Diagramas Causales e Identificación de Efectos Causales

Intervención en modelos Markovianos

June 11, 2019

Grafos como modelos de intervenciones I

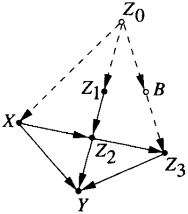
- Los modelos causales, en comparación a los modelos probabilísticos, pueden servir para predecir el efecto de intervenciones. Esta característica requiere que la distribución conjunta P sea complementada con un diagrama causal, i.e., un DAG G que identifique las conexiones causales entre las variables de interés.
- Pearl y Verma interpretaron la lectura causal de un DAG en términos de relaciones funcionales; en otras palabras, cada familia hijo-padre en un DAG G representa una función determinista

$$x_i = f_i(pa_i, \varepsilon_i), i = 1, \ldots, n,$$

  donde pa_i son los padres de la variable X_i en G; los $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$ son alteraciones aleatorias arbitrarias independientes. Si se considera que cualquiera de estos factores influye en dos o más variables, entonces el factor debe entrar al análisis como una variable no medida o latente y se representa en el grafo con un nodo vacío.

Grafos como modelos de intervenciones II

Siguiendo el ejemplo, las suposiciones causales dadas por el modelo, corresponde al siguiente conjunto de ecuaciones:



$$
\begin{aligned}
Z_0 &= f_0(\varepsilon_0) \\
Z_1 &= f_1(Z_0, \varepsilon_1) \\
Z_2 &= f_2(X, Z_1, \varepsilon_2) \\
Z_3 &= f_3(B, Z_2, \varepsilon_3) \\
B &= f_B(Z_0, \varepsilon_B) \\
X &= f_X(Z_0, \varepsilon_X) \\
Y &= f_Y(X, Z_2, Z_3, \varepsilon_Y)
\end{aligned}
$$

Grafos como modelos de intervenciones III

- Se pueden agrupar todos los factores no observados(incluyendo ε_i) en un conjunto U de variables de fondo y resumir sus características con una función de distribución $P(u)$ o algunos aspectos de $P(u)$. Por lo tanto, una especificación completa de modelo causal implicaría dos componentes: un conjunto de relaciones funcionales

$$x_i = f_i(pa_i, u_i), i = 1, \ldots, n,$$

  y una función de distribución conjunta $P(u)$ sobre los factores de fondo. Si el diagrama $G(M)$ asociado con el modelo causal M es acíclico, entonces M se llama *semi-Markoviano*. Si además, las variables de fondo son independientes, M es llamado *Markoviano*, ya que la distribución resultante de las variables observadas sería entonces Markov relativa a $G(M)$.
- Rara vez se cuenta con $P(u)$ o incluso f_i.

Grafos como modelos de intervenciones IV

- El signo de igualdad en ecuaciones estructurales comunica la relación contrafactual asimétrica de "está determinada por" y cada ecuación representa un mecanismo autónomo estable. Por ejemplo, al ecuación para Y establece que, sin importar lo que observemos en Y y cualquier otro cambio en otras ecuaciones, si se asume que las variables $(X, Z_2, Z_3, \varepsilon_Y)$ toman los valores $(x, z_2, z_3, \varepsilon_Y)$, entonces Y tomará el valor dictado por la función f_Y.
- La caracterización funcional de cada relación padre-hijo lleva a la misma descomposición de la distribución conjunta que caracteriza a las redes Bayesianas:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_i P(x_i | pa_i).$$

Grafos como modelos de intervenciones V

- La caracterización funcional provee un lenguaje conveniente para especificar cómo la distribución resultante cambiaría como respuesta a intervenciones externas. Esto se logra codificando cada intervención como una alteración sobre un subconjunto de funciones mientras otras se mantienen intactas. Una vez que conocemos la identidad de los mecanismos alterados por la intervención y la naturaleza de la alteración, el efecto global de la intervención puede ser predicho modificando las ecuaciones correspondientes en el modelo y usando el modelo modificado para calcular una nueva función de probabilidad.
- El tipo más simple de intervención externa es en el que una sola variable, X_i, es forzada a tomar un valor x_i. Esta intervención atómica, denotada por $do(X_i = x_i)$ o $do(x_i)$, equivale a remover la ecuación $x_i = f_i(pa_i, u)$ del modelo y sustituir $X_i = x_i$ en las ecuaciones restantes.

Grafos como modelos de intervenciones VI

- El nuevo modelo por lo tanto representa el comportamiento del sistema bajo la intervención $do(X_i = x_i)$ y, cuando se resuelve para la distribución de X_j, produce el efecto causal de X_i en X_j, el cual es denotado por $P(x_j|\hat{x}_i)$.
- Cuando una intervención forza a un subconjunto X de variables a tomar los valore fijos x, entonces el subconjunto de ecuaciones es podada del modelo dado, una por cada miembro de X, entonces define una nueva distribución sobre las variables restantes que caracterizan completamente el efecto de la intervención.

Grafos como modelos de intervenciones VII

Definition (Efecto causal)

Dados dos conjuntos disjuntos de variables, X y Y, el efecto causal de X sobre Y, denotado por $P(y|\hat{x})$ o $P(y|do(x))$, es una función de X al espacio de distribución de probabilidad de Y. Por cada realización x de X, $P(y|\hat{x})$ da la probabilidad de $Y = y$ inducida por eliminar del modelo todas las ecuaciones correspondientes a las variables en X y sustituyendo $X = x$ en las ecuaciones restantes.

Intervenciones como variables I

- Una visión alternativa de intervención trata a la fuerza responsable de la intervención como una variable dentro del sistema.
- Esto es facilitado representado la función f_i a si misma como un valor de una variable F_i y después reescribiendo x_i como

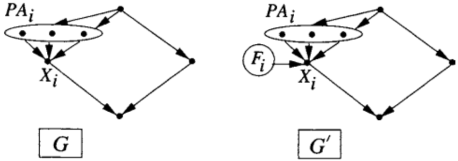
  $$x_i = I(pa_i, f_i, u_i)$$

  donde I es una función de tres parámetros que satisface

  $$I(a, b, c) = f_i(a, c) \text{ cuando } b = f_i.$$

  Esto equivale a conceptualizar la intervención como una fuerza externa F_i que altera la función f_i entre X_i y sus padres. Se puede representar F_i como un nodo padre de X_i, y el efecto de tal intervención puede ser analizado condicionando nuestra probabilidad sobre el evento de que la variable F_i, tome el valor f_i.

Intervenciones como variables II



- El efecto de una intervención atómica $do(X_i = x_i')$ está codificada añadiendo a G una arista $F_i \to X_i$, donde F_i es una nueva variable que toma valores en $\{do(x_i'), \text{idle}\}$, x_i' se extiende sobre el dominio de X_i, e idle representa que no hay intervención. Entonces, el nuevo conjunto de padres de X_i en la red aumentada es $PA_i' = PA_i \cup \{F_i\}$, y está relacionado a X_i por la probabilidad condicional

$$P(x_i|pa_i') = \begin{cases} P(x_i|pa_i) & \text{si } F_i = idle \\ 0 & \text{si } F_i = do(x_i') \text{ y } x_i \neq x_i' \\ 1 & \text{si } F_i = do(x_i') \text{ y } x_i = x_i'. \end{cases} \tag{1}$$

Intervenciones como variables III

- El efecto de la intervención $do(x_i')$ es transformar la función de probabilidad original $P(x_1, \ldots, x_n)$ en una nueva función de probabilidad $P(x_1, \ldots, x_n|\hat{x}_i')$ dada por

$$P(x_1, \ldots, x_n|\hat{x}_i') = P'(x_1, \ldots, x_n|F_i = do(x_i'))$$

  donde P' es la distribución especificada por la red aumentada $G' = G \cup \{F_i \rightarrow X_i\}$ y la ecuación (1), con una distribución a priori sobre F_i. En general, al añadir una arista de intervención hipotética para cada nodo en G, se puede construir una función de probabilidad aumentada $P'(x_1, \ldots, x_n; F_1, \ldots, F_n)$ que contiene información sobre tipos de intervenciones más ricas.
- Una ventaja de la representación de red aumentada es que es aplicable a cualquier cambio en la relación funcional f_i y no meramente en el reemplazo de f_i por una constante. También muestra claramente las ramificaciones de cambios espontáneos en f_i, sin intervención de un control externo.

Identificación de cantidades causales I

Definition (Identificabilidad)

Sea $Q(M)$ cualquier cantidad calculada de un modelo M. Decimos que Q es identificable en una clase $\mathbf{M}$ de modelos si, para cualquier par de modelos M_1 y M_2 de $\mathbf{M}$, $Q(M_1) = Q(M_2)$ cuando $P_{M1}(v) = P_{M2}(v)$. Si nuestras observaciones están limitadas y permiten sólo un conjunto parcial F_M de atributos (de $P_M(v)$) a estimarse, definimos que Q es identificable a partir de F_M si $Q(M_1) = Q(M_2)$ cuando $F_{M1} = F_{M2}$.

Definition (Identificabilidad del efecto causal)

El efecto causal de X sobre Y es identificable a partir de un grafo G si la cantidad $P(y|\hat{x})$ puede ser calculado únicamente de cualquier probabilidad positiva de las variables observadas. Esto es, si $P_{M1}(y|\hat{x}) = P_{M2}(y|\hat{x})$ para cualquier par de modelos M_1 y M_2 con $P_{M1}(v) = P_{M2}(v) > 0$ y $G(M_1) = G(M_2) = G$.

Identificación de cantidades causales II

La identificabilidad de $P(y|\hat{x})$ asegura que es posible inferir el efecto de la acción $do(X = x)$ sobre Y a partir de dos fuentes de información:

- observaciones pasivas, como las resumidas en la función de probabilidad $P(v)$,
- el grafo causal G, que especifica (cualitativamente) cuales variables componen los mecanismos estables en el dominio o, alternativamente, cuales variables participan en la determinación de cada variable en el dominio.

Theorem

Dado un diagrama causal G de cualquier modelo markoviano en el cual un subconjunto V de variables son medidas, el efecto causal $P(y|\hat{x})$ es identificable cuando $X \cup Y \cup PA_X \subseteq V$, esto es, cuando X, Y, y todos los padres de las variables en X son medidas. La expresión para $P(y, \hat{x})$ se obtiene obtiene ajustado PA_x.

Identificación de cantidades causales III

Corollary

Dado el diagrama causal G de cualquier modelo Markoviano en el cual todas las variables son medidas, el efecto causal $P(y|\hat{x})$ es identificable para cualesquiera dos subconjuntos de variables X y Y y es obtenido de la factorización truncada de $P(x_1, \ldots, x_n|\hat{x})$.