Matemáticas Discretas

Curso Propedéutico 2009
Maestría en Ciencias Computacionales, INAOE

Conjuntos (2)

Dr Luis Enrique Sucar Succar
esucar@inaoep.mx
Dra Angélica Muñoz Meléndez
munoz@inaoep.mx

Dibujo de Chris Mould publicado en *The Independent*, Londres; reproducido por *Courrier International* 650, 240303

Conjuntos (11)

Conjuntos & Subconjuntos

Definición Si A es un conjunto del universo $\mathscr{U}$, el **conjunto potencia** de A, denotado por $\mathscr{P}(A)$, es la colección de todos los subconjuntos de A.

Ejemplo Sea C = { 1,2,3,4 },

$\mathscr{P}(C)$ = { ∅, {1}, {2}, {3}, {4}, {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3}, {1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}, {1,2,3,4} }

Conjuntos (12)

Conjuntos & Subconjuntos

En general, para cualquier conjunto finito A con $|A| = n \geq 0$, A tiene 2^n subconjuntos, de modo que $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$.

Para cualquier $0 \leq k \leq n$, hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos de tamaño k.

Al contar los subconjuntos de A según el número k de elementos de un subconjunto, se obtiene la siguiente identidad combinatoria

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ para } n \geq 0.$$

Conjuntos (13)

Conjuntos & Subconjuntos

Ejemplo Supongamos que deseamos calcular cuántos subconjuntos de r elementos pueden generarse del conjunto A, que tiene n elementos, donde $n \geq r > 1$.

Para ello "marcaremos" un elemento x en A:

Sea $A = \{x, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Total de subconjuntos de A que contienen r elementos

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

Subconjunto C de A, donde $x \notin C$ y $|C| = r$

Subconjunto B de A, donde $x \in B$ y $|B| = r$

Conjuntos (14)

Operaciones de Conjuntos

Definición Dados A, $B \subseteq \mathcal{U}$, se definen las propiedades siguientes:

a) $A \cup B$ (la **unión** de A y B) = $\{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$

b) $A \cap B$ (la **intersección** de A y B) = $\{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$

c) $A \Delta B$ (la **diferencia simétrica** de A y B) =

$\{x \mid (x \in A \text{ o } x \in B)$, pero $x \notin A \cap B\}$ =

$\{x \mid x \in A \cup B$, pero $x \notin A \cap B\}$

Conjuntos (15)

Operaciones de Conjuntos

Si A, $B \subseteq \mathcal{U}$, entonces $A \cup B$, $A \cap B$, $A \Delta B \subseteq \mathcal{U}$.

Por tanto la unión $\cup$, la intersección $\cap$, y la diferencia simétrica Δ son operaciones binarias en $\mathscr{P}(\mathcal{U})$

También se puede decir que $\mathscr{P}(A)$ es **cerrado** en estas operaciones binarias.

Conjuntos (16)

Operaciones de Conjuntos

Ejemplo Con $\mathcal{U}=\{1,2,3, ... ,9,10\}$, A,B y $C \subseteq \mathcal{U}$, $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{7,8,9\}$ tenemos:

a) $\boldsymbol{A \cap B} = \{3, 4, 5\}$ **b)** $\boldsymbol{A \cup B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c) $\boldsymbol{B \cap C} = \{7\}$ **d)** $\boldsymbol{A \cap C} = \varnothing$

e) $\boldsymbol{A \Delta B} = \{1, 2, 6, 7\}$ **f)** $\boldsymbol{A \cup C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

g) $\boldsymbol{A \Delta C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$

Conjuntos (17)

Operaciones de Conjuntos

Definición Si S, $T \subseteq \mathcal{U}$, cuando $S \cap T = \varnothing$, entonces S y T se denominan **disjuntos** o **mutuamente disjuntos**.

Teorema Si S, $T \subseteq \mathcal{U}$, entonces S y T son **disjuntos** si y sólo si $S \cup T = S \Delta T$.

Conjuntos (18)

Operaciones de Conjuntos

Definición Para un conjunto $A \subseteq \mathcal{U}$, el **complemento** de A, denotado por $\mathcal{U}$ - A o $\overline{A}$, está dado por $\{x \mid x \in \mathcal{U}$, y $x \notin A\}$.

Ejemplo Sean $\mathcal{U}= \{1,2,3, \ldots ,9,10\}$, A,B y $C \subseteq \mathcal{U}$,

$A= \{1,2,3,4,5\}$, $B= \{3,4,5,6,7\}$, y $C= \{7,8,9\}$

a) $\overline{A}= \{6, 7, 8, 9, 10\}$,

b) $\overline{B}= \{1, 2, 8, 9, 10\}$,

c) $\overline{C}= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$

Conjuntos (19)

Operaciones de Conjuntos

Definición Para A, $B \subseteq \mathcal{U}$, el **complemento relativo** de A en B, denotado por $B – A$, está dado por $\{x \mid x \in B, x \notin A\}$.

Ejemplo Sean $\mathcal{U}= \{1,2,3, \ldots ,9,10\}$, A,B y $C \subseteq \mathcal{U}$,

$A= \{1,2,3,4,5\}$, $B= \{3,4,5,6,7\}$, y $C= \{7,8,9\}$

a) $B – A = \{6,7\}$ **b)** $A – B = \{1, 2\}$

c) $A – C = A$ **d)** $C – A = C$

e) $A – A = \varnothing$ **f)** $\mathcal{U} – A = \overline{A}$

Conjuntos (20)

Operaciones de Conjuntos

Teorema Las siguientes proposiciones son equivalentes para los conjuntos A, $B \subseteq \mathcal{U}$

a) $A \subseteq B$

b) $A \cup B = B$

c) $A \cap B = A$

d) $\overline{B} \subseteq \overline{A}$

Conjuntos (21)

Operaciones de Conjuntos

Leyes de la Teoría de Conjuntos

Para conjuntos cualesquiera A, B, C de un universo $\mathcal{U}$:

1. $\overline{\overline{A}} = A$	**Doble complemento**
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	**DeMorgan**
$\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$	
3. $A \cup B = B \cup A$	**Conmutativas**
$A \cap B = B \cap A$	

Conjuntos (22)

Operaciones de Conjuntos

Leyes de la Teoría de Conjuntos

4. $\boldsymbol{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$ **Asociativas**

$\boldsymbol{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$

5. $\boldsymbol{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$ **Distributivas**

$\boldsymbol{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$

6. $\boldsymbol{A \cup A = A}$ **Idempotentes**

$\boldsymbol{A \cap A = A}$

Conjuntos (23)

Operaciones de Conjuntos

Leyes de la Teoría de Conjuntos

7. $\boldsymbol{A \cup \varnothing = A}$ **Identidad**

$\boldsymbol{A \cap \mathcal{U} = A}$ **(neutro)**

8. $\boldsymbol{A \cup \overline{A} = \mathcal{U}}$ **Inversas**

$\boldsymbol{A \cap \overline{A} = \varnothing}$

9. $\boldsymbol{A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}}$ **Dominación**

$\boldsymbol{A \cap \varnothing = \varnothing}$

Conjuntos (24)

Operaciones de Conjuntos

Leyes de la Teoría de Conjuntos

10. $\boldsymbol{A \cup (A \cap B) = A}$ **Absorción**

$\boldsymbol{A \cap (A \cup B) = A}$

Nótese que las leyes 2 a 10 se presenten por pares. Estos pares se llaman **duales**. Una proposición se puede obtener a partir de la otra intercambiando en todos los casos en que se presente $\cup$ por $\cap$, y viceversa, y donde aparezca $\mathcal{U}$ por $\varnothing$, y viceversa.

Conjuntos (25)

Operaciones de Conjuntos

Leyes de la Teoría de Conjuntos

Teorema (**El principio de dualidad**) Sea s un teorema que trata de conjuntos e incluye sólo operaciones con conjuntos $\cup$ y $\cap$, entonces el dual de s, denotado s^d también es un teorema de la teoría de conjuntos.

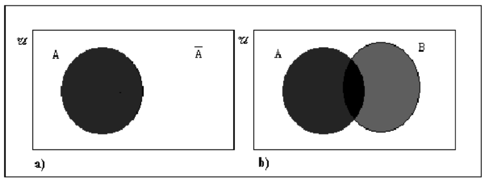
Este principio reduce el trabajo de forma considerable. Para cada par de las leyes 2 a 10 sólo se necesita demostrar una de las proposiciones y recurrir a este principio para obtener la otra proposición del par.

Conjuntos (26)

Operaciones de Conjuntos

Diagramas de Venn

Un **diagrama de Venn**, se construye como sigue: $\mathcal{U}$ se representa por el interior de un rectángulo, mientras que sus subconjuntos se representan por círculos interiores y otras curvas cerradas.

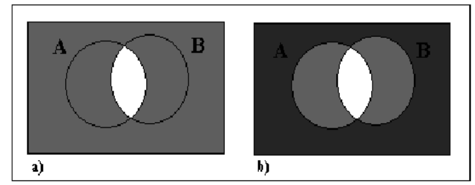


Conjuntos (27)

Operaciones de Conjuntos

Diagramas de Venn

En la figura se usan diagramas de Venn para ilustrar una de las leyes de DeMorgan.



$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

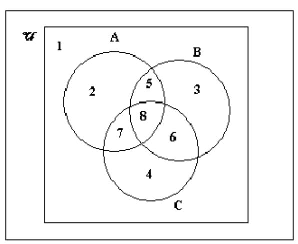
Conjuntos (28)

Operaciones de Conjuntos

Diagramas de Venn

Diagramas de Venn con regiones numeradas.

La región 3 es $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$ y la región 7 es $A \cap \overline{B} \cap C$. Cada región es un conjunto de la forma $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ donde S_1 se sustituye por A o $\overline{A}$, S_2 por B o $\overline{B}$, y S_3 por C o $\overline{C}$.



Conjuntos (29)

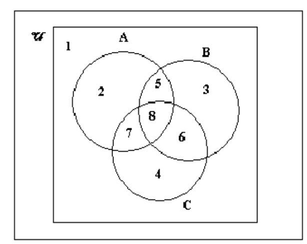
Operaciones de Conjuntos

Diagramas de Venn

Diagramas de Venn con regiones numeradas.

A ∪ ***B*** está formado por las regiones 2, 3, 5, 6, 7, 8, de modo que $\overline{(A \cup B)}$ comprende las regiones 1 y 4.

$\overline{(A \cup B)} \cup C$ está formado por las regiones 1, 4, 6, 7, 8.



Conjuntos (30)

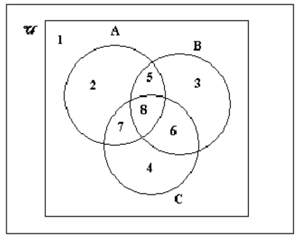
Operaciones de Conjuntos

Diagramas de Venn

Diagramas de Venn con regiones numeradas.

El conjunto $\overline{A}$ consta de las regiones 1, 3, 4, 6, mientras que las regiones 1, 2, 4, 7 forman $\overline{B}$, de modo que las regiones 1 y 4 comprenden $(\overline{A} \cap \overline{B})$. Si se toma la **unión** de **C** con $(\overline{A} \cap \overline{B})$,

$C \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ corresponde a las regiones 1, 4, 6, 7, 8.



Conjuntos (31)

Operaciones de Conjuntos

Otra técnica para probar igualdades entre conjuntos es la **tabla de pertenencia**. Se observa que para los conjuntos $A, B \subseteq \mathcal{U}$, un elemento $x \in \mathcal{U}$ cumple exactamente una de las cuatro situaciones siguientes:

a) $x \notin A$, $x \notin B$; **b)** $x \notin A$, $x \in B$;

c) $x \in A$, $x \notin B$; **d)** $x \in A$, $x \in B$.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Conjuntos (32)

Operaciones de Conjuntos

Se puede establecer la igualdad de dos conjuntos ocupando sus columnas respectivas en las tablas de pertenencia. En la tabla se muestra esto para la ley distributiva de la unión sobre la intersección.

A	B	C	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$	$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Conjuntos (33)

Operaciones de Conjuntos

Definición Denótese por I un conjunto de índices. Si para cada índice $i \in I$ hay un conjunto $A_i \subseteq \mathcal{U}$, entonces

$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i$ para al menos un $i \in I\}$ y

$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i$ para todo $i \in I\}$

Obsérvese que $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ si $x \notin A_i$, para todo índice $i \in I$.

Si $x \notin A_i$ para al menos un índice $i \in I$, entonces $x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$.

Conjuntos (34)

Operaciones de Conjuntos

Si el conjunto de índices *I* es el conjunto infinito Z^+, se puede escribir:

$$\bigcup_{i \in Z+} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap_{i \in Z+} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Conjuntos (35)

Operaciones de Conjuntos

Teorema Leyes de De Morgan generalizadas.

Sea *I* un conjunto de índices donde para cada $i \in I$, $A_i \subseteq \mathcal{U}$

a) $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$

b) $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$