Isomorfismo de grafos
 - correspondencia 1:1 entre dos grafos G_1 - G_2
- Isomorfismo de subgrafos
 - correspondencia entre un grafo G_1 y los subgrafos de G_2
- Doble isomorfismo de subgrafos
 - correspondencia entre los subgrafos de G_1 y los subgrafos de G_2

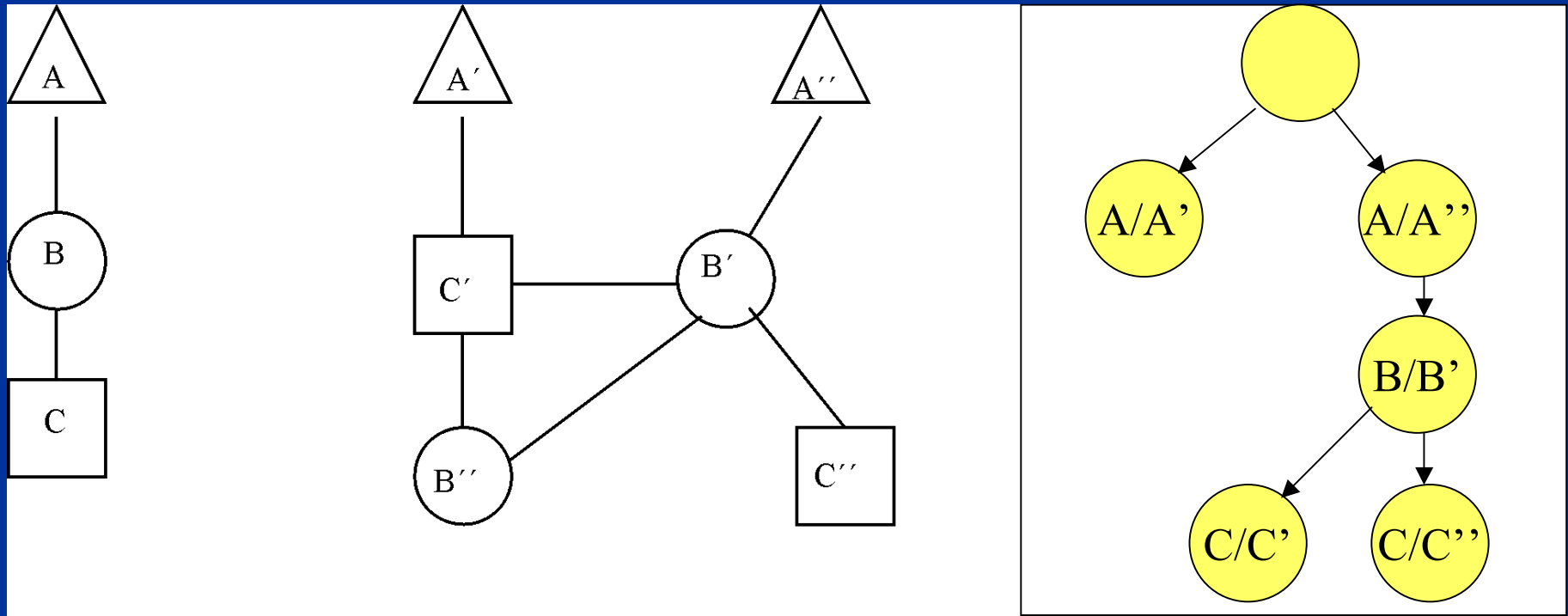
Técnicas para isomorfismo

- Búsqueda con *backtracking*
- Búsqueda de *cliques*

Búsqueda con *backtracking*

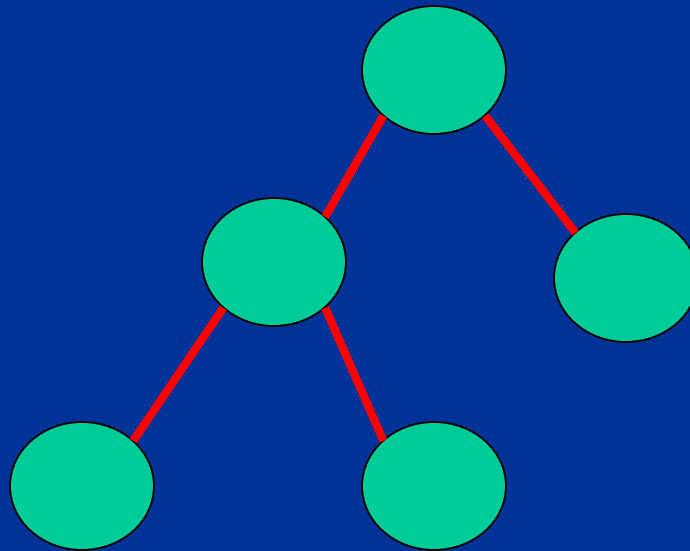
- Se construye un árbol en el que las trayectorias corresponden a isomorfismos:
 - se toma un nodo de G_1 y todas sus posibles correspondencias en G_2 (primer nivel)
 - se buscan los nodos conectados a los nodos correspondientes del primer nivel (segundo nivel)
 - se continua hasta que no existan correspondencias
 - las trayectorias en el árbol corresponden a isomorfismos de subgrafos entre G_1 y G_2

Búsqueda con *backtracking*



Árbol

- Grafo conectado no dirigido que no contiene circuitos simples
 - Hoja o nodo terminal: grado 1
 - Nodo rama o interno: grado > 1

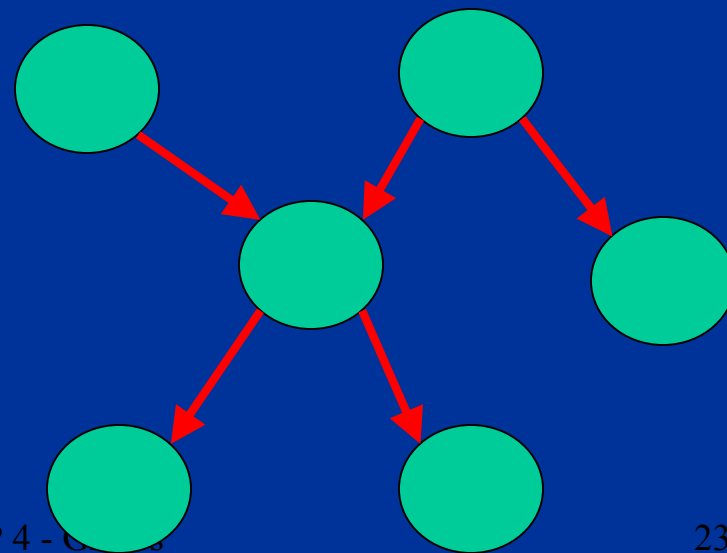
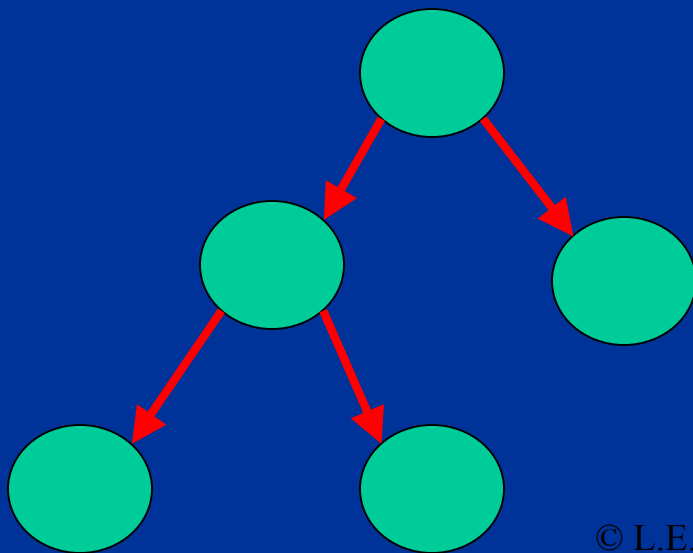


Árbol

- Propiedades:
 - Hay una trayectoria simple entre cada par de nodos
 - El número de nodos = número de orillas + 1
 - Un árbol con 2 o más nodos tiene al menos dos nodos hoja

Árboles dirigidos

- **Árbol (enraizado):** un nodo con grado de entrada 0 (raíz) y los demás con 1
- **Poliárbol (árbol dirigido):** se vuelve un árbol al quitar las direcciones



Árbol dirigido

- Terminología:
 - Raíz: vértice con grado de entrada 0
 - Hoja: vértice con grado de salida 0
 - Interno: vértice con grado de salida > 0
 - Hijo / Padre: arco de A a B, A es padre de B y B es hijo de A
 - Hermanos: tienen el mismo padre
 - Descendientes / Ascendientes: trayectoria de A a B, A es ascendiente de B y B es descendiente de A

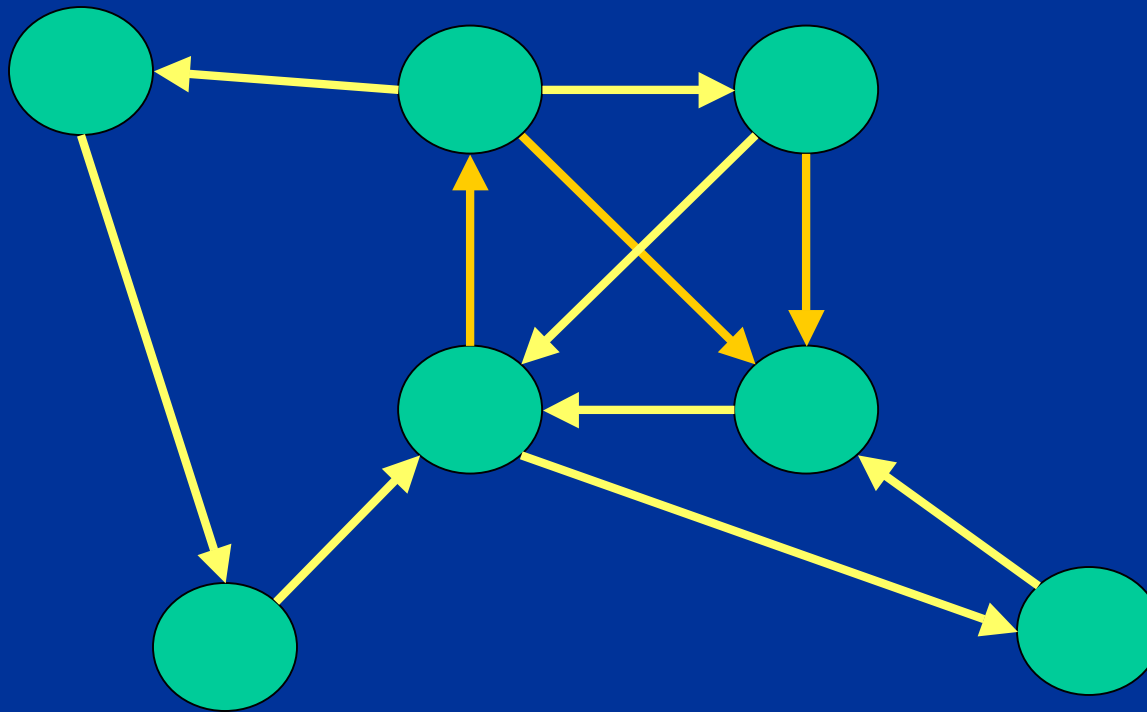
Árbol dirigido

- Terminología:
 - Subárbol con A raíz: A y todos sus descendientes
 - Subárbol de A : subárbol con hijo de A como raíz
 - Árbol de aridad “ m ”: cada nodo rama (raíz o interno) tiene máximo m hijos. Es regular si c/u tiene exactamente m hijos (binario $m = 2$)

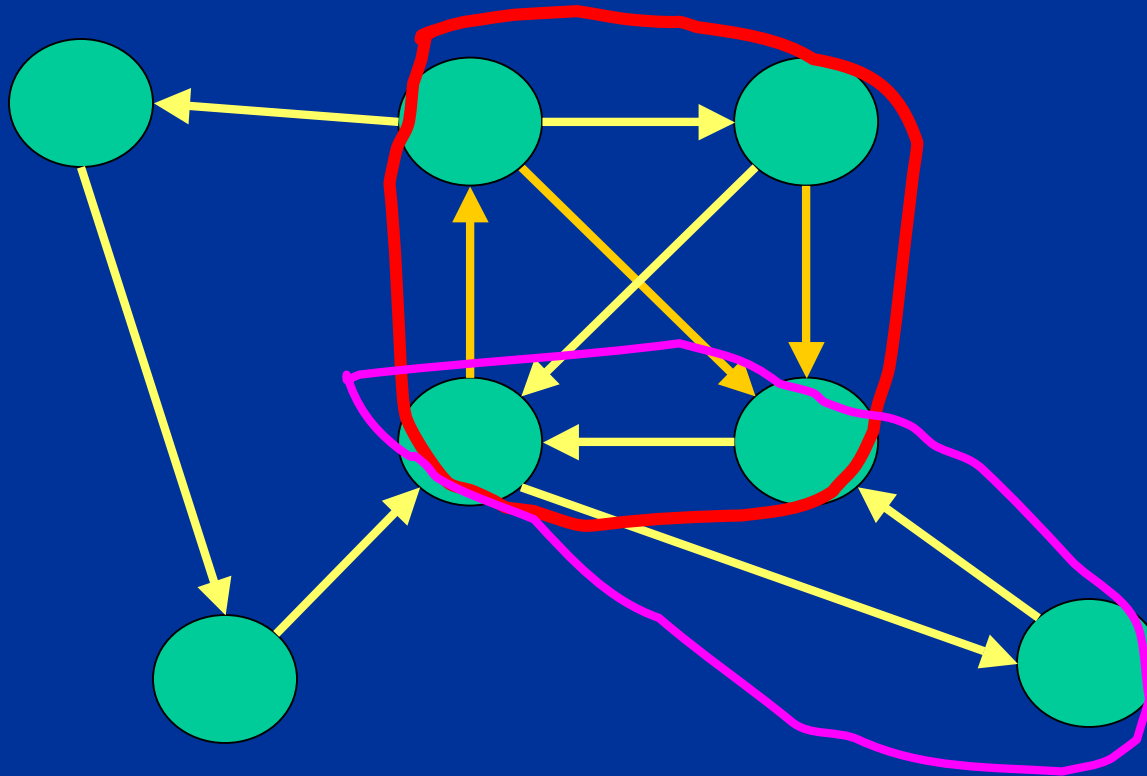
Clique

- Grafo completo: cada par de nodos distintos son adyacentes
- Conjunto completo: subconjunto W de G que induce un subgrafo completo de G
- Clique: subconjunto de nodos que es conjunto completo y máximo (no hay un conjunto completo que lo contenga)

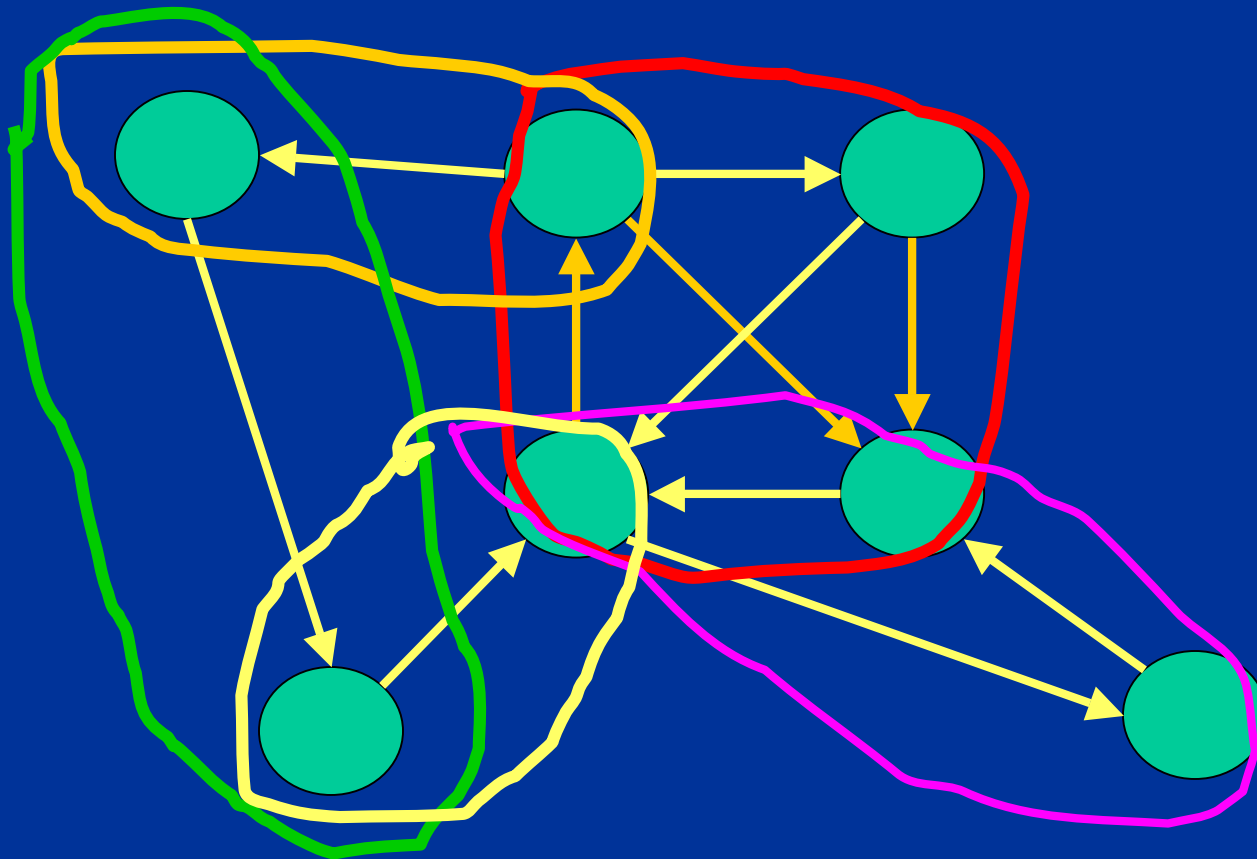
Cliques



Cliques



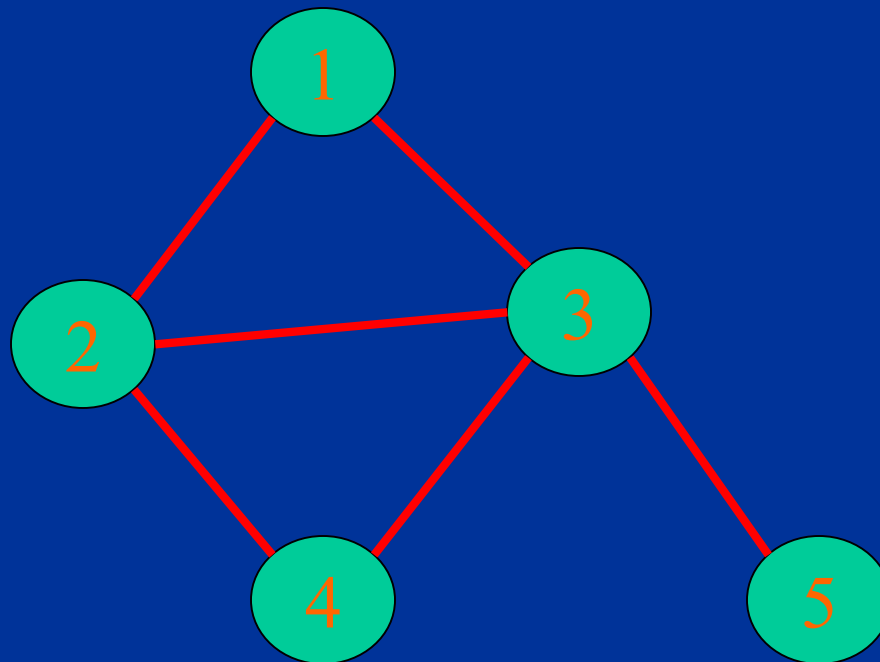
Cliques



Ordenamiento Perfecto

- Un ordenamiento $O = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ de los nodos es perfecto si todos los vecinos anteriores al nodo están completamente conectados

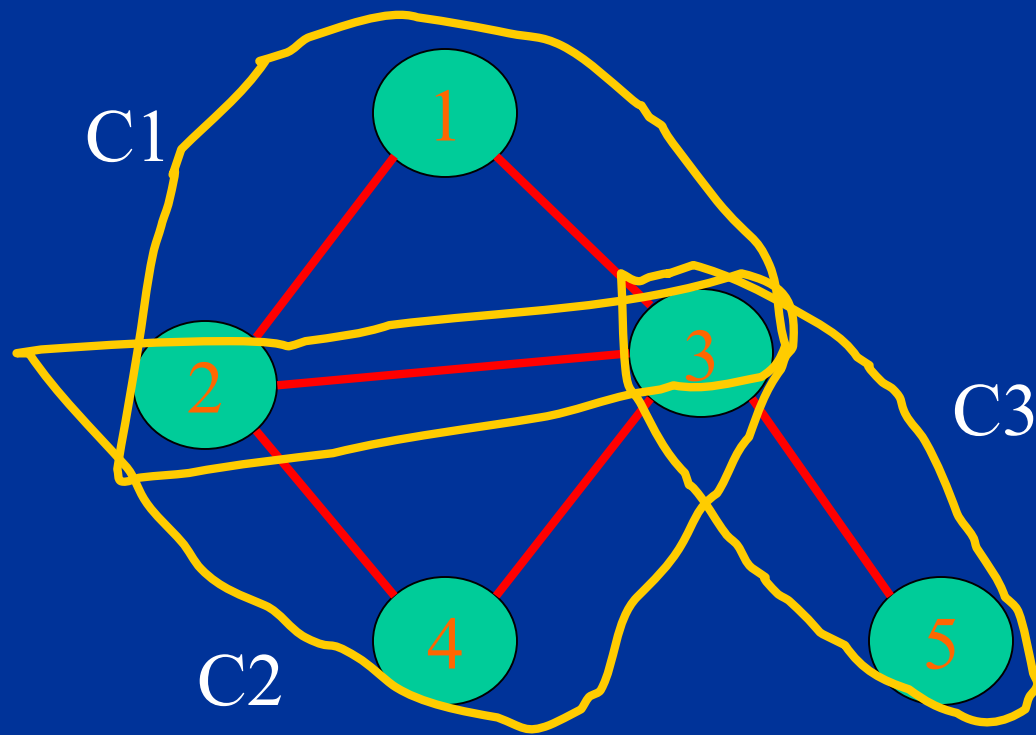
Ordenamiento Perfecto



Ordenamiento de Cliques

- Un ordenamiento de *cliques* $[C_1, C_2, \dots, C_p]$ tiene la propiedad de intersección secuencial si todos los nodos comunes con *cliques* previos están contenidos en el mismo *clique* (padre)
- Esto se cumple si los nodos tienen un ordenamiento perfecto y los *cliques* se ordenan de acuerdo al nodo con número mayor

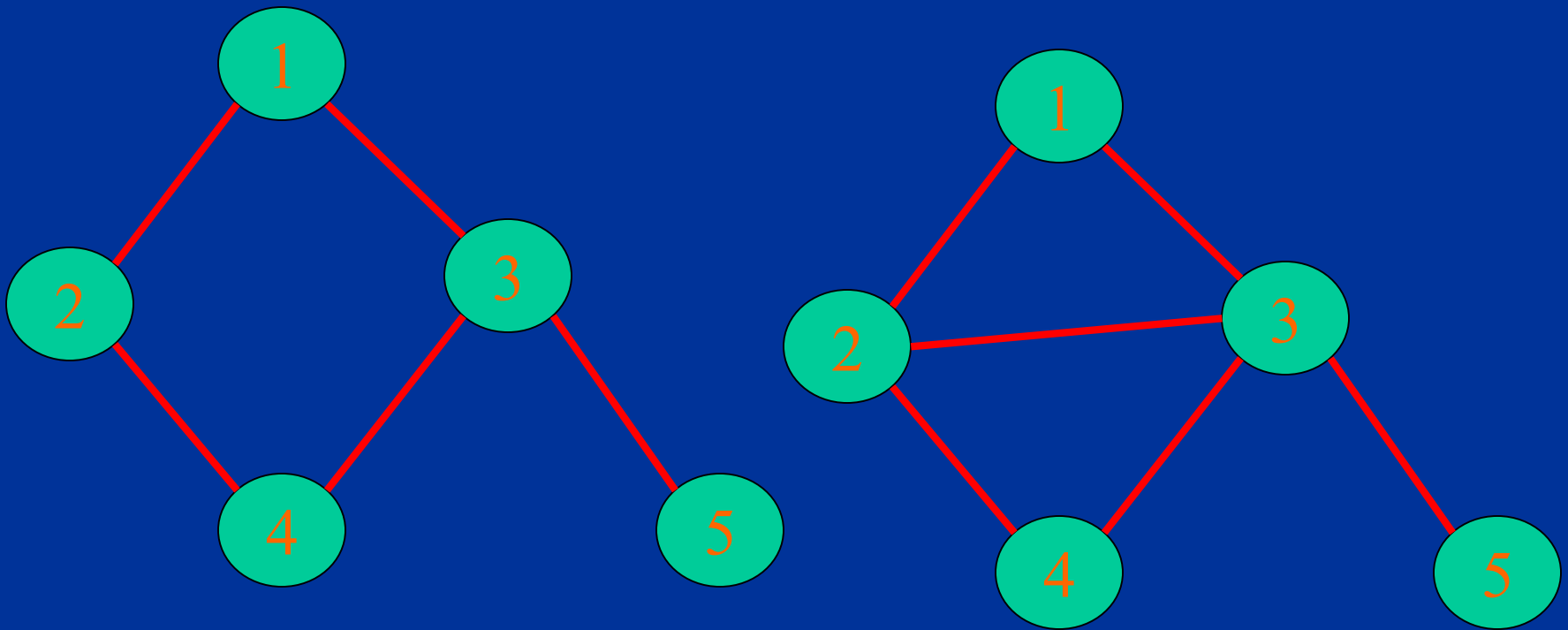
Ordenamiento de Cliques



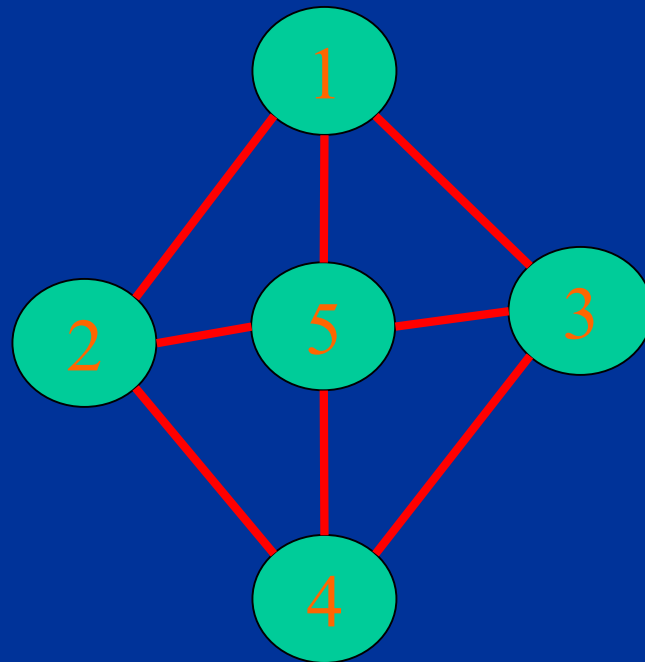
Grafos Triangulados

- Un grafo dirigido es triangulado si cada circuito simple de longitud > 3 tiene una cuerda
- Para tener un ordenamiento de *cliques* con la propiedad de intersección secuencial es necesario que el grafo sea triangulado

Grafos Triangulados



Grafos Triangulados

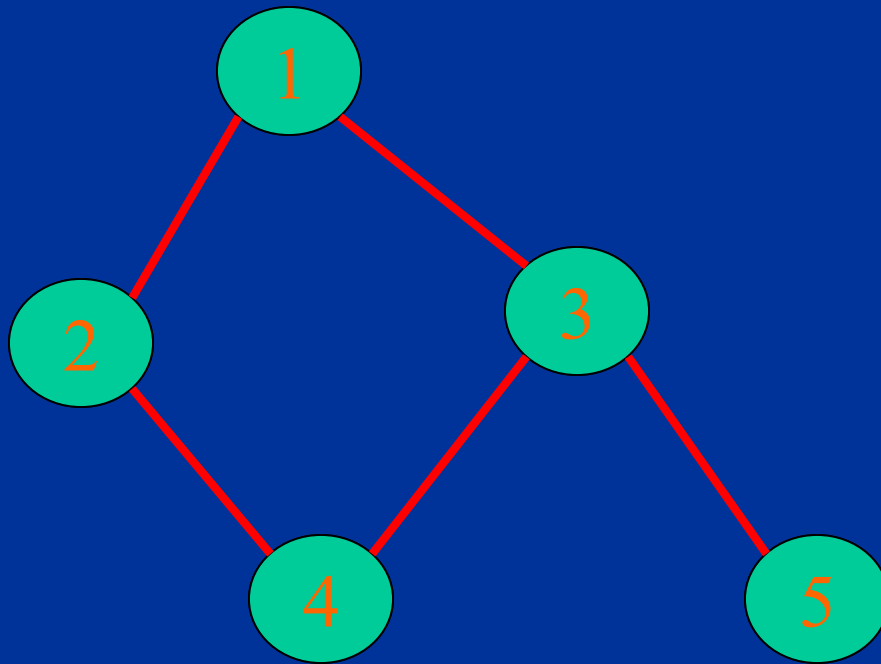


Búsqueda de Máxima Cardinalidad

- Para obtener un ordenamiento de nodos con máxima cardinalidad:
 1. Seleccionar cualquier nodo como inicial: 1
 2. Seleccionar el nodo adyacente al mayor número de vértices previamente numerados y asignarle el siguiente número
 3. Romper empates en forma arbitraria
- Si el grafo es triangulado, este algoritmo provee un ordenamiento perfecto

Ejemplo

- Ordenamiento de acuerdo a búsqueda de máxima cardinalidad

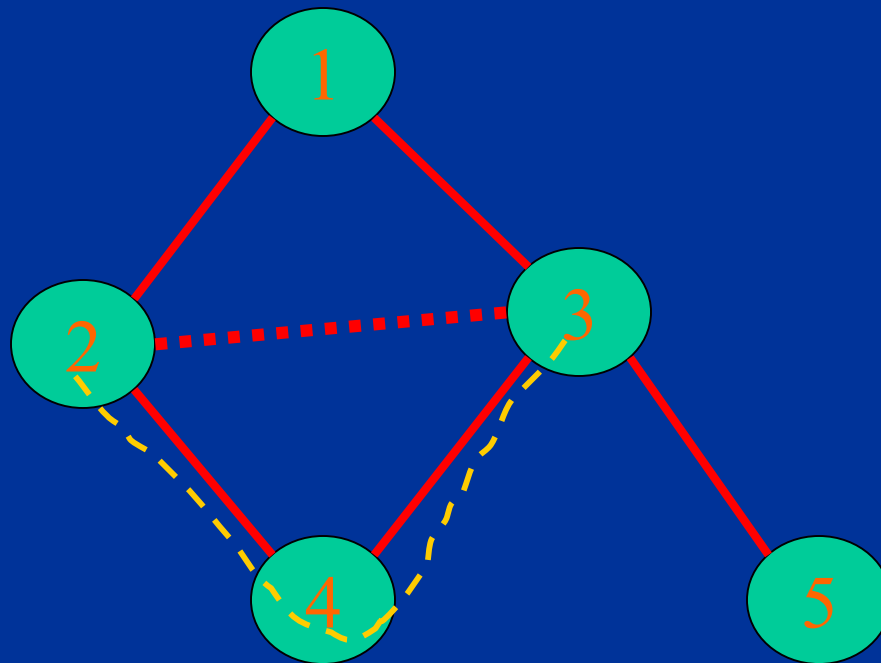


Llenado de un grafo

- El llenado consiste en agregar arcos a un grafo como un paso inicial para hacerlo triangulado
- El llenado, F , es el conjunto de arcos adicionales entre los nodos $v - w$ tal que:
 - el arco: $v-w$ no es parte del grafo original
 - hay una trayectoria entre v, w tal que todos los vértices son mayores a v, w
- Si $F = \text{vacío}$, entonces el grafo es triangulado

Ejemplo

- Llenado de un grafo

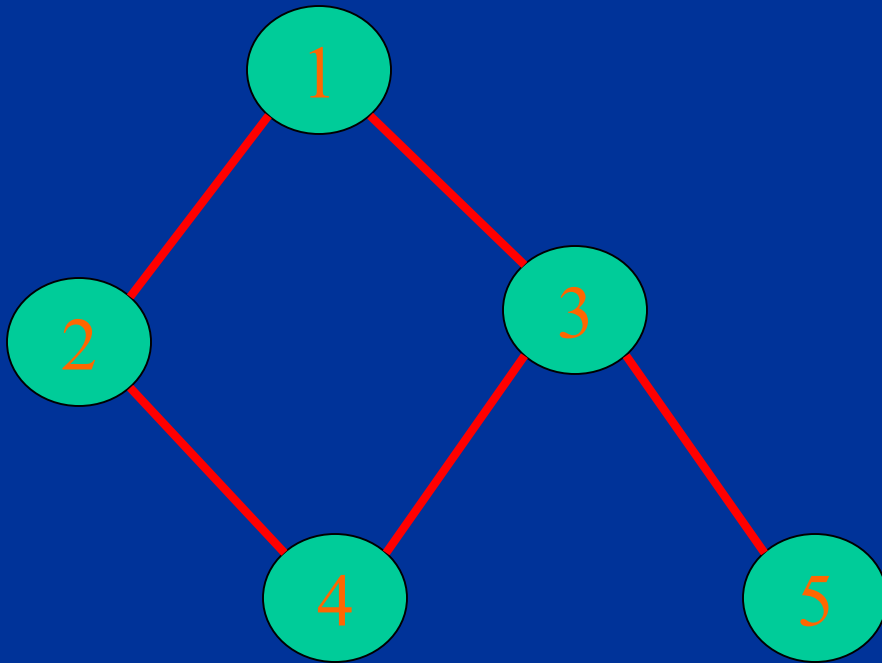


Algoritmo de triangularización

- Ordenar los nodos de acuerdo a máxima cardinalidad
- Obtener el llenado del grafo:
 - Procesar los vértices en orden inverso, de n a 1
 - Para cada nodo w obtener los nodos de índice mayor que estén conectados a w y llamarlos A
 - Agregar arcos a nodos mayores (sucesores) que no están contenidos en A

Ejemplo

- Triangulación

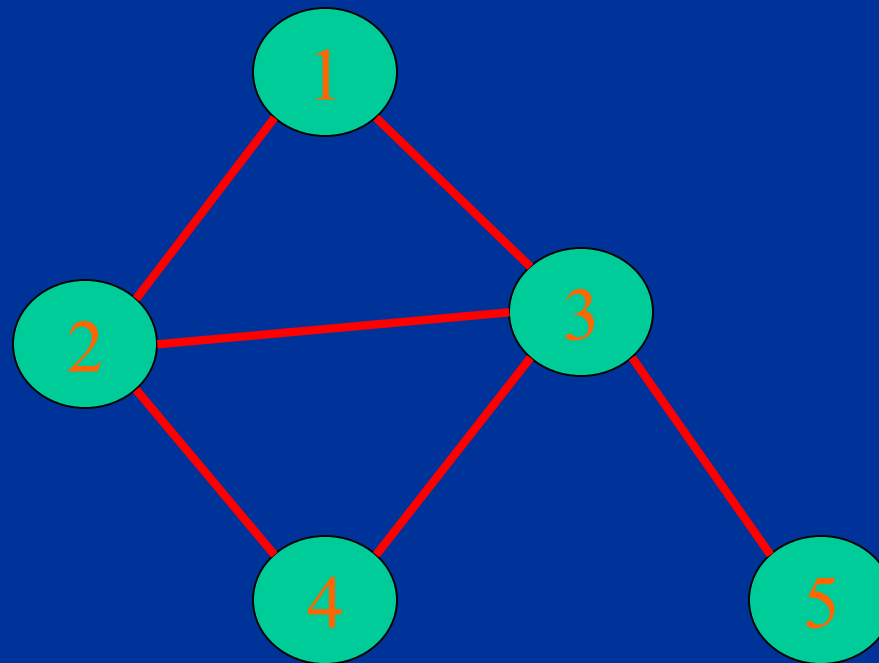


Conjuntos “A”:

- 5:
- 4:
- 3: 4 y 5
- 2: 4 – arco de 2 a 3
- 1: 2 y 3

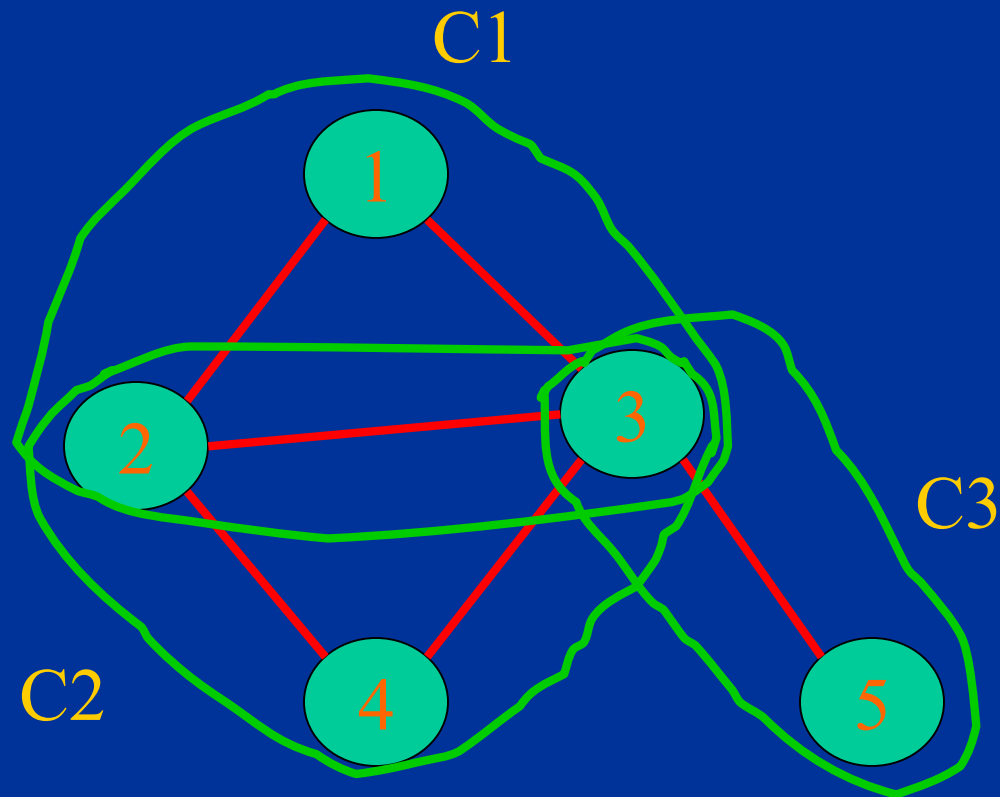
Ejemplo

- Grafo triangulado



Ejemplo

- Cliques



Referencias

- [Koller & Friedman] Cap. 2
- [Neapolitan] Cap. 3
- Libros de matemáticas discretas o teoría de grafos, por ejemplo:
 - R. Gould, Graph Theory, Benjamin/Cummings, 1988

Actividades

- Leer sobre teoría de grafos
- Hacer ejercicios de teoría de grafos