Matemáticas Discretas

Dibujo de Chris Mould publicado en *The Independent*, Londres; reproducido por *Courrier International* 650, 240303

Curso Propedéutico 2009
Maestría en Ciencias Computacionales, INAOE

Conjuntos (1)

Dr Luis Enrique Sucar Succar
esucar@inaoep.mx
Dra Angélica Muñoz Meléndez
munoz@inaoep.mx

¡Bienvenidos!

- Curso propedéutico formativo/selectivo.
- Objetivo: Estudiar conceptos básicos de matemáticas discretas necesarios para las ciencias de la computación.
- 16 sesiones de 2h30 c/u = 40 horas en total.
- Asesorías: MC Hugo Jair Escalante Balderas, oficina 1103, los viernes de 10h00 a 17h00.
- Material del curso:

http://ccc.inaoep.mx/~esucar/Clases-md/Mate Discretas.html

- Evaluación:
  - 2 exámenes parciales 30%
  - Examen final 70%

Contenido

1. Conjuntos

conjuntos y subconjuntos, operaciones de conjuntos, diagramas de Venn

2. Principios fundamentales del conteo

reglas de la suma y del producto, permutaciones, combinaciones

3. Probabilidad

definiciones, probabilidad condicional, teorema de Bayes, ditribuciones, variables aleatorias.

4. Relaciones y funciones

relaciones y sus propiedades, equivalencia, conjuntos parcial y totalmente ordenados.

5. Grafos

definiciones, grafos eurelianos y hamiltonianos, conectividad, grafos planares, árboles.

6. Lógica

fundamentos, álgebra booleana, cálculo proposicional, cálculo de predicados.

7. Series

series y recurrencias, manipulación de series, series múltiples.

8. Inducción y recursión

inducción en números naturales, inducción matemática, funciones recursivas.

Matemáticas Discretas

Las matemáticas discretas se encargan de estudiar objetos enumerables con valores distintos, separables.

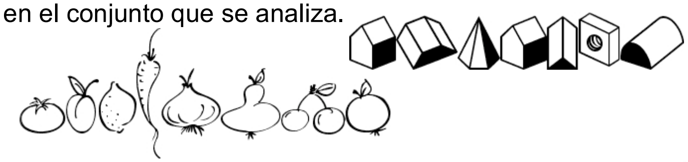
Las matemáticas discretas son de gran utilidad para describir objetos y problemas reales, en modelos abstractos aptos para ser resueltos en las ciencias de la computación.

Conjuntos (1)

Conjuntos & Subconjuntos

Definición Definimos intuitivamente un conjunto como una **colección bien definida de elementos**. Se denomina a estos elementos **objetos** y se dice que son **miembros** del conjunto.

El adjetivo “**bien definido**” implica que cualquiera que sea el objeto considerado, se pueda determinar si está o no en el conjunto que se analiza.



Conjuntos (2)

Conjuntos & Subconjuntos

Se utilizan letras mayúsculas, como *A*, *B*, *C*,..., para representar **conjuntos**, y letras minúsculas para representar los **elementos**.

Dado un conjunto *A*

Se escribe $x \in A$ si *x* **es un elemento** de *A*;

$y \notin A$ indica que *y* **no pertenece** a *A*.

Conjuntos (3)

Conjuntos & Subconjuntos

Se puede describir un conjunto enlistando sus elementos entre llaves como

A = {1, 2, 3, 4, 5} (**descripción extensional**)

También se puede describir este conjunto mediante una o más propiedades que indican cómo deben ser sus elementos (**descripión intencional**). Entonces *A* también se puede escribir como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero, } 1 \leq x \leq 5\}$$

$$A = \{x : x \text{ es un entero, } 1 \leq x \leq 5\}$$

Conjuntos (4)

Conjuntos & Subconjuntos

Cuando se trata un problema particular, hay un **universo** o **conjunto universal**, formulado o implicado, denotado por $\mathscr{U}$ del cual se seleccionan los elementos para formar los conjuntos.

Ejemplo Para el universo $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, considérese un conjunto A = {1, 2}. Si $B = \{x \mid x^2 \in \mathscr{U}\}$ los elementos de son 1 y 2, B = {1, 2}. Como *A* y *B* tienen los mismos elementos se considera que son el mismo conjunto.

Conjuntos (5)

Conjuntos & Subconjuntos

Ejemplo Para $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, el conjunto de enteros positivos, sean:

$A = \{1, 4, 9, \ldots, 64, 81\} = \{x^2 \mid x \in \mathcal{U}, x^2 < 100\}$

$B = \{1, 4, 9, 16\} = \{y^2 \mid y \in \mathcal{U}, y^2 < 20\}$

$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2k \mid k \in \mathcal{U}\}$

A y *B* son ejemplos de conjuntos **finitos**, mientras que *C* lo es de un conjunto **infinito**.

♫ Un mismo conjunto puede tener más de una descripción intencional.

Conjuntos (6)

Conjuntos & Subconjuntos

Dado un conjunto finito *A*

$|A|$ denota el número de elementos en *A* y se denomina **cardinalidad** o **tamaño** de *A*.

Ejemplo Un nombre de variable en FORTRAN ANSI está formado por una sola letra seguida de a lo sumo, cinco caracteres (letras o dígitos). Si $\mathcal{U}$ es el conjunto de todos los nombres de variables, entonces, $|\mathcal{U}|$ es:

$26+26(36)+26(36)^2+ \ldots +26(36)^5 = 26 \sum_{i=0}^{5} 36^i = 1\,617\,038\,306$

de modo que $\mathcal{U}$ es un conjunto grande, pero todavía finito.

Conjuntos (7)

Conjuntos & Subconjuntos

Definición Si *C*, *D* son conjuntos de un universo $\mathcal{U}$, se dice que *C* es un **subconjunto de** *D*, y se escribe $C \subseteq D$ o $D \supseteq C$ si todo elemento de *C* es también un elemento de *D*.

Si existe algún elemento de *D* que no está en *C*, *C* se denomina **subconjunto propio** de *D* y se denota por $C \subset D$ o $D \supset C$.

Conjuntos (8)

Conjuntos & Subconjuntos

Para los conjuntos *A*, *B* del universo $\mathcal{U}$ puede suceder que *A* **no sea subconjunto de** *B*. Esto se expresa por $A \subsetneq B$ y ocurre cuando hay algún elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Conjuntos (9)

Conjuntos & Subconjuntos

Definición Para un universo $\mathscr{U}$ se dice que los conjuntos C y D (tomados de $\mathscr{U}$) **son iguales** y se escribe $C = D$, si C y D contienen los mismos elementos.

De esta definición se deduce que ni el orden ni la repetición tienen importancia para un conjunto, de modo que $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 3\} = \{1, 2, 1, 3, 1\}$.

Conjuntos (10)

Conjuntos & Subconjuntos

Teorema Sean $A, B, C \subseteq \mathscr{U}$.

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$

Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$

Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Conjuntos (11)

Conjuntos & Subconjuntos

Definición El conjunto nulo o **vacío** es aquel que no contiene elementos y se denota por $\varnothing$ o $\{\ \}$.

Observemos que $|\varnothing| = 0$, pero $\{0\} \neq \varnothing$. Además, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, pues $\{\varnothing\}$ es un conjunto con un elemento: el conjunto vacío.

Para cualquier universo $\mathscr{U}$, sea $A \subseteq \mathscr{U}$. Entonces $\varnothing \subseteq A$ y si $A \neq \varnothing$ entonces $\varnothing \subset A$.

Conjuntos (12)

Conjuntos & Subconjuntos

Ejemplo Sea $\mathscr{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces se cumplen las siguientes relaciones de subconjuntos:

a) $A \subseteq C$
b) $A \subset C$
c) $B \subset C$
d) $A \subseteq A$
e) $B \subsetneq A$ (es decir, B no es un subconjunto de A)
f) $A \not\subset A$